

# CFA/VISHNO 2016

## Mise en œuvre de la méthode des modes de résonance pour modéliser le comportement dynamique des structures industrielles

L. Zoghaib et B. Petitjean

Airbus Group Innovations, 12 rue Pasteur, 92150 Suresnes, France  
lionel.zoghaib@airbus.com



LE MANS

La prise en compte de l'amortissement dans les structures industrielles requiert aujourd'hui une bonne appréhension des sources locales, notamment associées aux jonctions. Outre les difficultés particulières liées à leur mesure, leur identification et leur modélisation locale, elles rendent les prédictions dynamiques globales plus difficiles, en poussant dans leurs retranchements les techniques habituelles de superposition modale sur la base des modes normaux. La théorie des modes de résonance a été élaborée dans les années 90 pour pouvoir prendre en compte la dépendance à la fréquence dans les équations du rayonnement structurel. Elle a été introduite plus récemment en dynamique des structures pour modéliser les élastomères. Elle conduit à une généralisation exacte de l'approche modale aux configurations de dissipation linéaire les plus variées (amortissement inhomogène, viscoélastique). Outre l'éclairage théorique qu'elle procure, sa mise en œuvre offre en basses fréquences une alternative numérique séduisante, à la fois précise et rapide, aux méthodes directes. Ces caractéristiques en ont fait une candidate de choix à un développement logiciel plus poussé dont Airbus Group Innovations a pris l'initiative, en s'appuyant sur le code industriel Nastran. Ce papier illustre la mise en œuvre au travers d'une étude portant sur l'introduction d'un traitement en élastomère contraint sur un panneau en composite représentatif d'un fuselage d'avion. L'algorithme final permet d'extraire un certain nombre de données, en particulier celles de l'amortissement modal, dont la connaissance permet d'améliorer significativement la conception de systèmes isolants et amortissants.

## 1 Introduction

Les thématiques associées à la dynamique des structures ou à l'acoustique, en aéronautique, sont foisonnantes : on peut citer les vibrations non-linéaires, l'analyse des matériaux, des jonctions ou encore celle des couplages physiques à l'origine de la dissipation par transduction, pour n'en citer que quelques-unes relatives à l'étude particulière de l'amortissement. Dans une perspective d'exploitation à relatif court-terme de ces thématiques, dans un contexte industriel, une démarche pragmatique consiste à les appréhender sous des angles différents tels que celui de la modélisation ou de la caractérisation expérimentale. Un préalable à cette approche globale concerne le choix d'outils numériques adaptés. Suivant le contexte, certaines qualités logicielles peuvent prévaloir, à savoir

- la performance,
- la nature « standard »,
- la souplesse,

de l'outil. La pondération de ces qualités peut varier sensiblement suivant le domaine ou la culture des personnes en charge du projet et déboucher ainsi sur des choix particuliers. D'autres prérogatives propres au milieu industriel peuvent également entrer en ligne de compte. La question de la valorisation du travail scientifique et numérique, notamment, est récurrente dans les centres de recherche industriels tels qu'Airbus Group Innovations – centre de recherche centralisé d'Airbus, Airbus Defence and Space, Airbus Helicopters–. L'objet de ce manuscrit est de présenter, dans le cadre de la modélisation vibratoire des matériaux viscoélastiques, la réflexion ayant présidé au choix d'un développement interne de la méthode des modes de résonance, en s'appuyant sur le code industriel Nastran. Le manuscrit se décompose en trois parties. La méthode des modes de résonance est tout d'abord introduite ; la justification de son choix, pour le champ d'application visé, est formulée. Les questions de faisabilité et de mise en œuvre sont ensuite abordées dans une deuxième partie. Enfin, l'utilisation du programme final est illustrée dans une dernière partie ; l'exemple présenté concerne la simulation de la réponse vibratoire d'un panneau en composite représentatif du fuselage d'un avion, recouvert d'un traitement en élastomère contraint.

## 2 Genèse du projet

### 2.1 Un manque logiciel

Le domaine des vibrations demeure particulièrement actif, aussi bien sur le plan académique qu'industriel, du fait des difficultés nombreuses auxquelles les scientifiques sont encore confrontés. L'une de ces difficultés est relative à la bonne prise en compte de l'amortissement et de la dépendance en fréquence des matériaux (poreux, élastomères). On pourrait ajouter à cela la dépendance à la fréquence liée aux phénomènes de couplage comme en vibroacoustique. Les difficultés associées à cette dépendance concernent :

- Le calcul rapide de la réponse fréquentielle/temporelle
- La caractérisation de l'amortissement des structures complexes

Les deux tâches sont étroitement corrélées, dans la mesure où la détermination des propriétés matériau requiert très souvent une approche par résolution indirecte, c'est-à-dire en confrontant les résultats –notamment de réponse– d'un modèle numérique aux données expérimentales. C'est le cas des matériaux dont les propriétés changent au cours du procédé de fabrication (cas des élastomères contraints, par exemple) ou des propriétés dont la nature est structurale (dissipation des jonctions). Cet exercice de confrontation permet en outre d'analyser en détail l'outil numérique, et, *in fine*, d'en améliorer les qualités.

Bien qu'il soit difficile de réaliser une analyse critique détaillée de l'ensemble des outils numériques disponibles actuellement pour le calcul des structures, on peut constater que les codes industriels standards souffrent de lacunes ne permettant pas d'appréhender le problème dans sa globalité. Nastran, très apprécié pour simuler le comportement des structures complexes, et de fait largement employé dans l'aéronautique, en est un bon exemple. Deux possibilités sont offertes pour prendre en compte la dépendance à la fréquence :

- Le calcul de la réponse directe
- Le calcul de la réponse modale

La première option ne permet la prise en compte que d'un seul matériau viscoélastique. Le reste de la structure, de plus, doit avoir un amortissement constant : il est donc tout à fait impossible de modéliser un objet complexe en l'état. Il est néanmoins possible de contourner le problème en préparant un calcul par pas fréquentiel et de recueillir l'ensemble des résultats pour tracer des spectres de réponse vibratoire. La deuxième option est restreinte aux éléments monodimensionnels tels que les amortisseurs à viscosité constante. Au-delà des questions de dépendance à la fréquence, la modélisation des structures à amortissement non proportionnel ne permet pas d'avoir une approche globale et cohérente non plus. La résolution du problème aux valeurs propres complexes, en effet, utile aux problématiques de caractérisation matériau, n'est pas associée au calcul de réponse vibratoire, qu'elle soit directe, ou modale (car seule la base des modes réels est utilisée).

Malgré les limites actuelles, Nastran représente un outil standard incontournable : il serait hasardeux de reproduire un modèle élément fini complexe, construit en respectant les règles d'un processus certifié, dans un code alternatif, aussi performant soit-il. Le choix numérique a donc été fait d'étendre les capacités de Nastran en préservant ses qualités premières (compatibilité avec les modèles existants, performance), par le biais d'une méthode dont l'introduction est envisageable pour un effort modéré.

## 2.2 Le choix de la méthode des modes de résonance

Le choix d'une méthode susceptible d'étendre les capacités de Nastran s'est porté sur la méthode des modes de résonance, pour des raisons à la fois historiques, liées à l'expérience de l'équipe, et techniques. L'idée fondatrice de la méthode consiste à considérer les modes de résonance, qui sont les modes observés expérimentalement. Elle se distingue donc des méthodes modales traditionnelles, qui privilégient plutôt une base orthogonale (base des modes normaux).

L'un des grands avantages de la méthode des modes de résonance concerne l'aide à la compréhension de certains phénomènes expérimentaux, notamment celui de transformation de la base modale. Cette transformation peut être liée à l'amortissement non proportionnel (modes complexes) ou à la dépendance fréquentielle (glissement de la fréquence des modes, variation de l'amortissement). Le deuxième avantage concerne la réponse globale et cohérente de la méthode aux problématiques de calcul de réponse fréquentielle (ou temporelle) et de caractérisation matériau.

Son formalisme provient des travaux de Filippi *et al* [1] dans le cadre du rayonnement des structures. Les équations de la dynamique peuvent se reformuler dans le domaine fréquentiel avec le paramètre de Laplace  $s = i\omega$ , sous la forme du problème aux valeurs propres complexe et dépendant de la fréquence suivant :

$$[s_k^2(s)M + K(s)]u_k(s) = 0 \quad (1)$$

Où  $M$  est la matrice de masse,  $K(s)$  la matrice de rigidité complexe et dépendante à la fréquence,  $u_k(s)$  le  $k^{\text{ème}}$  vecteur propre et  $s_k^2(s)$  associée à la  $k^{\text{ème}}$  valeur propre. On observe que la base modale complexe dépend de la fréquence. Les modes sont orthogonaux et le déplacement modal peut être écrit  $w(s)$  comme suit:

$$w(s) = \sum_k^N \frac{u_k^T(s)[F(s) + sI_0 + V_0]}{s^2 - s_k^2(s)} u_i(s) \quad (2)$$

où  $F(s)$  est le vecteur force d'excitation,  $I_0$  et  $V_0$  sont les vecteurs de condition initiale en déplacement et en vitesse, respectivement. L'information temporelle détaillée est incluse dans cette expression, notamment les phénomènes transitoires. Le calcul de la réponse à partir de cette expression est plus coûteux que le calcul direct : il faut en effet calculer une nouvelle base modale pour chaque point de l'axe fréquentiel.

Le développement théorique de la méthode des modes de résonance s'appuie sur cette équation. En utilisant la transformée intégrale inverse de Mellin-Fourier (ou formule de Bromvitch), la solution temporelle peut s'exprimer sous la forme d'une somme de résidus. Les racines simples du dénominateur, notés  $\hat{s}_k$ , sont estimées à partir du calcul de limite suivant, autrement appelé problème des valeurs de résonance :

$$\lim_{s \rightarrow s_k} [s_k^2(s)M + K(s)]u_k(s) = [\hat{s}_k^2 M + K(\hat{s}_k)]\hat{u}_k = 0 \quad (3)$$

Ce problème ressemble beaucoup au problème aux valeurs propres classique. Sa résolution conduit à l'obtention des valeurs  $\hat{s}_k^2$  et vecteurs  $\hat{u}_k$  de résonance. Ces couples de résonance sont égaux aux couples propres dans le cas où il n'y a pas de dépendance à la fréquence. Sinon, ils forment une base non orthogonale, grâce à laquelle la réponse fréquentielle peut s'écrire ainsi :

$$w(s) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left\{ \begin{array}{l} \hat{u}_k^T \frac{\Phi \Psi(s) + \hat{s}_k I_0 + V_0}{\hat{s}_k (s - \hat{s}_k)} \hat{u}_j \\ + \\ \bar{\hat{u}}_k^T \frac{\Phi \Psi(s) + \hat{s}_k I_0 + V_0}{\hat{s}_k (s - \bar{\hat{s}}_k)} \bar{\hat{u}}_j \end{array} \right\} \quad (4)$$

### 3 Faisabilité et mise en œuvre

La mise en œuvre de la méthode des modes de résonance pour le problème de dynamique amortie nécessite :

- un solveur aux valeurs propres complexes
- une stratégie de recherche des modes de résonance (et les routines numériques associées)

Différentes options sont possibles à cet effet. Les approches itérative, par perturbation ou par combinaison des deux sont présentées dans la référence [2]. Une approche plus récente, efficace sur une large bande fréquentielle et donc bien adaptée à la vibroacoustique, est décrite dans la référence [3]. Dans le cas d'un développement industriel, l'approche par perturbation semble la plus appropriée, car

- sa mise en œuvre est plus simple et *a priori* moins intrusive
- elle est numériquement plus efficace

L'inconvénient est son niveau d'approximation, dont la connaissance pratique nécessite une certaine expérience. La précision peut en effet se dégrader dans le cas où la dépendance fréquentielle est très forte ou si la quantité d'éléments viscoélastiques est très importante. La perturbation devient alors trop importante pour que le niveau de précision soit acceptable.

Les objectifs de la mise en œuvre ont été formulés en termes explicites au début du projet ; le but étant de développer un outil :

- Capable d'appréhender des modèles standards
- Numériquement très efficace
- Ergonomique

Le premier impératif, ainsi que le champ d'application visé (vibroacoustique, dynamique linéaire), a orienté le choix vers le code industriel Nastran. Le deuxième impératif, quant à lui, a contribué au choix d'un développement dans le langage interne à Nastran, le langage DMAP (Direct Matrix Abstract Programming). Il s'agit d'un langage compilable similaire au Fortran.

Sa prise en main, néanmoins, est difficile : d'une part parce qu'il s'agit d'un langage démodé (pas d'allocation dynamique de mémoire, redondance de variables équivalentes au nom différent) ; d'autre part parce qu'il doit être introduit dans les routines Nastran, qu'il est donc impératif de bien comprendre. Celles-ci sont pleinement accessibles, mais leur interprétation nécessite une véritable expertise (absence de commentaires, noms de variables non explicites, programmes longs et imbriqués). De plus, l'absence d'accès direct aux matrices élémentaires rend la programmation plus complexe qu'il n'y paraît. Du fait de ces nombreuses difficultés, certains développeurs préfèrent pallier les défauts du langage en utilisant un langage tiers interagissant avec des routines en DMAP simplifiées. Mais

cette option n'a pas été retenue, tout comme celle de partage de mémoire (pour éviter l'échange d'information par fichiers interposés), pour parer au plus pressé.

Le troisième impératif d'ergonomie a toutefois nécessité l'emploi d'un langage supplémentaire, susceptible d'orchestrer l'ensemble du processus. Les tâches qui lui incombent sont :

- La lecture et l'interprétation des fichiers ascii représentatifs d'un modèle Nastran
- L'écriture de fichiers ascii représentatifs d'un modèle Nastran modifié, contenant notamment des portions de langage DMAP
- L'exécution de commandes système (pour les calculs Nastran)
- La transformation des données sorties de Nastran dans un format approprié (post-processing)

Enfin, le langage doit être efficace numériquement, multiplateforme et relativement simple d'abord. Le langage Perl s'est donc révélé être un candidat de choix car il est installé par défaut sur la plupart des systèmes d'exploitation, et est directement interprété, ce qui peut faciliter la mise en œuvre. L'inconvénient principal est son caractère ouvert.

La combinaison finale DMAP/Perl permet d'avoir un ensemble bien intégré et ergonomique, dans la mesure où la plupart des étapes sont automatisées, en particulier la soumission des calculs et l'exploitation des résultats. Le seul défaut concerne l'absence d'interface graphique. C'est la raison pour laquelle ces routines ont été complétées par quelques programmes en Matlab pour faciliter le travail de préparation de l'analyse (définition de la dépendance en fréquence, spécification du cas d'étude vibratoire, définition des options associées à la méthode des modes de résonance) et de post-traitement (observation des courbes de résultat). Les scripts Matlab ont l'avantage de pouvoir être compilés, et donc d'être à la fois protégés et exécutables sur une machine sans licence.

Malgré la complexité apparente de la procédure et de ses 3 langages, l'objectif d'ergonomie est bien atteint : dans sa version finale, l'utilisateur doit seulement préciser les éléments incontournables de l'analyse. Il doit effectuer les tâches suivantes :

- Définir les caractéristiques du matériau viscoélastique via l'interface graphique Matlab
- Fournir un modèle Nastran relatif à une analyse de modes complexes
- Exécuter le programme Perl, qui assure l'intégralité de l'orchestration du travail
- Récupérer les résultats sous la forme de fichiers Matlab exécutables, générant des courbes de résultat.

L'analyse peut s'appuyer sur deux solveurs aux valeurs propres complexes différents :

- La méthode Lanczos complexe –SOL107– (précise mais coûteuse)
- La méthode par projection de la base réelle pour réduire la taille du problème aux valeurs propres complexes –SOL110– (efficace mais éventuellement imprécise si l'amortissement est fortement inhomogène).

Nastran est sollicité à 3 reprises:

- Dans un premier temps pour résoudre le problème aux valeurs propres complexes à une fréquence donnée, pour laquelle les caractéristiques matériau ont été figées
- Ensuite pour générer la matrice de rigidité associée aux parties du modèle dépendantes de la fréquence
- Enfin, dans le calcul de la base des modes de résonance par projection puis de la réponse fréquentielle

Ces 3 calculs sont réalisés séquentiellement, coordonnés par le programme Perl qui assure l'échange des données et l'adaptation des scripts DMAP. Tout ceci assure une grande efficacité numérique; seuls les échanges par blocs de données (étapes de lecture / écriture) réduisent la rapidité, mais pourraient à terme être remplacés par un système de partage de mémoire.

## 4 Illustration numérique

### 4.1 Modèle numérique

Le cas d'un panneau en composite représentatif du fuselage d'un avion encastré et sollicité par une force ponctuelle a été étudié (Figure 1).

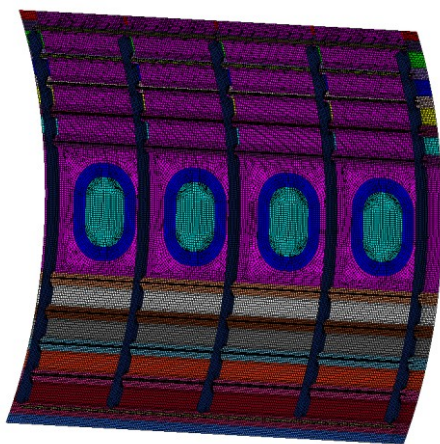


Figure 1: Panneau en composite représentatif du fuselage d'un avion, couvert par un traitement en élastomère contraint

Ce panneau a été modélisé sous Nastran à l'aide d'éléments multicouches PCOMP (102252 en tout) dans les peaux, cadres et lisses. 25 propriétés différentes ont été introduites, représentant un facteur de perte variant de 0,001 à 0,035, de façon à obtenir un amortissement non proportionnel et des modes complexes. Ces valeurs sont arbitraires mais demeurent réalistes.

Un traitement en élastomère contraint a été appliqué sur les deux tiers de l'aire du panneau (aire en magenta). L'élastomère est représenté par un matériau isotrope ( $\nu=0,48$ ,  $\rho=1100 \text{ kg/m}^3$ ) de 1 mm d'épaisseur. Ses caractéristiques de dépendance à la fréquence sont représentées dans les Figures 2 et 3. La couche contraignante de 0,5 mm d'épaisseur est modélisée par un composite en carbone avec des éléments de coque ( $\nu=0,26$ ,  $\rho=1800 \text{ kg/m}^3$ ,  $E = 250 \text{ GPa}$ ,  $\eta=0.001$ ). Ces valeurs correspondent à des valeurs réalistes, représentatives d'un traitement couramment utilisé et très performant.

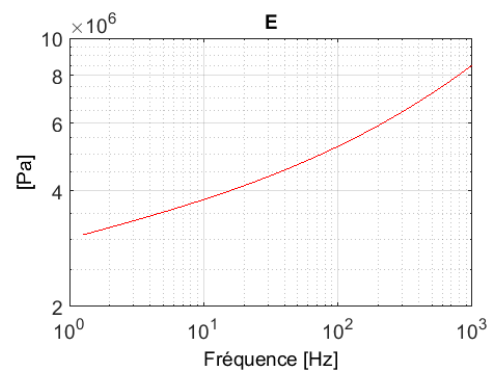


Figure 2: Module de stockage de l'élastomère

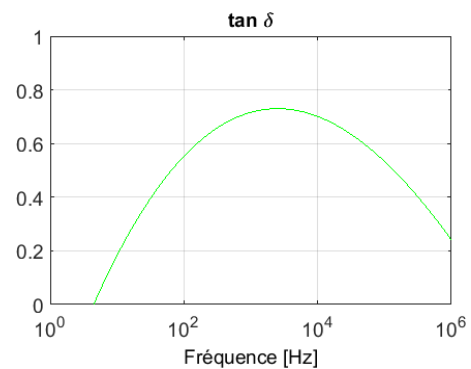


Figure 3: Facteur de perte de l'élastomère

### 4.2 Analyse réalisée

La réponse vibratoire à une sollicitation ponctuelle a été calculée sur la plage de 0 à 500 Hz, avec une résolution de 0,5 Hz pour bien estimer les amplitudes maximales. Différentes méthodes de résolution ont été considérées :

- La méthode des modes de résonance présentée, s'appuyant sur les résultats du solveur aux valeurs propres complexes de Nastran SOL107, avec calcul des valeurs de résonance par perturbation
- La méthode présentée, s'appuyant sur les résultats du solveur aux valeurs propres complexes de

Nastran SOL110, avec calcul des valeurs de résonance par perturbation

- La solution modale de Nastran (SOL111)
- La solution directe de Nastran (SOL108)

Les trois premières options s'appuient sur des caractéristiques figées au milieu du domaine (250 Hz), alors que la solution directe utilise des propriétés dynamiques différentes pour chaque pas fréquentiel. Cette dernière fournit une valeur de référence en termes de précision.

### 4.3 Résultats

Les résultats des calculs sont présentés dans la Figure 4.

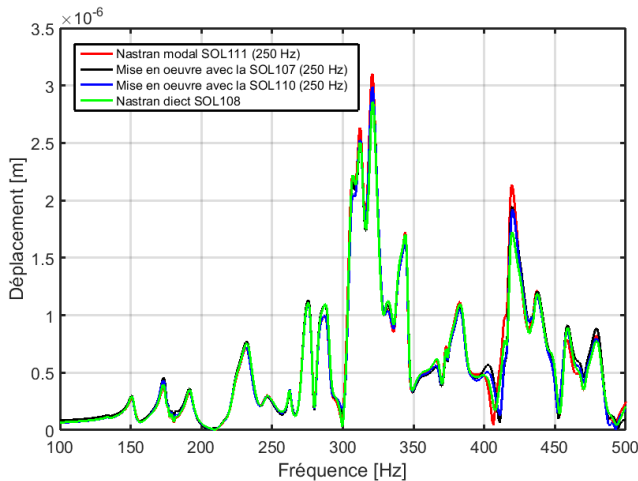


Figure 4: Comparaison de la réponse vibratoire obtenue par quatre méthodes (Nastran modal SOL111, Nastran direct SOL108, méthodes de modes de résonance basée sur la SOL107 ou la SOL110)

On constate une grande similarité des courbes, notamment des courbes de la SOL111 (Nastran modal) et SOL108 (Nastran direct), alors que seule cette dernière prend bien en compte la dépendance à la fréquence. Malgré la présence importante de traitement viscoélastique, le comportement de la structure composite, très rigide, n'est pas grandement influencé par l'élastomère. La comparaison plus précise des courbes nécessite de se focaliser sur certains pics prépondérants. La différence relative par rapport à la solution directe (SOL108) a été exprimée pour les trois plus grands d'entre eux, et est donnée dans le Tableau 1.

Pic	SOL111	MMR SOL110	MMR SOL107
<b>315.5 Hz</b>	5.2 %	0.9 %	0.1 %
<b>321.0 Hz</b>	8.5 %	4.5 %	2.4 %
<b>420 Hz</b>	23.9 %	11.2 %	12.5 %

Tableau 1: Différence d'amplitude relative entre la solution directe prise comme référence et les autres méthodes (MMR: méthode des modes de résonance).

On constate que la mise en œuvre de la méthode des modes résonance améliore la qualité de la solution. Cette amélioration est significative à 315.5 Hz près de la

fréquence à laquelle les propriétés ont été figées (250 Hz); mais elle reste importante au-delà (à 420 Hz).

Les temps de calcul associés aux quatre approches sont présentés dans le Tableau 2. On observe que le calcul direct est particulièrement lourd (3,5 minutes par point fréquentiel), alors que les méthodes modales (SOL111 ou la méthode des modes de résonance) sont bien adaptées à la configuration étudiée (densité modale assez faible et discrétisation fine). Le solveur aux valeurs propres complexes approché SOL110 permet des temps de calcul comparables à la SOL111. Le solveur plus précis SOL107 nécessite dans le cas présent 6 fois plus de temps. Un compromis précision / temps de calcul doit donc guider le choix du solveur aux valeurs propres le plus approprié.

SOL108	SOL111	MMR SOL110	MMR SOL107
58 h	21 min	29 min	3h11

Tableau 2: Comparaison des temps de calcul entre les différentes méthodes (MMR: méthode des modes de résonance).

Enfin, il est intéressant de représenter l'effet de la dépendance en fréquence au travers des résultats d'une analyse modale tels que représentés par la Figure 5. Cette représentation traduit les résultats du calcul par perturbation et permet d'observer la façon dont la fréquence et l'amortissement des modes évoluent du fait de la viscoélasticité. On note que le changement est modéré, voire absent autour de 250 Hz ; mais qu'il augmente en s'en éloignant. La dépendance en fréquence tend à augmenter la fréquence des modes et leur amortissement au-dessus de 250 Hz.

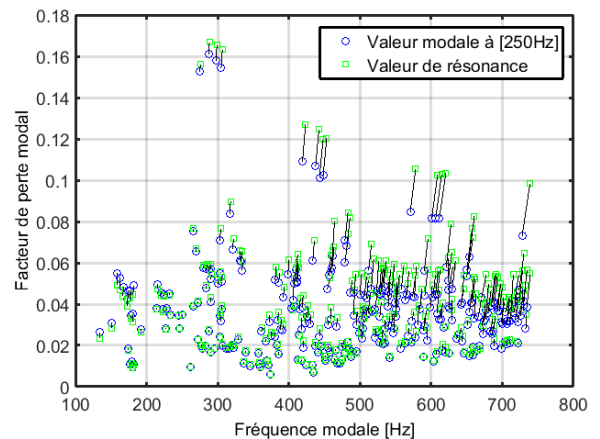


Figure 5: Comparaison des valeurs modales (à 250 Hz) et des valeurs de résonance. Résultat du calcul par perturbation.

## 5 Conclusion

Ce papier résume la stratégie de développement numérique adoptée pour mettre en œuvre la méthode des modes de résonance dans un contexte industriel. La finalité ayant présidé à ce choix est de disposer d'un outil fiable et cohérent de calcul de réponse dynamique et de

caractérisation, susceptible de prendre en compte la dépendance en fréquence des matériaux et l'inhomogénéité de l'amortissement. Les trois objectifs d'efficacité numérique, d'utilisation du code standard Nastran et d'ergonomie logicielle ont orienté la réflexion préalable vers une combinaison du langage natif DMAP pour sa rapidité, du langage Perl pour l'automatisation des tâches, et de l'interface graphique de Matlab pour le pre- et le post-traitement. Il en résulte une suite numérique robuste, capable d'appréhender des modèles industriels réalistes et de faciliter le travail de recalage des modèles ou de caractérisation des matériaux. Les prochaines étapes du développement concernent à présent la poursuite de la validation sur des configurations industrielles nouvelles et l'introduction de stratégies de recherche des modes de résonance plus raffinées, telles que celle présentée dans la référence [3].

## Références

- [1] P.J.T. Filippi, D. Habault, P.-O. Mattei, C. Maury, The role of the resonance modes in the response of a fluid-loaded structure, *Journal of Sound and Vibration* **239(4)**, 639-663 (2001).
- [2] L. Zoghaib, P.-O. Mattei, Time and frequency response of structures with frequency dependent non-proportional damping, *Journal of Sound and Vibration* **333**, 887-900 (2014).
- [3] L. Zoghaib, B. Petitjean, Accelerating the NVH design using a variant of the resonance modes method: the example of an aircraft panel with frequency-dependent damping treatment, *22<sup>nd</sup> International Congress on Sound and Vibration, Florence* (2015).