

CFA/VISHNO 2016

Utilisation du chaos polynomial pour la mesure d'efforts vibratoires par méthodes inverse

J. Pons, L. Jézéquel et J. Laborde

ECOLE CENTRALE DE LYON, LTDS - Bât. E6, 36 avenue Guy de Collongue, 69134

Ecully Cedex, France

josselin.pons@doctorant.ec-lyon.fr



LE MANS

Pour l'industrie automobile, la quantification des efforts vibratoires dans un but d'amélioration du confort acoustique est un enjeu majeur. Nous présentons ici une méthode de prise en compte des incertitudes lors de la reconstruction, par méthode inverse, des efforts vibratoires « de blocage » à l'interface entre deux structures mécaniques. La prise en compte des incertitudes sur les fonctions de réponse en fréquence (FRF) se fait par l'ajout d'un aléa sur les fréquences propres. La matrice des FRF préalablement floutée et le vecteur des efforts « de blocage », solution du problème inverse, sont alors développés sur une base de polynômes chaotiques. L'inversion du système d'équations matricielles ainsi obtenu nous permet de calculer les coefficients du développement des efforts « de blocage » à partir des accélérations opérationnelles mesurées. Ces coefficients nous donnent alors l'espérance et la dispersion de la solution de notre problème inverse. Cette méthode a été testée sur un système mécanique simple mais représentatif de la transmission d'efforts vibratoires entre une structure source active et une structure réceptrice passive. La méthode a été validée sur la convergence des efforts « de blocage » moyens en comparaison à une méthode classique de Monte-Carlo.

1 Introduction

Les véhicules automobiles étant de plus en plus silencieux, la maîtrise des efforts vibratoires générés par des sources accessoires (groupe moto-ventilateur, pompe, moteur d'essuie glace...) devient un enjeu de plus en plus fort. Cependant pour diverses raisons pratiques (accessibilité, encombrement...), ces efforts vibratoires sont bien souvent impossibles à mesurer de manière directe en utilisant des capteurs d'efforts. Dans ces circonstances on a alors recours à la mesure indirecte d'efforts. Cette méthode consiste, à partir de mesures de la réponse de la structure en fonctionnement et d'un modèle dynamique de la structure, à remonter aux efforts. Ce type de problème appartient à la classe plus générale des problèmes inverses dans lesquels on part de l'observation expérimentale des effets pour tenter de remonter aux causes d'un phénomène. La résolution de ce genre de problème est souvent difficile car les problèmes inverses sont en général des problèmes mal posés au sens d'Hadamard car les conditions d'existence, d'unicité et de stabilité de la solution ne sont pas toujours assurées. Ceci fait que les problèmes inverses sont en général très sensibles aux dispersions et erreurs de mesure. En effet un écart minime entre deux jeux de données d'entrée peut engendrer deux solutions très éloignées. L'objectif de la présente étude est de développer une méthode originale de prise en compte des incertitudes lors de la reconstruction par méthode inverse des efforts vibratoires « de blocage » à l'interface entre une sous-structure mécanique dite « source » active et une sous-structure dite « réceptrice » passive.

2 Efforts « de blocage » *in situ*

Pour des raisons pratiques, il est parfois plus aisé de caractériser une source de vibration *in situ*, c'est-à-dire sans démontage de la source de son récepteur. De même, il est parfois préférable pour caractériser une source vibratoire, de rechercher les efforts dits « de blocage » aux points d'interface, c'est-à-dire les efforts appliqués à l'interface source/récepteur si ce dernier était infiniment rigide. MooreHouse [1] propose une méthode permettant de reconstruire, par méthode inverse, les efforts « de blocage », sans démontage de l'ensemble source/récepteur et ce même si le récepteur ne peut être considéré comme infiniment rigide. En effet il a pu démontrer que :

$$\{F_{bl}(\omega)\} = [H(\omega)]^+ \{X_{op}(\omega)\} \quad (1)$$

Avec le symbole $^+$ désignant l'inverse ou la pseudo-inverse d'une matrice si celle-ci est rectangulaire, $\{F_{bl}(\omega)\}$ le vecteur

de longueur L contenant les efforts « de blocage » reconstruit à l'interface, $\{X_{op}(\omega)\}$ le vecteur de longueur K des réponses mesurées aux points d'interfaces lorsque la source est active et $[H(\omega)]$ la matrice de dimension $K * L$ contenant les FRF de la structure complète mesurées aux points d'interface. La reconstruction des efforts a alors lieu en deux phases : dans un premier temps les FRF de la structure complète sont déterminées aux points d'interface entre les deux sous-structures. Puis dans un second temps, les réponses aux points d'interface sont mesurées lors du fonctionnement de la source vibratoire. Les efforts « de blocage » sont alors déterminés suite à l'inversion de la matrice des FRF.

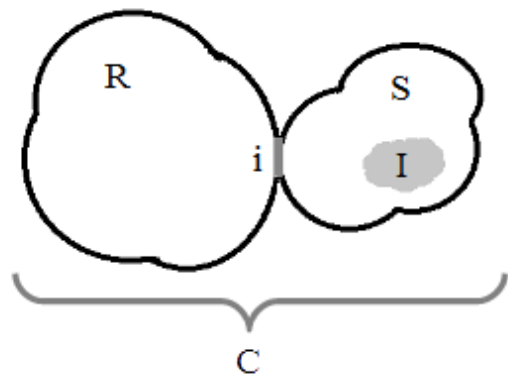


FIGURE 1 – Schéma de la structure complète C avec R la sous-structure receptrice, S la sous-structure source, I la source d'efforts interne à S et i l'interface entre les deux sous-structures

3 Matrice des FRF floutée

Dans le domaine fréquentiel, la matrice des FRF relie les réponses aux forces d'excitation :

$$\{X_{op}(\omega)\} = [H(\omega)] \{F_{bl}(\omega)\} \quad (2)$$

Cette matrice peut être déterminée à partir des matrices de masse, raideur et amortissement d'un modèle de la structure, ou expérimentalement en écrivant le rapport réponses/excitations mesuré lors d'un essai ou encore à partir des paramètres modaux de la structure, eux-mêmes identifiés expérimentalement ou obtenus grâce à un modèle de la structure. Ici nous choisissons d'écrire la matrice des

FRF de la structure en fonction de ses paramètres modaux :

$$H_{kl}(\omega) = \sum_j \frac{\Phi_{kl}^{(j)} \Phi_{kl}^{(j)t}}{i\omega - p_{kl}^{(j)}} + \frac{\bar{\Phi}_{kl}^{(j)} \bar{\Phi}_{kl}^{(j)t}}{i\omega - \bar{p}_{kl}^{(j)}} \quad (3)$$

$$\forall k \in \{0, \dots, K\}, \forall l \in \{0, \dots, L\}$$

Avec $\Phi^{(j)}$ et $p^{(j)}$ les j -èmes mode et pôle respectivement. La prise en compte des incertitudes inhérentes à tout problème de reconstruction d'efforts par méthode inverse se fera ici par l'ajout d'un aléa sur les fréquences propres de la structure. Nous définissons alors une variable instrumentale $\tilde{\omega}_j$ telle que : $\tilde{\omega}_j = \omega_j^0 + \xi_j \omega_j^1$, avec ω_j^0 et ω_j^1 l'espérance et l'écart type de la j -ème valeur propre respectivement et ξ_j la j -ème variable aléatoire normale centrée réduite. L'ajout de cette variable instrumentale dans l'expression des FRF (3) nous donne :

$$\tilde{H}_{kl}(\omega) = \sum_j \frac{\Phi_{kl}^{(j)} \Phi_{kl}^{(j)t}}{i\omega - \tilde{p}_{kl}^{(j)}} + \frac{\bar{\Phi}_{kl}^{(j)} \bar{\Phi}_{kl}^{(j)t}}{i\omega - \bar{\tilde{p}}_{kl}^{(j)}} \quad (4)$$

$$\forall k \in \{0, \dots, K\}, \forall l \in \{0, \dots, L\}$$

Avec $\tilde{p}^{(j)}(\xi_j)$ le j -ème pôle flouté tel que : $\tilde{p}^{(j)}(\xi_j) = \lambda_j + i\tilde{\omega}_j$ avec λ_j le j -ème amortissement modal.

4 Matrice des FRF projeté sur le Chaos Polynomial

Il existe de nombreuses approches probabilistes différentes en dynamique des structures : méthode de Monte Carlo [6], méthode de perturbation [4], méthode Non Paramétrique [2] ou encore la méthode du Chaos Polynomial [5]. Le Chaos Polynomial est un outil très puissant qui formalise la séparation entre les composantes stochastique et déterministe d'une fonction aléatoire. Cette méthode permet d'obtenir l'expression d'une fonction aléatoire en décomposant son aléa sur une base de polynômes orthogonaux. Ici la partie déterministe de $[\tilde{H}(\omega, \xi_{1..j})]$ sera modélisé par les $(N + 1)$ coefficients matriciels $[h_n(\omega)]$ appelés modes stochastiques et sa partie non-déterministe par la famille des $(N + 1)$ polynômes orthogonaux à variables aléatoires $\Psi_n(\xi_{1..j})$ avec $\xi_{1..j}$ les j variables aléatoires de notre problème. Nous pouvons dès lors écrire le développement $[\hat{H}(\omega, \xi_{1..j})]$ de $[\tilde{H}(\omega, \xi_{1..j})]$ tel que :

$$[\hat{H}(\omega, \xi_{1..j})] = \sum_{0 \leq n \leq N} [h_n(\omega)] \Psi_n(\xi_{1..j}) \simeq [\tilde{H}(\omega, \xi_{1..j})] \quad (5)$$

Le choix du type de polynôme sur lequel effectuer le développement est primordial afin d'assurer une bonne convergence de la méthode. Askey [7] a pu démontrer une correspondance entre différentes lois de probabilité et des familles de polynômes orthogonaux assurant une bonne convergence de la méthode. Ici nous choisissons *a priori* des lois de probabilité gaussiennes pour nos variables aléatoires et donc, en concordance avec le schéma d'Askey, nous utiliserons des fonctions polynomiales d'Hermite pour notre développement.

$$\Psi_n(\xi) = (-1)^n e^{\frac{\xi}{2}} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\frac{\xi}{2}} \quad (6)$$

Il nous faut maintenant calculer les modes stochastiques $[h_n(\omega)]$. Il existe pour ce faire deux grandes familles de

méthodes : les méthodes intrusives [3] et non-intrusives. On peut distinguer parmi les méthodes non-intrusives deux approches différentes : les méthodes de régression [8] et les méthodes de projection spectrale non-intrusive dites NISP [8]. Ici nous choisissons d'utiliser la méthode NISP. Après avoir exprimé la matrice des FRF sur une base de polynômes chaotiques elle y est projetée, ce qui nous donne directement l'expression des modes stochastiques :

$$h_{n,kl}(\omega) = \frac{\langle \tilde{H}_{kl}(\omega, \xi_{1..j}) \Psi_n(\xi_{1..j}) \rangle}{\langle \Psi_n(\xi_{1..j}) \Psi_n(\xi_{1..j}) \rangle} \quad (7)$$

$$\forall k \in \{0, \dots, K\}, \forall l \in \{0, \dots, L\}$$

Pour rappel, l'expression du produit interne :

$$\langle fg \rangle = \int_{\xi_{1..j}} f(\xi_{1..j}) g(\xi_{1..j}) P_b(\xi_{1..j}) d(\xi_{1..j}) \quad (8)$$

Avec $P_b(\xi_{1..j})$ la densité de probabilité de la j -ème variable aléatoire. Une fois les coefficients du développement connus, l'espérance et la variance de $[H_{cp}]$ sont données par :

$$E([\hat{H}]) = [h_0] ; \sigma^2(\hat{H}_{kl}) = \sum_{1 \leq n \leq N} h_{n,kl}^2 \langle \Psi_n^2 \rangle \quad (9)$$

$$\forall k \in \{0, \dots, K\}, \forall l \in \{0, \dots, L\}$$

5 Problème inverse projeté sur le Chaos Polynomial

Si nous considérons la solution du problème inverse $\{F_{bl}(\omega)\}$ comme une fonction aléatoire $\{\tilde{F}_{bl}(\omega, \xi_{1..j})\}$ il nous est possible, de la même manière que pour $[\tilde{H}(\omega, \xi_{1..j})]$, de la développer sur une base de $(M + 1)$ polynômes chaotiques :

$$\{\hat{F}(\omega, \xi_{1..j})\} = \sum_{0 \leq m \leq M} \{f_m(\omega)\} \Psi_m(\xi_{1..j}) \quad (10)$$

En injectant les équations (5) et (10) dans l'équation du problème inverse (1) nous obtenons :

$$\sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M [h_n(\omega)] \Psi_n(\xi_{1..j}) \{f_m(\omega)\} \Psi_m(\xi_{1..j}) = \{X_{op}(\omega)\} \quad (11)$$

En multipliant à droite et à gauche de l'équation (11) par $\Psi_p(\xi_{1..j})$ on obtient l'expression du problème inverse projeté sur la base des polynômes chaotiques :

$$\sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M [h_n(\omega)] \langle \Psi_n(\xi_{1..j}) \Psi_m(\xi_{1..j}) \Psi_p(\xi_{1..j}) \rangle \{f_m(\omega)\} = \{X_{op}(\omega)\} \Psi_p(\xi_{1..j}) \quad (12)$$

L'écriture de l'équation (12) pour chaque $p = \{0, \dots, M\}$ conduit à un système de $(M+1)$ équations matricielles :

$$[\Pi]_{k*(M+1), l*(M+1)} \{\hat{F}\}_{l*(M+1), 1} = \{\hat{X}\}_{k*(M+1), 1} \quad (13)$$

Avec :

$$\{\hat{F}\} = \begin{pmatrix} \{f_0\} \\ \{f_1\} \\ \vdots \\ \{f_M\} \end{pmatrix} ; \{\hat{X}\} = \begin{pmatrix} \{X_{op}\} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Et la matrice $[\Pi]$

$$\Pi_{mp} = \sum_n \langle \Psi_n(\xi_{1..j}) \Psi_m(\xi_{1..j}) \Psi_p(\xi_{1..j}) \rangle h_n(\omega) \quad (15)$$

$$\forall n \in \{0, \dots, N\}, \forall (m, p) \in \{0, \dots, M\}$$

Il est à noter que le calcul de $\langle \Psi_n(\xi_{1..j}) \Psi_m(\xi_{1..j}) \Psi_p(\xi_{1..j}) \rangle$ bien que potentiellement coûteux dans le cas d'un problème de grande taille, c'est-à-dire si l'ordre d'interpolation ou si le nombre de variables aléatoires est élevé, n'est à effectuer qu'une seule fois pour tous les problèmes recourant à cette méthode. En effet, on peut remarquer que ce calcul ne dépend en rien du problème physique. Une fois les modes stochastiques $\{f_n(\omega)\}$ connus, l'espérance et la variance de la solution du problème inverse chaotique sont données par :

$$E(\{\hat{F}_l\}) = \{f_0\}; \sigma^2(\hat{F}_l) = \sum_{1 \leq m \leq M} f_{m,l}^2 \langle \Psi_m^2 \rangle \quad (16)$$

$$\forall l \in \{0, \dots, L\}$$

6 Application à un cas d'étude numérique

Afin de tester l'utilisation du chaos polynomial pour la mesure d'efforts « de blocage » *in situ*, nous appliquons notre méthode à un cas numérique simple mais représentatif de la transmission d'efforts vibratoires entre deux sous-structures. Voir Figure 2. Nous cherchons ici à reconstruire les efforts « de blocage » aux points de liaison plot/récepteur (points 3 et 4). La matrice des FRF déterministe à l'interface entre les deux sous-structures est directement construite en utilisant les paramètres modaux, eux-même déterminés à partir du modèle numérique de la structure. Les réponses opérationnelles sont calculées en appliquant un effort aléatoire F_i , simulant les efforts internes à la source en fonctionnement, au point 1. La solution du problème inverse chaotique est validée sur les efforts de « de blocage » de référence calculés par tirage de Monte Carlo après l'ajout d'un aléa sur les fréquences propres de la structure. La figure 3 montre la FRF moyenne de la structure au point 3 projetée sur le Chaos Polynomial et son intervalle de confiance à 95% en comparaison de la FRF moyenne obtenue avec 1000 tirages de Monte Carlo. La figure 4 montre la force « de blocage » moyenne et son intervalle de confiance à 95% au point 3 reconstruite par méthode inverse après projection de la solution et de l'équation du problème sur un Chaos Polynomial d'ordre 5 et de dimension 4. La dimension du chaos étant fixée par le nombre de fréquences propres de la structure sur l'intervalle de fréquence d'intérêt. La solution est comparée à la force de blocage moyenne obtenue avec 1000 tirages de Monte Carlo.

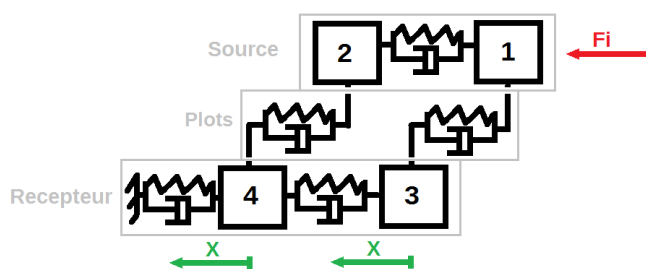


FIGURE 2 – Modèle simple de transmission d'efforts entre sous-structure source et réceptrice

7 Conclusion

Nous avons montré dans cette étude que la prise en compte des incertitudes, lors de la reconstruction par méthode inverse, des efforts vibratoires « de blocage » à l'interface entre deux structures mécaniques peut se faire efficacement grâce au Chaos Polynomial. Nous avons pu constater une bonne concordance entre les FRF moyennes obtenues par projection sur le chaos polynomial et les FRF moyennes obtenues par méthode de Monte Carlo après floutage des fréquences propres de la structure. De même, les efforts « de blocage » moyens reconstruits après projection des équations du problème sur une base de polynômes d'Hermite chaotiques ont été validés par rapport aux efforts obtenus par la méthode de Monte Carlo. Cette méthode s'est révélée relativement simple et rapide à mettre en œuvre en regard de la méthode classique de Monte Carlo nécessitant un grand nombre de tirage avant de converger.

Références

- [1] A.T.Moorhouse, A.S.Elliott, T.A.Evans, In situ measurement of the blocked force of structure-borne sound sources, *Journal of sound and vibration* (2009).
- [2] C.Soize, A comprehensive overview of a non-parametric probabilistic approach of model uncertainties for predictive models in structural dynamics, *Journal of Sound and Vibration* (2005).
- [3] R.G.Ghanem, P.D.Spanos, Stochastique finite element : a spectral approach, *Springer Verlag* (1991).
- [4] H.Benaroya, M.Rehak, Finite element method in probabilistic structural analysis : A selective review. *Applied Mechanics Reviews*, *ASME* (1988).
- [5] N.Wiener, The homogeneous chaos, *ASME* (1938)
- [6] N.Metropolis, S.Ulam, The Monte Carlo Method, *Journal of the American Statistical Association* (1949)
- [7] R.Askey, J.Wilson, Some basis hypergeometric polynomial that generalize jacobi polynomials, *Memoirs American Mathematical Society* (1985)
- [8] T.Cresteau, O.L Maitre, J.M.Martinez, Polynomial chaos expansion for sensitivity analysis, *Reliability engineering and system safety* (2009).

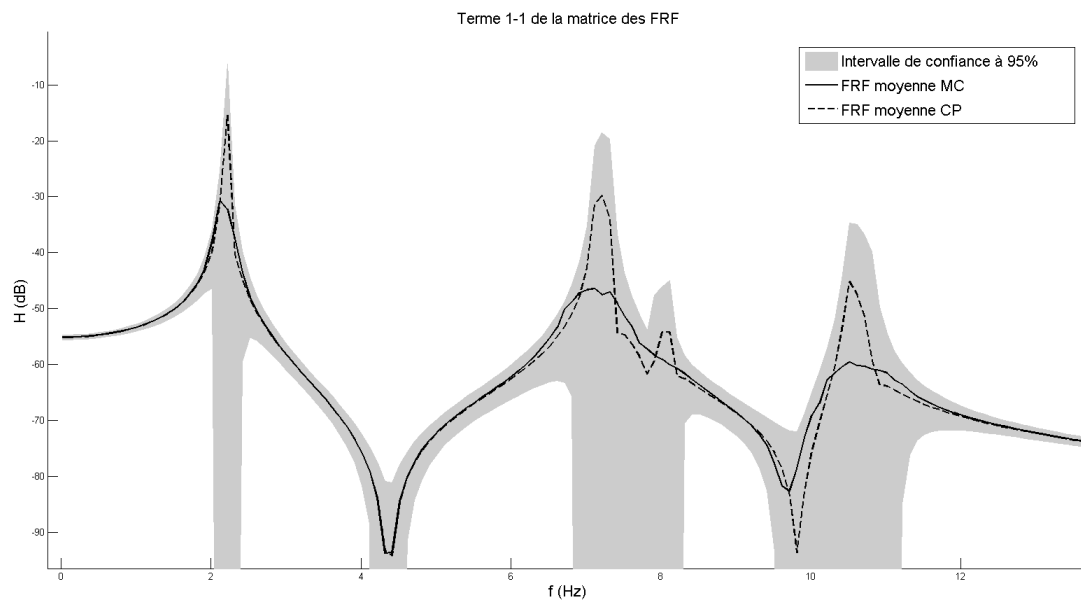


FIGURE 3 – FRF de la structure complète au point 3 : "—" Moyenne des tirages de Monte Carlo, "- -" Moyenne de la méthode du Chaos Polynomial, "zone grisée" Intervalle de confiance à 95% de la solution du chaos polynomial

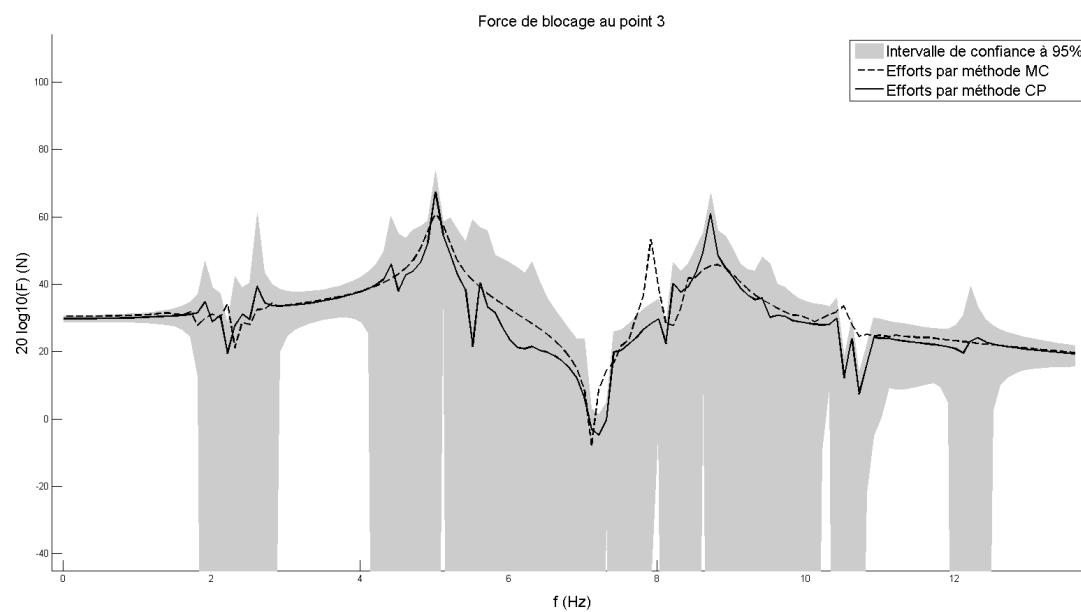


FIGURE 4 – Efforts « de blocage » au point 3 : "—" Moyenne des tirages de Monte Carlo, "- -" Moyenne de la méthode du Chaos Polynomial, "zone grisée" Intervalle de confiance à 95% de la solution du chaos polynomial