

CFA/VISHNO 2016

Conception de Bandes Interdites Robustes pour les Structures Périodiques UnidimensionnellesL. Rodrigues Cunha^a, D. Alves Rade^b et M. Ouisse^a^aInstitut FEMTO-ST/Département Mécanique Appliquée/UFC, 24, chemin de l'épître, 25000 Besançon, France^bITA - Institut Technologique de l'aéronautique, 50, Praça Mal. Eduardo Gomes, 12228-900 São José Dos Campos - Sp, Brésil
leandro.cunha@femto-st.fr

LE MANS

Les incertitudes sont présentes dans tous les types de structures, elles peuvent réduire la fiabilité de fonctionnement et cela peut conduire à un état de défaillance. Le but, pour une structure périodique, est d'atténuer des vibrations dans une bande de fréquences choisie, afin d'agir comme un filtre mécanique. Ces bandes interdites sont, en pratique, conçues à partir de modèles basés sur une résolution du problème à l'échelle de la cellule unitaire utilisant des conditions limites adéquates pour représenter le comportement ondulatoire de la structure périodique. Dans notre cas, la méthode des éléments finis est utilisée pour discrétiser la géométrie de la cellule unitaire, et les paramètres physiques et géométriques les plus influents sur le diagramme de bande sont déterminés par analyse de sensibilité. Ces paramètres sont sélectionnés pour l'analyse de robustesse : une simulation de Monte Carlo avec échantillonnage Hypercube Latin est réalisée à l'échelle de la structure finie, permettant de faire le lien avec les diagrammes de bande déterminés en structure infinie, et de disposer *in fine* d'une structure possédant des bandes interdites robustes.

1 Introduction

Depuis longtemps, les chercheurs utilisent les modèles périodiques pour résoudre des problèmes de physique. Ainsi, selon Brillouin [10], Isaac Newton [7] a été le premier à étudier les structures périodiques pour déterminer la vitesse du son dans l'air en utilisant un système masse-ressort.

En raison du grand potentiel de l'insertion de périodicités dans les structures, aussi appelées méta-structures, les équipes de recherche ont beaucoup investi dans ce type de développements et le nombre de publications a considérablement augmenté au cours des dernières années.

Cet intérêt est expliqué notamment grâce à certaines propriétés inhabituelles liées à la dispersion des ondes sonores, des vibrations dans un milieu solide [9], des ondes magnétiques ou même des ondes lumineuses. De plus, certaines études portant sur les coefficients de réfraction négatives indiquent la possibilité de produire des effets de "cloaking" (camouflage), déviations dans les trajets de propagation, montrant un grand potentiel pour la réduction des bruits et le contrôle de vibrations, avec des applications comme la protection des bâtiments pendant les tremblements de terre [2].

Les périodicités structurelles induisent des interactions ondulatoires qui peuvent créer des interférences constructives ou destructives. Différentes concentrations ou même l'absence de masse ou de rigidité forment des "filtres mécaniques" qui permettent ou non le passage des ondes dans certaines bandes de fréquences. Ces bandes sont appelées bandes de fréquences interdites.

Ces derniers temps, plusieurs chercheurs ont fait des contributions importantes [3, 17, 12 et 14] sur ce sujet. Cependant, on note un nombre très faible de contributions sur l'influence d'incertitudes dans les structures périodiques. Comme tout type de structure, ces systèmes sont inévitablement sujets à la présence d'incertitudes dans les paramètres physiques et géométriques [1]; il est donc important d'en tenir compte dans les modèles d'étude.

Alors, cet article propose une méthode permettant la détermination de bandes interdites robustes aux incertitudes conformément aux niveaux pris en compte de celles-ci.

2 Méthodologie

Parmi les techniques de simulation de structures périodiques, on peut distinguer celles associées aux structures finies et celles associées aux structures infinies. Pour les structures finies, un modèle aux éléments finis peut être créé pour la structure complète et, ainsi, on peut décrire le comportement des bandes interdites. La difficulté réside

alors dans le nombre d'éléments nécessaires pour obtenir une réponse précise associée à une convergence rapide. On présente plus loin dans l'article une méthode permettant de caractériser la largeur du *band-gap* à partir de ces simulations.

Dans la deuxième considération, des conditions limites adéquates de Floquet/Bloch [6, 5] sont prises en compte pour une cellule unitaire que se répète à l'infini.

2.1 Cellule unitaire

La cellule unitaire du type barre unidimensionnelle considérée est présentée dans la Figure 1.

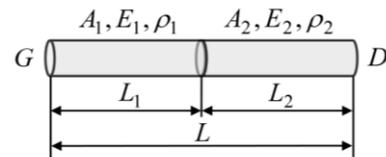


Figure 1 – Exemple de cellule unitaire.

Les variables A_i , E_i , ρ_i et L_i définissent respectivement l'aire de section, le module d'Young, la densité et la longueur du segment i de la cellule et L sa longueur totale. Les équations (1) et (2) représentent, respectivement, les conditions de continuité et d'équilibre à gauche (G) et à droite (D) de la cellule unitaire n . Selon le théorème de Floquet/Bloch [6, 5] :

$$u_D^{(n)} = u_G^{(n+1)} = e^{\mu} u_G^{(n)}, \quad (1)$$

$$f_D^{(n)} = -f_G^{(n+1)} = -e^{\mu} f_G^{(n)}, \quad (2)$$

où μ est la constante de propagation. Cette variable a une partie réelle (δ) et une partie imaginaire (ε) comme indiqué dans l'équation (3) :

$$\mu = \delta + j\varepsilon. \quad (3)$$

Ces conditions aux limites peuvent être utilisées dans un modèle aux éléments finis d'une cellule unitaire. Pour plus de détails, se référer à [3, 17].

2.2 Élément fini de barre

L'élément fini de barre unidimensionnel utilisé est présenté dans Figure 2.

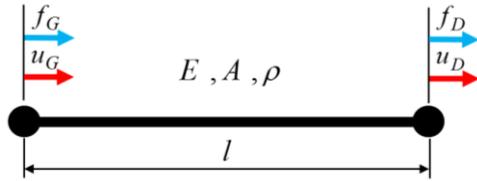


Figure 2 – Représentation de l'élément fini de barre utilisé.

Les degrés de liberté et les efforts pour cet élément peuvent être décrits selon les équations suivantes:

$$U = \begin{Bmatrix} u_G \\ u_D \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

$$F = \begin{Bmatrix} f_G \\ f_D \end{Bmatrix}. \quad (5)$$

Pour ce type d'élément, les matrices de raideur et masse distribuée au niveau élémentaire sont modélisées selon une approche linéaire pour les champs de déplacements:

$$K^{(e)} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$M^{(e)} = \frac{\rho Al}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Après assemblage des matrices globales de raideur ($K^{(g)}$) et masse ($M^{(g)}$), les équations du mouvement dans le domaine du temps et de la fréquence, respectivement, sont obtenues sous la forme:

$$M^{(g)}\ddot{U}(t) + K^{(g)}U(t) = F(t), \quad (8)$$

$$[K^{(g)} - \omega^2 M^{(g)}]U(\omega) = F(\omega). \quad (9)$$

La matrice de flexibilité dynamique est décrite par l'Eq. (10).

$$H(\omega) = [-\omega^2 M^{(g)} + K^{(g)}]^{-1}. \quad (10)$$

À partir de l'Eq. (9), en utilisant les conditions aux limites (1) et (2), on obtient :

$$[K^{(r)}(\mu) - \omega^2 M^{(r)}(\mu)]u^{(r)}(\mu) = 0, \quad (11)$$

où les matrices de raideur et masse réduites, indiquées par (r) , sont obtenues en utilisant les conditions de périodicité. Pour les courbes de dispersion, il suffit de résoudre le problème aux valeurs propres associés à l'Eq. (11). La Figure 3.b montre la partie imaginaire d'une courbe de dispersion. L'amortissement n'est pas considéré dans ces modèles.

2.3 Analyse de convergence

Les Figures 3.a et 3.b présentent la convergence pour une structure finie et pour une structure infinie, respectivement.

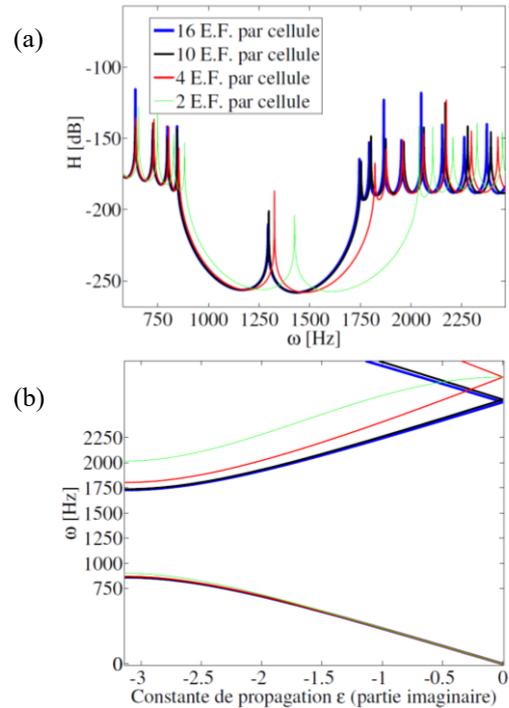


Figure 3 – Convergence du maillage d'éléments finis pour la cellule unitaire (a) structure finie, (b) structure infinie.

On observe, que sur les cas testés, au-delà de 10 éléments finis, les limites et la largeur de la bande de fréquence interdite ne changent pas significativement.

2.4 Nombre de cellules unitaires pour la structure finie

La mise en application des concepts observés sur structures finies dans le cadre de structures finies requiert la présence d'un certain nombre de cellules unitaires pour être efficace. On s'intéresse ici à l'analyse du nombre de cellules unitaires permettant d'observer les phénomènes de bandes interdites. La Figure 4 présente les fonctions de réponse en fréquence d'un modèle aux éléments finis d'une structure périodique lorsque le nombre de cellules varie.

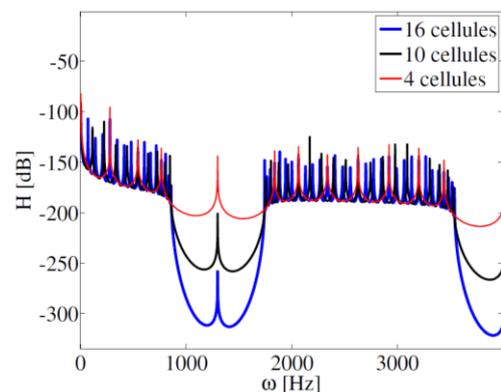


Figure 4 – Nombre de cellules unitaires pour obtenir un *band-gap* observable.

Par la suite, on utilise 10 cellules, qui sont suffisantes pour représenter la bande interdite.

2.5 Analyse de sensibilité en structure infinie

L'analyse de sensibilité permet de déterminer les paramètres par rapport auxquels les réponses d'intérêt sont plus sensibles.

On se propose ici d'analyser les influences des paramètres sur les caractéristiques dynamiques suivantes:

- la limite inférieure de la bande interdite (L.I.):

$$q_1(x) = \omega_{LI} , \quad (12)$$

- la limite supérieure de la bande interdite (L.S.):

$$q_2(x) = \omega_{LS} , \quad (13)$$

- et la largeur de la bande interdite:

$$q_3(x) = \omega_{LS} - \omega_{LI} . \quad (14)$$

Dans la Figure 5, les paramètres d'entrée, denotés par x_j ($j=1, 2$ ou 3), sont les propriétés A , E ou ρ du tronçon 1, respectivement. Ils ont été variés de 0 % à 200 %. Pour la valeur normalisée, égale à 1, la structure n'est pas périodique et, par conséquent, les limites inférieure et supérieure ont les mêmes valeurs et la bande de fréquence est nulle.

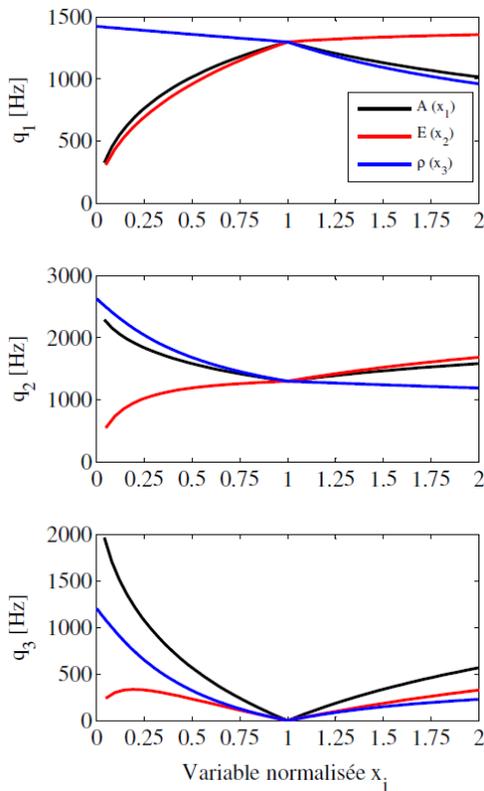


Figure 5 – Variations paramétriques des sorties d'intérêt pour la cellule unitaire considérée.

L'équation (15) définit la sensibilité selon la méthode des différences finies :

$$\Phi_i(x_j) = \frac{q_i(x_j) - q_i(x_j - \Delta x_j)}{\Delta x_j} , \quad (15)$$

avec $i=1, 2$ ou 3 pour la réponse désirée q_i . Dans cette étude, on ne calcule que la sensibilité locale, c'est-à-dire, on fait varier successivement une des variables et on maintient les deux autres variables constantes [8]. Ces grandeurs sont tracées sur la Figure 6.

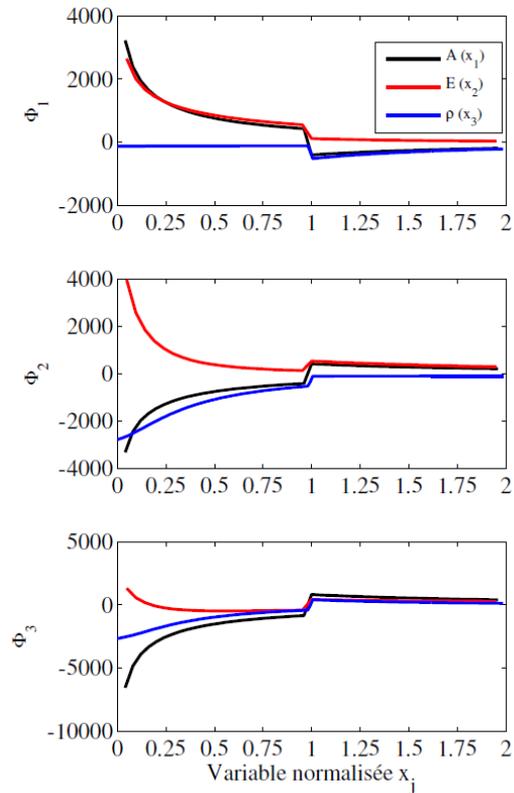


Figure 6 – Sensibilités au premier ordre des sorties d'intérêt pour la cellule unitaire considérée.

De manière générale, il est possible de voir que la largeur de la bande de fréquence interdite est plus sensible aux variations d'aire de section qu'aux du module d'Young et de la densité pour ce modèle.

2.6 Simulation de Monte Carlo

La simulation de Monte Carlo [1, 13 et 15] est une méthode qui consiste à produire des échantillons pour une variable considérée aléatoire en utilisant une densité de probabilité prédéfinie pour la représenter.

L'échantillonnage par hypercube latin a été utilisé dans cet article pour diminuer le temps de convergence de la simulation. Pour plus d'information voir [19].

3 Exemple numérique

3.1 Cellule unitaire considérée

Dans ce travail, l'aire de section (A_j) est considérée comme une variable stochastique. Ce choix est justifié grâce à l'analyse de sensibilité dont les courbes sont

présentées dans la Figure 6. La Figure 7 rappelle la géométrie de la cellule unitaire.

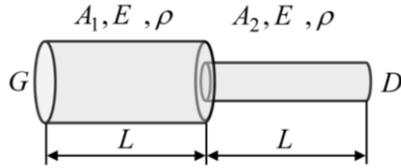


Figure 7 – Cellule unitaire utilisée.

Le Tableau 1 indique les propriétés des segments 1 et 2 de la cellule unitaire considérée dans l'exemple numérique.

Tableau 1 – Propriétés de la cellule unitaire.

Propriété	Unité	Cellule unitaire	
		Segment 1	Segment 2
Matériau	[-]	Acier	Acier
E	GPa	2,1e11	2,1e11
ρ	kg/m ³	7860	7860
L	m	1	1
A	m ²	0,0075	0,0025

Les Figures 3.a et 3.b représentent la convergence du maillage pour la cellule unitaire utilisée dans une structure finie et dans une structure infinie, respectivement. Il est possible d'observer qu'avec 10 éléments finis, les limites et la largeur de la bande interdite varient légèrement comparé à la cellule avec 16 éléments finis.

La Figure 4 montre qu'avec 10 cellules le modèle de 10 éléments finis est assez précis pour identifier le *band-gap* et exécuter la simulation de Monte Carlo.

3.2 Prise en compte d'incertitudes

Les variables considérées comme incertaines sont représentées par des densités de probabilité normales. Le Tableau 2 fournit les paramètres des variables considérées stochastiques.

Tableau 2 – Incertitudes considérées dans le modèle.

Variable	Distribution	Moyenne (μ)	Écart-type (σ)	
X_m	A_l (m ²)	Normal	0,0075	$\gamma \times \mu$

On considère les deux cas suivants :

- pour m égal à 1, l'incertitude dans la cellule unitaire est répétée sur chaque cellule de la structure (qui reste donc périodique) ;
- pour m égal à 10, les 10 cellules sont indépendantes du point de vue de l'incertitude (la structure n'est donc plus parfaitement périodique).

L'équation suivante présente le coefficient de variation γ permettant de faire varier le niveau d'incertitude, donnée par l'écart-type (σ_A), par rapport à la moyenne considérée (μ_A), selon :

$$\sigma_A = \gamma \times \mu_A . \quad (16)$$

Ce paramètre a été varié de 2 % à 16 % dans cette étude, avec un pas de 2 %.

Ensuite, pour chaque valeur de γ considérée, une simulation de Monte Carlo a été lancée jusqu'à sa convergence (nombre de tirages d'environ 5000).

Les inéquations (17) définissent les intervalles de confiance d'une variable pour une loi normale. Pour avoir un intervalle de 95% [15], la valeur de k doit être égale à 1,96.

$$\mu_{q_i} - k\sigma_{q_i} < \mu_{q_i} < \mu_{q_i} + k\sigma_{q_i} . \quad (17)$$

Dans les Figures 8.a et 8.b, les points rouges illustrent les limites inférieures (L.I.) et supérieures (L.S.) pour une structure finie et pour une structure infinie, respectivement.

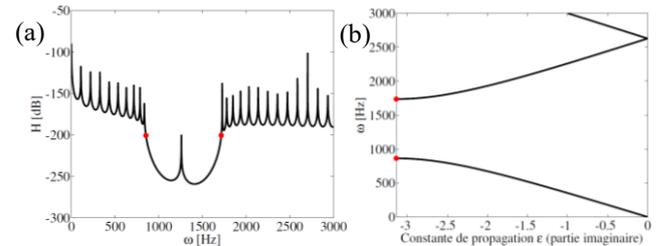


Figure 8 – Limite inférieure et limite supérieure pour les modèles (a) fini et (b) infini.

4 Résultats

La Figure 9 montre la variation des bandes de fréquence interdites pour les trois cas considérés : structure infinie avec une incertitude périodique, structure finie avec une incertitude périodique et structure finie avec dix incertitudes différentes (structure quasi périodique).

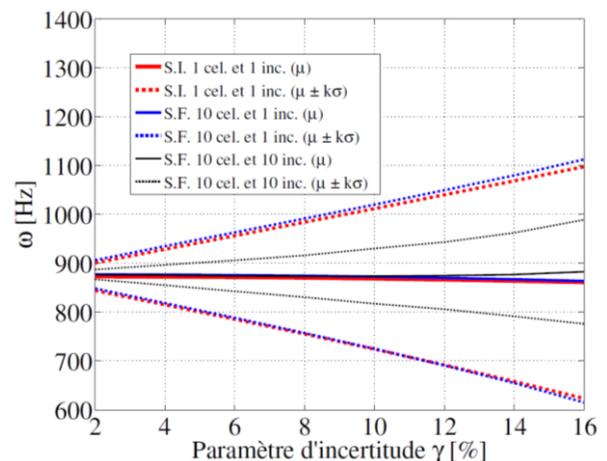


Figure 9 – Intervalle de confiance pour la bande interdite.

Il est possible de constater que la largeur de la bande interdite varie de façon quasi linéaire conformément à l'augmentation de l'incertitude. Dans les cas avec une incertitude, par exemple, pour chaque 1 % d'incertitude, la largeur de la bande interdite change d'environ 15 Hz.

Si l'on considère une incertitude de 16 % pour l'aire de section droite, la bande interdite robuste (bande interdite quasi certaine prenant en considération ces incertitudes géométriques) sera l'aire grise considérée dans la figure suivante:

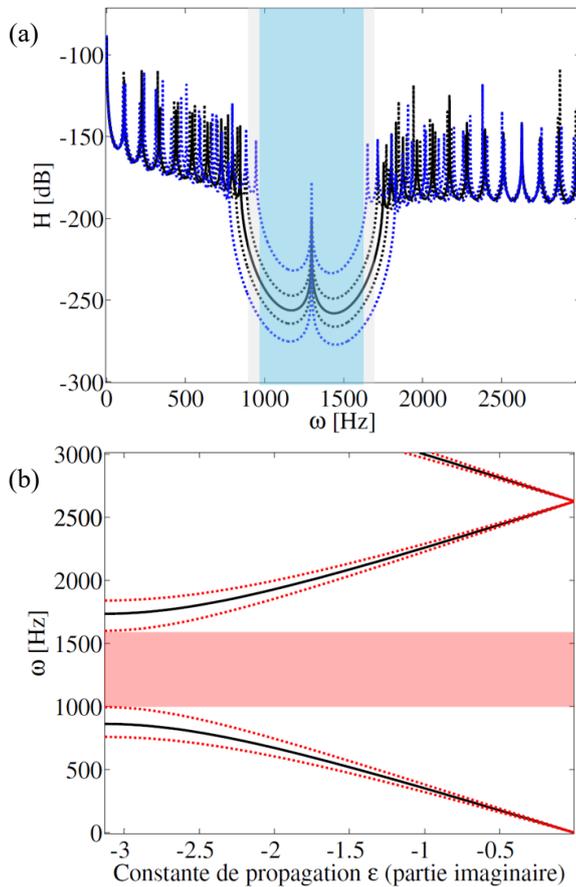


Figure 10 – Bande interdite robuste avec $\gamma = 16\%$ pour (a) S.F avec m égal a 1 et a 10 et (b) S.I. avec m égal a 1.

Les aires bleu clair et rouge clair indiquent que la bande de fréquence interdite calculée avec une seule variable aléatoire est moins large que celle en gris clair qui a été obtenue avec dix variables aléatoires. Ainsi, lorsqu'une incertitude est considérée pour chaque cellule d'une structure finie, ce qui correspond aux cas réels, les effets sur les réponses se compensent et la structure devient plus robuste.

5 Conclusion

Une structure simple périodique unidimensionnelle a été utilisée comme exemple numérique. Cette structure a été discretisée par éléments finis de barre avec 2 degrés de liberté par noeud.

Une analyse de sensibilité a été réalisée pour montrer que l'aire de section droite est, de manière générale, le paramètre le plus influent sur les caractéristiques de la bande interdite.

Un nombre de cellules égal à 10 a été choisi pour la structure finie de façon à obtenir une localisation fiable de la zone de fréquences interdites sans augmenter substantiellement le coût de calcul.

Une analyse d'incertitudes a été effectuée en utilisant les modèles fini et infini de cette structure. L'aire de section droite a été choisie comme variable aléatoire avec une densité de probabilité gaussienne ayant une moyenne et un écart-type comme paramètres prédéfinis. Un coefficient de variation γ a été spécifié de manière à faire varier l'écart-type comme un pourcentage de la moyenne. Diverses simulations de Monte Carlo ont été menées jusqu'à aux convergences pour chaque valeur du coefficient de variation pris en compte.

Les résultats obtenus pour les modèles des structures finie et infinie avec une seule variable stochastique sont légèrement différents. Ces résultats ne sont pas complètement fiables puisque la même incertitude se répète indéfiniment pour la structure infinie et dix fois pour la structure finie avec dix cellules.

Les intervalles de confiance obtenus pour la structure finie avec dix variables stochastiques sont moins larges que ceux trouvés avec une variable aléatoire et représentent de façon plus crédible la réalité. Finalement, une bande interdite robuste plus fidèle a été obtenue.

Remerciements

Les auteurs sont reconnaissants au Conseil National de recherches du Brésil – CNPq et à l'Institut National des Sciences et Technologie des Structures Intelligentes en Ingénierie INCT-EIE, pour le soutien financier à leurs travaux de recherche. Ce travail a été réalisé dans le cadre du projet ANR-12-JS09-008-COVIA, en coopération avec le Labex ACTION (ANR-11-LABX-0001-01).

Références

- [1] A. Haldar; S. Mahadevan. *Probability, reliability and statistical methods in engineering design*. New York: John Wiley & Sons, Inc. 304 p. (2000).
- [2] B. Banerjee, *An Introduction to Metamaterials and Waves in Composites*. CRC Press. New York (2011).
- [3] D. J. Mead, Wave Propagation in continuous periodic structures: Research contributions from Southampton, 1964-1995. *Journal of Sound and Vibration*, v. 190, n. 3, p. 243-268. (1996).
- [4] D. M. Frangopol. Sensitivity studies in reliability-based analysis of redundant structures. *Structural Safety*. v. 3; p. 13-22, (1985).
- [5] F. Bloch, Über die quantenmechanik der elektronen in kristallgittern. *Zeitschrift für Physik*, v. 52, n. 7-8, p. 555-600. (1929).
- [6] G. Floquet, *Sur les équations différentielles lineaires à coefficients périodiques*. Annales scientifiques de l'ENS, v.12, n. 1, p. 47-88. (1883).
- [7] I. Newton, *Principia Book II*, Imprimatur S. Pepys, Reg. Soc. Praeses, London. (1686).
- [8] J.L. Christen, M. Ichchou, B. Troclet, O. Bareille, M. Ouisse, Global sensitivity analysis of analytical

- vibroacoustic transmission models. *Journal of Sound and Vibration*, 368:121–134. (2016).
- [9] K. F. Graff, *Wave Motion in Elastic Solids*. Dover Publications Inc. New York. (1975).
- [10] L. Brillouin, *Wave Propagation in Periodic Structures*. Dover. (1946).
- [11] M. Collet, M. Ouisse, M. Ruzzene et M. N. Ichchou, Floquet-bloch decomposition for the computation of dispersion of two-dimensional periodic, damped mechanical systems. *International Journal of Solids and Structures*, v. 48, n. 20, p. 2837–2848. (2011).
- [12] M. I. Hussein, M. J. Leamy, M. Ruzzene, Dynamics of Phononic Materials and Structures: Historical Origins, Recent Progress, and Future Outlook, *ASME*, v.66. (2014).
- [13] M. Lemaire, *Structural reliability*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 488 p. (2009).
- [14] M. Ruzzene, M. F. Scarpa, Control of Wave Propagation in Periodic Sandwich Beams. *Journal of Intelligent Materials and Structures*, v. 14, p. 443-453. (2003).
- [15] R. Melchers, *Structural reliability: analysis and prediction*. 1. Ed. London, U.K.: Ellis Horwood Limited 400 p. (1987).
- [16] R. M. Mace, E. Manconi, Modelling wave propagation in two-dimensional structures using finite element analysis. *Journal of Sound and Vibration*. v. 318, p. 884-902. (2008).
- [17] R. Orris, M. Petyt, A finite element study of harmonic wave propagation in periodic structures. *Journal of Sound and Vibration*, v. 33, n. 2, p. 223-236. (1974).
- [18] S. Gonella, M. Ruzzene, Homogenization of vibrating periodic lattice structures. *Applied Mathematical Modelling*. v. 32, p. 459-482. (2008).
- [19] S. K. Choi; R. V. Grandhi, R. A. Canfield, *Reliability-based structural design*. London: Springer-Verlag, 306 p. (2007).