

CFA/VISHNO 2016

Statistical energy analysis : une description floue de la complexité structurale

J.-L. Guyader

LVA, INSA-Lyon, 25 bis Avenue Jean Capelle, 69621 Villeurbanne, France
jean-louis.guyader@insa-lyon.fr



LE MANS

Les structures réelles sont complexes, elles résultent souvent de l'assemblage de différentes sous structures mécaniques et de cavités acoustiques. Leur modélisation exacte est utopique compte tenu des incertitudes géométriques de la connaissance imparfaite des matériaux et des erreurs de modélisation. Ainsi une prévision très fine est finalement très incertaine et pour rendre robuste la description des phénomènes vibro-acoustique, la SEA utilise l'énergie des sous systèmes et une excitation par bande de fréquence. La SEA repose aussi sur des hypothèses qui ne sont pas vérifiées totalement dans les problèmes pratiques de vibro-acoustique, l'exemple le plus clair est l'hypothèse d'équipartition énergétique qui est liée à la notion de champ diffus et qui ne peut être suffisante pour décrire les phénomènes dès lors que la sous-structure est inhomogène ou que sa densité modale est trop faible. On doit donc s'attendre à ce que la prévision SEA présente un niveau d'incertitude d'autant plus forte que les hypothèses utilisées sont éloignées de la réalité du cas traité. Le modèle SEA aboutit ainsi à une description floue des phénomènes vibro-acoustique qui peut être prise en compte en attribuant aux paramètres de la SEA, facteurs de pertes internes et facteurs de pertes par couplage, des nombres flous.

Nous montrons dans la présentation comment définir ces nombres flous et comment la SEA permet de décrire le comportement de populations de structures présentant des variations paramétriques par rapport au cas nominal.

1 Introduction

Une caractéristique du comportement vibro acoustique des systèmes mécanique complexes est leur grande variabilité de réponse liée à des modifications structurales mineures. Une conséquence de cette variabilité prend de l'importance quand on s'intéresse à une production d'objets mécaniques à la chaîne comme des automobiles. Il faut alors étudier le comportement de populations de structures pour en déduire non seulement un comportement acoustique moyen mais aussi comment les résultats s'écartent de cette moyenne. Dans ce papier nous présentons d'abord le phénomène d'hypersensibilité vibratoire à l'origine de la variation des propriétés vibroacoustique puis nous développons la méthode SEA floue pour caractériser le comportement de la population de structure.

2 Le phénomène d'hypersensibilité

Nous considérons des plaques planes couplées suivant un bord la première plaque est excitée et le déplacement vibratoire des autres plaques, est calculé quand les angles de couplage des plaques varient. La figure 1 donne une représentation schématique des plaques couplées.

Le déplacement vibratoire calculé est présenté sur la figure 2. Dans la configuration ou l'angle entre la plaque 1 et la plaque 2 est voisin de 4° . On constate que des variations très faible de cet angle de couplage induit une variation très forte des vibrations ; c'est le phénomène d'hypersensibilité décrit en ref [2].

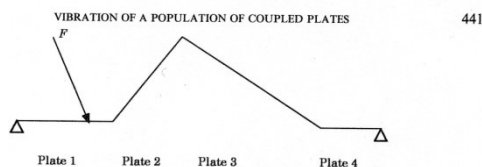


Figure 1 Vue en coupe de 4 plaques couplées, la première étant excitée

Pour les autres angles de couplage le phénomène ne se produit pas. D'où vient ce comportement hypersensible ? Du couplage de l'effet de flexion et de l'effet de membrane

dont la force varie très vite pour de faibles variations de l'angle de couplage autour de 4° . Plus précisément : pour un angle nul les deux effets sont découplés, le couplage évolue très vite autour de 4° puis reste stable pour les angles plus fort. Le phénomène d'hypersensibilité est donc produit par une forte variation des contraintes internes pour une petite variation de forme de la structure.

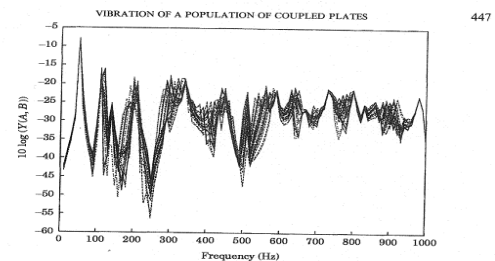


Figure 10. Modulus of transfer mobility; plate geometry as Figure 4. Connexion angle $4 + \epsilon$ where ϵ follows a Gaussian distribution (mean value 0° , standard deviation 1°). Driving force on the first plate at $x = 0.3$, $y = 0.17$. Response on the second plate at $x = 0.3$, $y = 0.17$.

Figure 2 Réponse vibratoire de la plaque n°2 pour de très faibles variations d'un angle de couplage de 4°

Un deuxième résultat est important pour comprendre le comportement des structures complexes ; si on considère un réseau de plaques couplées et la fonction de transfert entre un point excité sur la première plaque et un point récepteur situé sur une autre plaque on constate que la présence d'une seule jonction hypersensible entre les points d'excitation et d'observation, rend la fonction de transfert très variable aux petits défauts d'angles de couplage. Ainsi la présence d'une cause d'hypersensibilité structurale rend très variable la réponse dès lors que la transmission vibratoire traverse une partie hypersensible. Pour les structures complexes les causes d'hypersensibilités sont potentiellement nombreuses compte tenu des jonctions en jeu. Ceci explique les observations faites de la forte variabilité du comportement vibro-acoustique des structures d'une population ou d'une seule structure dont l'état statique change un peu sous l'effet de la température ou des efforts statiques appliqués.

3 Statistical Energy Analysis

3.1 la SEA de base

Nous ne reprendrons pas ici, faute de place, la théorie de la méthode SEA mais juste la formule fondamentale à laquelle elle conduit :

$$\pi_B^A = \beta_B^A (e_A - e_B) \quad (1)$$

La puissance échangée π_B^A entre deux sous système couplés excités par une source aléatoire de type bruit blanc (dans une plage de fréquence) est proportionnelle à la différence de leurs énergie modales e_A et e_B . Le coefficient β_B^A étant positif, la puissance s'écoule du système de haute énergie modale vers celui de faible énergie modale. Il faut bien noter ici que la puissance ne s'écoule pas du système de haute énergie vers celui de basse énergie puisqu'un système de forte énergie mais de grande densité modale peut avoir une énergie modale plus faible qu'un système de faible énergie mais de très faible densité modale.

Cette formule est à la base de l'intense activité de recherche qui s'est menée depuis plusieurs années sur les systèmes vibro-acoustiques complexes, car l'observation de l'énergie des sous systèmes en moyenne sur une plage de fréquence, supprime la variabilité des réponses observées à fréquence pure, comme nous le montrons au précédent paragraphe. On a, avec la SEA, une approche robuste qui donne une vision stratégique.

Dans l'exploitation pratique de cette propriété énergétique des sous systèmes couplés on introduit l'équation (1) dans la conservation de l'énergie. La puissance injectée dans un sous système est soit dissipée dans le sous système soit donnée aux autres sous systèmes couplés. On obtient ainsi un système matriciel dont le rang est égal au nombre de sous systèmes considérés et les paramètres décrivant l'équilibre énergétique sont les facteurs de pertes internes aux sous systèmes (décrivant la dissipation interne) et les facteurs de pertes par couplage (décrivant les échanges de puissance résultant de l'équation (1)). Si on connaît les puissances introduites dans chaque sous système on en déduit les énergies des sous systèmes.

3.2 La SmEdA

Un point clé dans la SEA de base est lié aux hypothèses qui permettent d'aboutir à l'équation (1). Nous avons déjà dit que l'excitation devait être de type aléatoire large bande, les sous système doivent être aussi faiblement couplés et les énergies modales d'un sous systèmes toutes égales, c'est l'hypothèse d'équipartition de l'énergie d'un sous système sur tous ses modes résonnants. SmEdA supprime cette dernière hypothèse et rend ainsi l'approche applicable dans de nombreux cas où la SEA de base ne donne que des résultats médiocres car l'hypothèse d'équipartition n'est pas vraie. Prenons pour éclairer ce point l'exemple d'une plaque couplée à une cavité qui constitue l'exemple classique de problème vibroacoustique. La figure (3) montre les énergies modales de la plaque et de la cavité, quand la plaque est excitée ponctuellement.

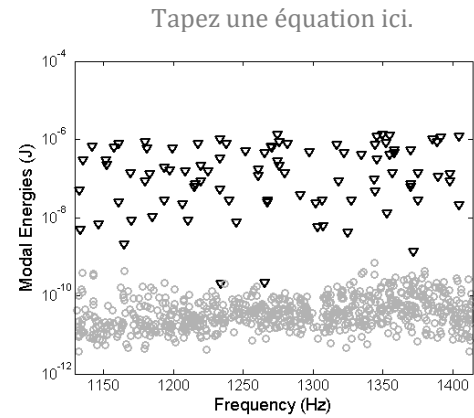


Figure 3. Energies modales d'une plaque et de la cavité qui lui est couplée. Triangles : plaque, cercles : cavité.

Les énergies des modes de plaques sont extrêmement différentes et seulement un mode sur quatre, participe vraiment au phénomène. Pour les énergies des modes de cavité la tendance est la même. Une des hypothèses souvent avancée pour justifier l'équipartition est l'excitation 'rain on the roof', ce qui exclu les excitations par forces ponctuelles. La figure (4) donne un résultat type, dans ce cas d'excitation 'rain on the roof' sur la plaque. On constate bien que les énergies des modes de plaques sont alors constantes mais que celles des modes de cavité sont toujours très variables. SmEdA est une généralisation de la SEA quand on considère que les énergies modales ne sont pas constantes dans un sous systèmes, le domaine d'application s'en trouve élargi notamment le cas d'excitations ponctuelles et les faibles densités modales.

Sur le fond la relation fondamentale reste vraie pour deux modes des deux sous systèmes:

$$\pi_{p,q} = \beta_{p,q} (e_p - e_q) \quad (2)$$

La puissance $\pi_{p,q}$ échangée entre les modes p et q appartenant respectivement aux sous systèmes 1 et 2 est proportionnelle à la différence des énergies des deux modes e_p et e_q , le facteur de couplage $\beta_{p,q}$ étant positif, la puissance va du mode de haute énergie vers le mode de faible énergie.

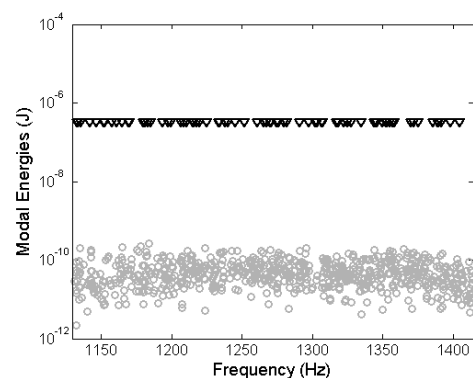


Figure 4. Energies modales de la plaque et de la cavité pour une excitation 'rain on the roof' sur la plaque.

Triangles : plaque, cercles : cavité.

On peut maintenant écrire l'équilibre énergétique modal : la puissance injectée dans le mode p est soit dissipée soit transmise aux modes q du second sous système.

$$\pi_p^{inj} = \pi_p^{dis} + \sum_{q=1}^N \pi_{p,q} \quad (3)$$

En important l'équation (2) dans l'équation (3), avec une nouvelle notation qui introduit les facteurs de pertes internes η_p et par couplage $\eta_{p,q}$, classiques en SEA, on obtient (ω_c est la pulsation centrale de la bande de fréquence excitée):

$$\pi_p^{inj} / \omega_c = \eta_p e_p + \sum_{q=1}^N \eta_{p,q} (e_p - e_q) \quad (4)$$

Quand on considère tous les modes des deux sous-systèmes couplés on obtient un système linéaire qui généralise l'équation 4.

$$\begin{pmatrix} \frac{\pi_{pinj}}{\omega_c} \\ \frac{\pi_{qinj}}{\omega_c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_p + \sum_{q=1}^{N_2} \eta_{p,q} & -\eta_{p,q} \\ -\eta_{p,q} & \eta_q + \sum_{p=1}^{N_1} \eta_{p,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_p \\ e_q \end{pmatrix} \quad (5)$$

La résolution de cette équation (5), donne accès aux énergies modales de chaque sous système, puis en les additionnant on obtient les énergies des deux sous systèmes.

$$E_1 = \sum_{p=1}^{N_1} e_p \quad (6)$$

$$E_2 = \sum_{q=1}^{N_2} e_q \quad (7)$$

3.3 Comportement d'une population de sous systèmes couplés.

Cette partie du texte est développée en détail dans la publication [1], nous y renvoyons le lecteur pour un exposé complet, il y trouvera aussi une liste complètes de références bibliographiques que nous ne notons pas ici .

Nous considérons une population de deux sous systèmes couplés et nous supposons que SmEdA décrit les échanges énergétiques pour chacun des deux sous systèmes couplés de la population, l'hypothèse d'équipartition des énergies modales n'est donc pas faites. Pour les deux sous-systèmes couplés du membre k de la population on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} \frac{\pi_{pinj}^k}{\omega_c} \\ \frac{\pi_{qinj}^k}{\omega_c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_p^k + \sum_{q=1}^{N_B} \eta_{p,q}^k & -\eta_{p,q}^k \\ -\eta_{p,q}^k & \eta_q^k + \sum_{p=1}^{N_A} \eta_{p,q}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_p^k \\ e_q^k \end{pmatrix} \quad (8)$$

Les caractéristiques pertinentes pour décrire le comportement vibro-acoustique de la population des deux sous-systèmes couplés, sont les moyennes d'ensemble des énergies des sous systèmes, soit pour une population de M éléments :

$$\langle E_1 \rangle = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \sum_{p=1}^{N_1} e_p^k, \langle E_2 \rangle = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \sum_{p=1}^{N_2} e_q^k$$

Ces quantités devant être reliées aux moyennes d'ensemble des puissances injectées dans les deux sous systèmes.

$$\langle \pi_{1inj} \rangle = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \sum_{p=1}^{N_1} \pi_{pinj}^k, \langle \pi_{2inj} \rangle = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \sum_{p=1}^{N_2} \pi_{qinj}^k$$

La question est donc de relier ces quantités entre elles. Pour ce faire, on utilise l'équation (8) en prenant la somme des énergies modales puis leurs moyennes d'ensemble, nous obtenons (voir [1] pour une complète description):

$$\begin{pmatrix} \langle \pi_{1inj} \rangle \\ \langle \pi_{2inj} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \widetilde{\eta}_1 \rangle + \langle \widetilde{\eta}_{12} \rangle & -\langle \widetilde{\eta}_{12} \rangle \\ -\langle \widetilde{\eta}_{21} \rangle & \langle \widetilde{\eta}_2 \rangle + \langle \widetilde{\eta}_{21} \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle E_1 \rangle \\ \langle E_2 \rangle \end{pmatrix} \quad (9)$$

Nous retrouvons la forme de la relation SEA de base mais il convient de noter que les facteurs de perte interne $\langle \widetilde{\eta}_1 \rangle$ et $\langle \widetilde{\eta}_2 \rangle$, ou par couplage $\langle \widetilde{\eta}_{12} \rangle$ et $\langle \widetilde{\eta}_{21} \rangle$, apparaissant dans l'équation (9) ne correspondent pas aux moyennes d'ensemble des coefficients de perte modales apparaissant dans l'équation (8) et contiennent un terme correctif, par exemple :

$$\langle \widetilde{\eta}_{12} \rangle = \langle \eta_{12} \rangle + \langle \varepsilon_{12} \rangle \quad (10)$$

Où $\langle \eta_{12} \rangle = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \sum_{p=1}^{N_1} \eta_{p,q}^k$ est la moyenne d'ensemble des coefficients modaux et $\langle \varepsilon_{12} \rangle$ un terme correctif lié à l'hétérogénéité des énergies modales. Ce terme s'annule si l'équipartition des énergies modale est vérifiée

3.4 La SEA floue.

Une population de structure est basée sur une structure nominale et les différentes structures de la population sont des variantes de celle-ci. Si une population est de régularité parfaite, toutes les structures sont nominales et le comportement de la population est exactement décrit par la structure nominale. Naturellement cette situation n'est pas représentative de la réalité des populations de structures et les énergies des sous systèmes d'un membre de la population s'écarteront des énergies nominales. Ce qui est intéressant c'est de savoir comment ces énergies s'écartent du cas nominal. L'équation (9) donne un moyen de représenter ce comportement. Considérons par exemple le coefficient de perte par couplage $\langle \widetilde{\eta}_{12} \rangle$, il est montré en référence [1] que cette quantité peut être estimée à partir de la seule résolution SmEdA du cas nominal. Plus précisément il est possible d'obtenir des bornes d'incertitudes :

$$(1 - \delta_1^-) \eta_{12}^{nominal} \leq \langle \widetilde{\eta}_{12} \rangle \leq (1 + \delta_1^+) \eta_{AB}^{nominal} \quad (11a)$$

$$(1 - \delta_1^-) \eta_1^{nominal} \leq \langle \widetilde{\eta}_1 \rangle \leq (1 + \delta_1^+) \eta_1^{nominal} \quad (11b)$$

$$(1 - \delta_2^-) \eta_{21}^{nominal} \leq \langle \widetilde{\eta}_{21} \rangle \leq (1 + \delta_2^+) \eta_{21}^{nominal} \quad (11c)$$

$$(1 - \delta_2^-) \eta_2^{nominal} \leq \langle \widetilde{\eta}_2 \rangle \leq (1 + \delta_2^+) \eta_2^{nominal} \quad (11d)$$

Ces bornes sont liées à deux quantités :

δ_1^- (resp. δ_2^-) qui représente le taux d'hétérogénéité des énergies modales des valeurs inférieures à la moyenne pour le sous système 1 (resp. 2).

δ_1^+ (resp. δ_2^+) qui représente le taux d'hétérogénéité des énergies modales des valeurs supérieures à la moyenne pour le sous système 1 (resp. 2).

Les coefficients δ_i^+ et δ_i^- sont la clé des plages d'incertitudes, ils sont donnés par les expressions suivantes :

$$\delta_i^+ = \frac{e_i^+ - \bar{e}_i}{\bar{e}_i}$$

$$\delta_i^- = \frac{\bar{e}_i - e_i^-}{\bar{e}_i}$$

Les bornes d'incertitudes dépendent des caractéristiques : e_i^+ , \bar{e}_i , e_i^- de la réponse modale du sous système i. Nous donnons l'interprétation de ces quantités sur la figure (5). On voit que c'est les irrégularités des réponses modales qui créent l'incertitude sur les valeurs des facteurs de pertes SEA. Plus l'irrégularité des énergies modales est forte plus les facteurs de pertes SEA sont incertains.

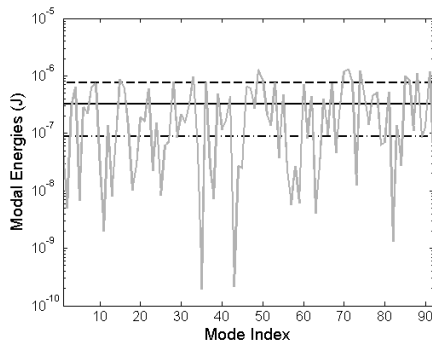


Figure 5 Energies modales du sous système nominal d'une population.

\bar{e}_i Valeur moyenne (trait plein),

e_i^- Valeur moyenne des énergies inférieures à l'énergie modale moyenne (trait mixte)

e_i^+ Valeur moyenne des énergies modales supérieures à l'énergie modale moyenne (trait interrompu)

Il est donc possible, grâce à ces équations, de calculer le comportement de la population avec la seule connaissance du cas nominal.

La prise en compte de ces bornes dans l'équation (9) peut se faire par des nombres flous qui conduisent à des énergies des sous systèmes elles aussi floues. On peut interpréter ces bornes comme les valeurs maximum et minimum des énergies des sous systèmes éléments de la population (voir référence [1]). Les nombres flous qui décrivent les énergies donnent donc la plage de variation des énergies des éléments de la population.

Parlons maintenant des nombres flous : ils sont définis par une fonction d'appartenance et un support, nous prenons comme exemple ici, une fonction d'appartenance triangulaire. Le support est donné par la plage d'incertitude.

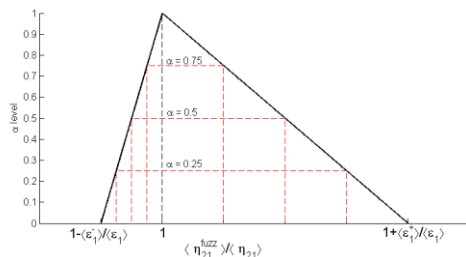


Figure 6. Exemple de nombre flou possédant une fonction d'appartenance triangulaire.

Sur la figure (6) on note aussi la présence de coupures- α , qui sont des réductions du nombre flou à des supports plus faibles.

En considérant que les coefficients de pertes internes et par couplages sont des nombres flous triangulaires on obtient des énergies de sous systèmes qui sont aussi des nombres flous mais dont les fonctions d'appartenance ne sont plus triangulaires. La figure (7) illustre ce résultat ; on y montre le rapport des énergies des sous systèmes quand le sous système 1 est excité puis quand le sous système 2 est excité. Le cas nominal correspond à $\alpha = 1$, plus α diminue plus la plage d'incertitude augmente, on constate que le comportement énergétique des sous systèmes devient de plus en plus flou et que les plages de variations des rapports des énergies des sous systèmes ne sont pas également réparties autour de la valeur nominale. Quand le sous système 1 est excité le comportement de la population tend à avoir un rapport d'énergie des sous systèmes généralement plus faible que dans le cas nominal alors que si le sous système 2 est excité la situation inverse est observée.

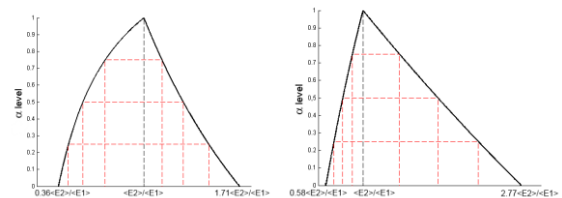


Figure 7. Rapport des énergies des sous systèmes quand le sous système 1 est excité (gauche) et quand le sous système 2 est excité (droite).

4 Le cas plaque-cavité

Pour illustrer la méthode présentée dans ce papier nous considérons le cas classique de couplage vibro-acoustique entre une plaque et une cavité (voir figure 7). La plaque étant excitée par une force ponctuelle.

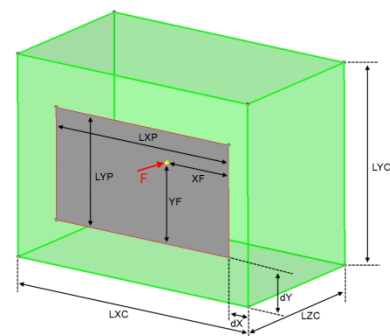


Figure 8 Plaque couplée à la cavité.

La figure 9 montre le facteur de perte interne de la plaque, pour des populations constituées de sous systèmes tous nominaux (pourcentage de variation=0) et pour des populations de caractéristiques aléatoirement variables par rapport au cas nominal (pourcentage maximal de variation

15%). La figure 9 présente les facteurs de pertes par couplage dans les mêmes conditions de variation des populations.

On constate que les fluctuations des caractéristiques de l'équation SEA ont bien des comportements de nombres flous mais dont les fonctions d'appartenances ne sont pas triangulaires.

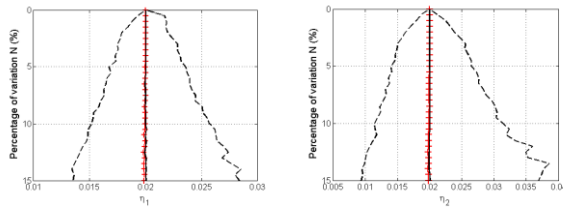


Figure 9. Bornes de variations des facteurs de pertes internes, pour différentes population de plaques (à gauche) et de cavités (à droite), en fonction du pourcentage de variation des caractéristiques des populations par rapport au cas nominal.

Sur ces figures on constate des irrégularités des fonctions d'appartenances, elles proviennent du tirage aléatoire des paramètres de la population (1000 tirages) qui ne couvrent pas forcément toute la plage de variation.

Ces nombres flous ne sont pas triangulaires sauf pour les petites variations (1% à 2%) c'est-à-dire pour les populations très homogènes.

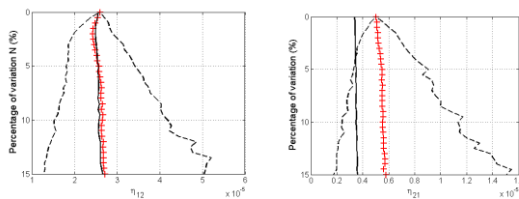


Figure 10. Bornes de variations des facteurs de pertes par couplage, pour différentes population de plaques et de cavités, en fonction du pourcentage de variation des caractéristiques des populations par rapport au cas nominal.

Le rapport des énergies des sous systèmes de populations s'écartant de plus en plus du cas nominal est donné figure 11. C'est le cas où le sous système 1 est excité (la plaque). Le comportement est tout à fait compatible avec une description par nombre flous.

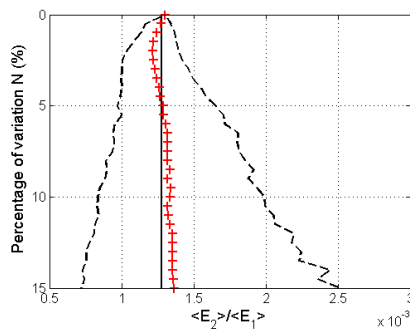


Figure 10. Rapport des énergies des sous systèmes en fonction du pourcentage de variation par rapport au cas nominal, des membres des populations.

Pour appliquer la SEA floue il faut définir les facteurs de pertes internes et de couplages grâce aux supports fournis dans l'équation (11) et nous prenons des fonctions

d'appartenance triangulaires, ce qui naturellement est une approximation de la réalité des populations surtout quand celles-ci sont très hétérogènes. Il reste aussi à définir une coupure- α réaliste car le support du nombre flou est en général très large. Dans l'exemple montré ci-dessous nous avons pris des coupure- α à 30%. La figure (12) donne le rapport des énergies du sous système récepteur (cavité) et du sous système excité (plaque) en fonction de la fréquence.

La courbe noire donne la valeur nominale et les courbes en trait discontinu donnent le support du nombre flou correspondant au rapport des énergies des sous systèmes calculés par la SEA floue. Les courbes de niveau grises donnent les plages de variation des rapports d'énergies des sous systèmes calculés sur des populations fluctuant de plus en plus autour du système nominal.

On peut constater que le phénomène est parfaitement décrit par la SEA floue, tant dans son évolution avec la fréquence que sur la plage de variation par rapport à la structure nominale, en particulier la dissymétrie de comportement par rapport à la valeur nominale.

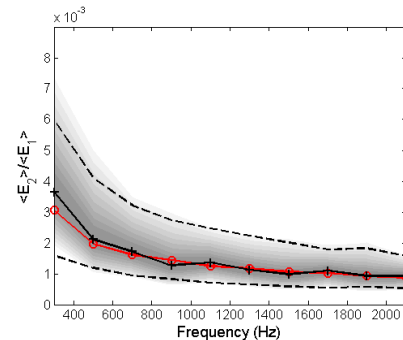


Figure (11). Rapport des énergies du sous système récepteur (cavité) et du sous système excité (plaque) en fonction de la fréquence

5 Conclusion

Le comportement vibro-acoustique des systèmes assemblés, présente souvent un comportement hypersensible ce qui conduit des structures voisines à avoir des champs vibratoires fort différents. L'analyse du comportement de ces structures est alors difficile à faire. Une façon de réduire la variabilité du comportement consiste à utiliser l'énergie vibratoire et une excitation sur une bande de fréquence.

La SEA décrit les énergies de sous systèmes couplés pour des excitations large bande de fréquences, elle correspond donc à la problématique de réduction des variations de réponses vibratoires. Quand on a une population de structures voisines le phénomène d'hypersensibilité joue différemment sur chacune d'entre elles et une dispersion est observée. Ce même phénomène apparaît aussi sur une seule structure dont les conditions de référence varient (température, efforts statiques). Il est donc intéressant dans ce cas de contrôler la dispersion du résultat et pas uniquement de donner un résultat de la structure nominale.

La SEA floue qui est présentée dans ce papier, donne une réponse à ces questions. Elle est basée sur une analyse SmEdA, extension de la SEA classique quand l'hypothèse d'équipartition des énergies modales est supprimée. La SEA apparaît alors comme un modèle, où les facteurs de pertes interne et par couplage, qui la caractérisent, varient avec l'hétérogénéité des énergies modales. On peut borner les valeurs des facteurs de pertes interne et par couplage, à partir de données obtenues sur le cas nominal et donc à partir d'un seul calcul.

Cette incertitude peut être appréhendée grâce aux nombres flous, conduisant à la SEA floue. Les résultats obtenus, confrontés à ceux issus des calculs sur la population entière sont tout à fait satisfaisants.

Références

[1] Guyader J-L, Maxit L and Totaro N. Fuzzy Sea to describe the vibroacoustics of populations of structures. Submitted for publication.

[2] Rebillard E. et Guyader J-L. Vibrational behaviour of a population of coupled plates: hypersensitivity to the connection angle. JSV(1995)188(3)pp435-454

[3]