

# CFA/VISHNO 2016

## **Caractérisation acoustique d'un défaut dans un poreux saturé modèle de tortuosité**

F. Graja, A. Duclos et C. Depollier

Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine, Avenue Olivier Messiaen, Cedex9,  
72085 Le Mans, France  
[fatma.graja.etu@univ-lemans.fr](mailto:fatma.graja.etu@univ-lemans.fr)



LE MANS

On présente une modélisation de la tortuosité d'un milieu poreux présentant des inhomogénéités localisées. Ces inhomogénéités considérées comme des défauts sont des inclusions à deux dimensions (circulaires) et trois dimensions (sphériques). Dans notre étude, on considère deux types d'inclusions : i) inclusion de type fluide et ii) inclusion de type poreuse. Ce modèle est basé sur la définition de la tortuosité  $\alpha = \frac{\langle v^2 \rangle}{\langle v \rangle^2}$ . La résolution des équations de Stokes et de Brinkman permet de calculer les vitesses à l'extérieur et à l'intérieur de l'inclusion pour un fluide visqueux en écoulement stationnaire. Les résultats permettent de mettre en évidence une analogie entre les comportements de l'inclusion dans le champ de vitesse du fluide et celui d'une sphère diélectrique dans un champ électrique uniforme.

## 1 Introduction

Le problème traité ici concerne les matériaux poreux dans lesquels apparaissent des défauts de taille finie. Un exemple d'un tel milieu est fournie par l'os trabéculaire dans lequel l'ostéoporose, en diminuant la densité minérale osseuse laisse apparaître des défauts dont la taille évolue au cours du temps. On s'intéresse ici à l'incidence de ces défauts sur la tortuosité du milieu poreux. On sait que la tortuosité d'un milieu poreux traduit le trajet effectif parcouru par les ondes qui se propagent dans le fluide saturant. En effet la tortuosité joue pour ces ondes le rôle que joue l'indice de réfraction pour l'onde électromagnétique. Elle est donc un paramètre important pour l'interprétation des vitesses de phase des ondes acoustiques utilisées pour caractériser un milieu poreux. La tortuosité  $\alpha$  s'interprète comme le rapport de la longueur moyenne  $\langle l \rangle$  du chemin parcouru par l'onde, lorsqu'elle passe d'un point A à un point B, à la distance  $L$  entre ces deux points [1] :

$$\alpha = \frac{\langle l \rangle}{L}, \quad (1)$$

En général,  $l > L$  et donc  $\alpha > 1$ . D'autres définitions ont été proposées, la plus connue est celle proposée par A.Koponen & al [2] :

$$\alpha = \frac{\langle v^2 \rangle}{\langle v \rangle^2}, \quad (2)$$

où  $v$  est la vitesse du fluide et  $\langle \cdot \rangle$  représente la moyenne statistique.

Cette définition est plus générale que celle donnée dans l'équation (1) et prend en compte les variations du rayon des pores du milieu.

La présence des défauts dans un milieu poreux modifie les lignes de champs des vitesses et de ce fait modifie la tortuosité moyenne du milieu. Dans ce travail on s'intéresse à trois types de défauts modélisés par des inclusions circulaires (2D) ou sphériques (3D) :

- Inclusion fluide à interface ouverte ;
- Inclusion fluide à interface fermée ;
- Inclusion poreuse.

La présence de ces défauts modifie localement la tortuosité conformément à :

$$\alpha(x) = \alpha + \sum_{i,j} (\alpha_{ij} - \alpha) \delta(x - x_{ij}), \quad (3)$$

où  $x_{ij}$  désigne la position du  $i^{eme}$  défaut de type  $j$  et  $\alpha_{ij}$  sa tortuosité. Par souci de simplicité, on suppose que la densité des défauts est suffisamment faible pour que l'on puisse négliger leur interaction.

### Nombre d'onde dans le milieu perturbé

Pour évaluer le nombre d'onde effectif dans un milieu aléatoire (poreux+défaut), on utilise la méthode de Keller

[3], où sa valeur est donnée par :

$$k_{eff}^2(\omega) = k_0^2(1 + \epsilon^2 \langle \mu^2 \rangle) + \frac{4\epsilon^2 k_0}{c_0^2} \int_0^\infty \exp(jk_0 r) \sin(k_0 r) \times \left( \omega^2 R(r, r/c) - j\omega R_T(r, r/c) - R_{TT}(r, r/c) \right) dr \quad (4)$$

où  $\mu$  est la perturbation apportée à la vitesse due aux variations de la tortuosité,  $R$  est la fonction de corrélation de cette perturbation :

$$R(x-y, |t-s|) = \langle \mu(x, t) \mu(y, s) \rangle, \quad (5)$$

$R_T$  et  $R_{TT}$  sont les dérivées première et seconde de  $R$  par rapport à son second argument.

## 2 Modèle de tortuosité

Certains défauts présents dans les milieux poreux étudiés proviennent des variations locales des paramètres de ces milieux, c'est notamment le cas dans l'os trabéculaire ostéoporotique. Dans ce cas la densité minérale osseuse est modifiée : les trabécules s'amincissent, la tortuosité et la perméabilité sont alors modifiées. On s'intéresse aux modifications de la tortuosité dues aux défauts. Par la suite, on

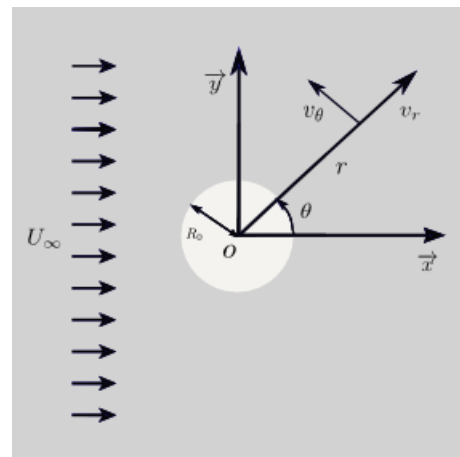


FIGURE 1 – Défaut circulaire présent dans un milieu poreux en coordonnées polaires

modélise les variations de la tortuosité dans le cas d'une inclusion sphérique fluide à surface perméable ou imperméable (bulle) et d'une inclusion poreuse dont la perméabilité varie radialement.

Dans un milieu poreux la vitesse de filtration  $v$  est reliée au gradient de la pression par la loi de Darcy [4] :

$$v = -\frac{k_0}{\eta} \nabla p, \quad (6)$$

où  $k_0$  est la perméabilité du milieu et  $\eta$ , la viscosité du fluide. Cette relation peut être vue comme la définition de la perméabilité. Dans l'inclusion fluide, la relation entre la pression et la vitesse est donnée par l'équation de Stokes :

$$\eta \nabla^2 v - \nabla p = 0, \quad (7)$$

si de plus le fluide est incompressible on a

$$\nabla \cdot v = 0, \quad (8)$$

### Équation de Brinkman (loi de Darcy généralisée)

La loi de Darcy, dans laquelle n'apparaissent pas les dérivées d'espace de la vitesse, n'est pas adaptée pour traiter les problèmes d'interfaces poreux/fluide, Brinkman [5] a proposé une modification de la loi de Darcy sous la forme :

$$-\nabla p + \eta \nabla^2 v - \frac{\eta}{k_0} v = 0. \quad (9)$$

Pour une perméabilité importante ( $k_0 \rightarrow +\infty$ ), l'équation de Stokes est retrouvée, tandis que l'équation de Brinkman conduit à la loi de Darcy pour une faible perméabilité ( $k_0 \rightarrow 0$ ). Le modèle d'écoulement du fluide dans des milieux poreux avec des défauts en considérant les modèles de Brinkman et / ou Stokes permettent d'accéder aux lignes de champs de vitesse. De cette façon, il est donc possible d'évaluer les perturbations locales de la tortuosité.

## 2.1 Cas d'une inclusion fluide

Pour un fluide incompressible, la solution de l'équation de Darcy ou de Brinkman conduit à :

$$p^i = \sum_n (A_n^i r^n + B_n^i r^{-2}) \cos(\theta), \quad (10)$$

La vitesse est déduite soit de l'équation de Stokes (7) soit de la loi de Darcy (6). Les composantes de la contrainte sur le fluide sont :

$$\tau_{rr} = \phi(-p + 2\eta\partial_r v_r), \quad (11)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r} \partial_\theta v_r + \partial_r v_\theta - \frac{v_\theta}{r}, \quad (12)$$

### 2.1.1 Poreux-cavité fluide : interface perméable

Les conditions à l'interface sont :

$$v_r^{(in)} = v_r^{(out)}, \quad v_\theta^{(in)} = v_\theta^{(out)},$$

$$\tau_{rr}^{(in)} = \tau_{rr}^{(out)}, \quad \tau_{r\theta}^{(in)} = \tau_{r\theta}^{(out)},$$

avec  $(in)$ ,  $(out)$  désignent respectivement l'intérieur et l'extérieur de la cavité.

Les résultats sont présentés sur la figure (2). Pour  $\zeta_0 = \frac{R_0}{\sqrt{k}} > 1$ , le fluide passe prioritairement dans la cavité, alors que pour  $\zeta_0 < 1$ , la cavité étant plus résistive, le fluide a tendance à passer préférentiellement à l'extérieur.

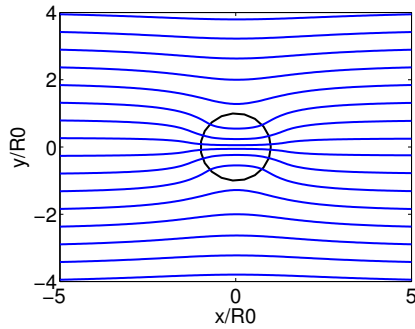
### 2.1.2 Poreux-cavité fluide : interface imperméable

Les conditions à l'interface sont :

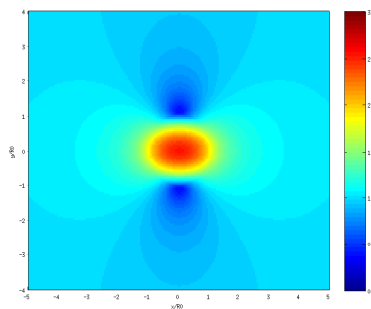
$$\partial_r \tau_{rr}^{(out)}|_{r=R_0} = 0,$$

$$v_r^{(out)}(1, \theta) = 0,$$

Les résultats sont présentés sur la figure (3). Les lignes de champs des vitesses évitent toute la cavité. Dans ce cas on a une surpression à l'avant de la cavité ( $\frac{x}{R_0} = -1$ ) et une dépression à l'arrière ( $\frac{x}{R_0} = 1$ ).

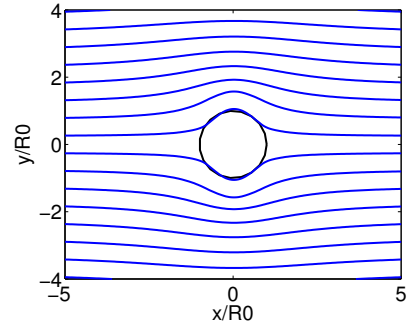


(a)

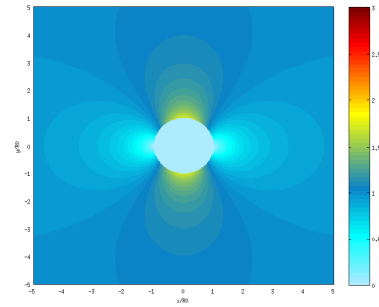


(b)

FIGURE 2 – Lignes de vitesse (a) et champ de vitesse (b) autour d'une inclusion perméable  $\zeta_0 = 10$



(a)



(b)

FIGURE 3 – Lignes de vitesse (a) et champ de vitesse (b) autour d'une inclusion imperméable  $\zeta_0 = 10$

## 3 Cas d'une inclusion poreuse

Le cas le plus généralement rencontré dans les matériaux poreux est celui du défaut de taille limitée dans lequel un ou plusieurs de ses paramètres varient localement. Ça peut être par exemple le cas de la perméabilité.

On modélise un tel défaut par une inclusion poreuse circulaire (2D) ou sphérique (3D) de rayon  $R_0$ , de perméabilité  $k^{(in)}$  et de porosité  $\phi^{(in)}$  incluse dans un poreux hôte de perméabilité  $k^{(out)}$  et de porosité  $\phi^{(out)}$  saturé par un fluide incompressible dont la viscosité est  $\eta$ . On suppose que le poreux est soumis à un gradient de pression  $\nabla p$  maintenu constant dirigé suivant l'axe  $\vec{x}$  Dans le milieu hôte et dans l'inclusion, la vitesse de filtration est reliée au gradient de pression par la loi de Darcy :

$$\mathbf{v} = -\frac{k_0}{\eta} \nabla p,$$

La vitesse de filtration de l'ensemble est alors donnée par le système d'équations :

$$\begin{cases} v_r^{(in)} = -\frac{k^{(in)}}{\eta} \nabla p^{(in)}, r < R_0 \\ v_r^{(out)} = -\frac{k^{(out)}}{\eta} \nabla p^{(out)}, r > R_0 \end{cases} \quad (13)$$

À la frontière de l'inclusion ( $r = R_0$ ), on raccorde les solutions de l'équation (13) en imposant

1. La conservation du débit :

$$\phi^{(in)} v_r^{(in)} = \phi^{(out)} v_r^{(out)} \quad (14)$$

2. L'égalité des contraintes

$$\tau_{rr}^{(in)} = \tau_{rr}^{(out)} \quad (15)$$

avec

$$\tau_{rr} = \phi(-p + 2\eta\partial_r v_r) \quad (16)$$

Dans ces expressions  $v_r = -\frac{k}{\eta} \partial_r p$ .

La solution en coordonnées polaires de l'équation (13) compte tenu des équations (14)-(15) conduit à la pression :

$$p^{(out)}(r, \theta) = -\frac{U_\infty}{\kappa^{(out)}} r \cos(\theta) + \frac{U_\infty}{\kappa^{(out)}} \frac{R_0^3}{r^2} \left( \frac{\frac{k^{(in)}}{k^{(out)}} - 1}{2 + \frac{k^{(in)}}{k^{(out)}} + 12 \frac{k^{(in)}}{R_0^2}} \right) \cos(\theta), \quad (17)$$

$$p^{(in)}(r, \theta) = -\frac{\phi^{(out)}}{\phi^{(in)}} \frac{U_\infty}{\kappa^{(out)}} r \left( \frac{3 + 12 \frac{k^{(out)}}{R_0^2}}{2 + \frac{k^{(in)}}{k^{(out)}} + 12 \frac{k^{(in)}}{R_0^2}} \right) \cos(\theta) \quad (18)$$

où  $\kappa^{(out)} = \frac{k^{(out)}}{\eta}$ , et  $\kappa^{(in)} = \frac{k^{(in)}}{\eta}$ , et  $U_\infty$  est la vitesse de filtration loin de l'inclusion.

Le premier terme du second membre de l'équation (17) représente la pression

appliquée, tandis que le second terme est la pression due à l'inclusion. Cette dernière, en modifiant les lignes de champs de la vitesse de filtration se comporte comme un dipôle centré à l'origine dont le moment dipolaire est :

$$p = 4\pi k^{(out)} \left( \frac{\frac{k^{(in)}}{k^{(out)}} - 1}{2 + \frac{k^{(in)}}{k^{(out)}} + 12 \frac{k^{(in)}}{R_0^2}} \right) R_0^3 \frac{U_\infty}{k^{(out)}}. \quad (19)$$

Classiquement la valeur de la perméabilité des poreux étudiés est de l'ordre de  $10^{-7} m^2 - 10^{-11} m^2$ , on voit donc que le terme  $12 \frac{k^{(in)}}{R_0^2}$  est très petit par rapport aux autres termes du dénominateur. Lorsqu'on le néglige, on constate que le moment dipolaire (19) est analogue au moment dipolaire d'une sphère diélectrique plongée dans un champ électrique  $E_0$  si on pose [6] :

$$\frac{k^{(in)}}{k^{(out)}} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0},$$

et

$$\frac{U_\infty}{\kappa^{(out)}} = E_0,$$

où  $\epsilon$  et  $\epsilon_0$  sont respectivement, les permittivités diélectriques de la sphère et du vide. Par ailleurs, on peut définir l'analogie de la polarisation  $\mathbf{P}$  par :

$$\mathbf{P} = 3k^{(out)} \left( \frac{\frac{k^{(in)}}{k^{(out)}} - 1}{2 + \frac{k^{(in)}}{k^{(out)}} + 12 \frac{k^{(in)}}{R_0^2}} \right) \frac{\mathbf{U}_\infty}{\kappa^{(out)}}. \quad (20)$$

Ainsi  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{U}_\infty$  ont même sens lorsque  $\frac{k^{(in)}}{k^{(out)}} > 1$  et sont de sens contraire lorsque  $\frac{k^{(in)}}{k^{(out)}} < 1$ . Le rôle joué par les charges de polarisation à la surface de la sphère diélectrique dont la densité est :

$$\sigma_{pol} = \frac{(\mathbf{P} \cdot \mathbf{r})}{r} = 3\epsilon_0 \left( \frac{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1}{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} + 2} \right) E_0 \cos(\theta), \quad (21)$$

est dans le cas du poreux celui joué par la surpression (ou la dépression) présente à l'interface  $r = R_0$ .

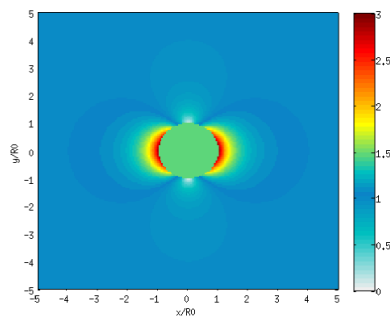
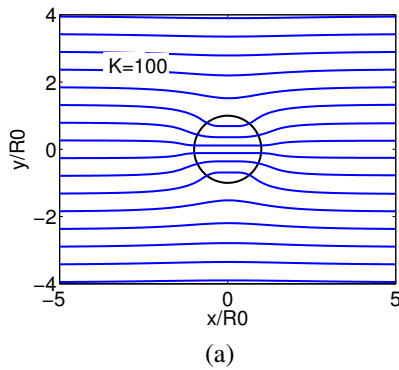


FIGURE 4 – Lignes de vitesse (a) et champ de vitesse (b) autour d'une cavité poreuse, où  $K$  est le rapport des perméabilités  $k^{(in)}$  et  $k^{(out)}$ .

La figure (fig.4) montre les lignes de champ des vitesses. Suivant les valeurs de  $\kappa = \frac{k^{in}}{k^{out}}$  les lignes passent préférentiellement dans l'inclusion ( $\kappa > 1$ ) ou à l'extérieur ( $\kappa < 1$ ).

### 3.1 Cas d'une inclusion poreuse stratifiée

Dans la réalité, le passage de la perméabilité  $k^{(out)}$  à  $k^{(in)}$  se fait graduellement. On est alors en présence d'une inclusion poreuse inhomogène dont la perméabilité  $k^{(in)}$  est fonction du rayon  $r$  (fig.5).

On présente ici, une méthode pour déterminer la pression (ou la vitesse de filtration) dans une inclusion stratifiée. Chaque strate est caractérisée par sa perméabilité  $k^{(n)}$  et sa porosité  $\phi^{(n)}$ . Dans chaque strate, la vitesse de filtration et la pression sont reliées par la loi de Darcy et les conditions aux limites ( $r = r_n$ ) sont toujours la conservation du débit et l'égalité des contraintes  $\tau_{rr}$  à l'interface entre deux strates successives.

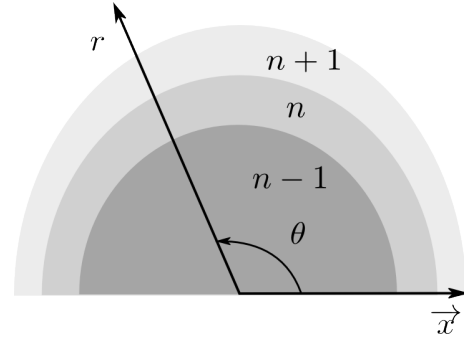


FIGURE 5 – Schéma d'une inclusion poreuse stratifiée

### 3.2 Solutions du problème

La pression dans la strate  $n$  peut être vue comme la superposition de deux champs : un champ entrant et un champ sortant.

$$p^{(n)} = A_n r \cos(\theta) + B_n r^{-2} \cos(\theta). \quad (22)$$

On montre alors que les couples de coefficients  $(A_n, B_n)$  et  $(A_{n-1}, B_{n-1})$  pris dans deux strates contiguës, sont reliés par la relation matricielle :

$$\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = T_{n,n-1} \begin{pmatrix} A_{n-1} \\ B_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (23)$$

où les éléments de la matrice  $T_{n,n-1}$  sont :

$$\begin{aligned} T_{11} &= \frac{\phi^{(n-1)}}{\phi^n} \left( \frac{k^{(n-1)}}{k^n} + 2 \frac{1 - \frac{k^{(n-1)}}{k^n}}{3 + 12k^n r_n^{-2}} \right), \\ T_{12} &= 2 \frac{\phi^{(n-1)}}{\phi^n} r_n^{-3} \left( -\frac{k^{n-1}}{k^n} + \frac{1 + 2 \frac{k^{(n-1)}}{k^n} + 12k^{(n-1)} r_n^{-2}}{3 + 12k^n r_n^{-2}} \right), \\ T_{21} &= \frac{\phi^{(n-1)}}{\phi^n} r_n^3 \left( \frac{1 - \frac{k^{(n-1)}}{k^n}}{3 + 12k^n r_n^{-2}} \right), \\ T_{22} &= \frac{\phi^{(n-1)}}{\phi^n} \left( \frac{1 + 2 \frac{k^{(n-1)}}{k^n} + 12k^{(n-1)} r_n^{-2}}{3 + 12k^n r_n^{-2}} \right). \end{aligned}$$

Ainsi, on peut, par multiplication des matrices  $T$  exprimer le champ de pression dès que l'on connaît la vitesse de filtration  $U_\infty$ .

## 4 Calcul de la tortuosité

On calcule la tortuosité induite par un défaut dans le volume  $\Omega_{R_0}$  autour de l'inclusion comme montré dans la figure (6)

On utilise la relation :

$$\alpha = \frac{\langle v^2 \rangle_\Omega}{\langle v \rangle_\Omega^2} \quad (24)$$

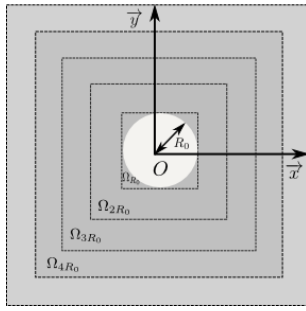


FIGURE 6 – Domaines  $\Omega_{nR_0}$  utilisés pour le calcul de la tortuosité.

[4] H.P.G. Darcy, *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*, Dalmont Paris (1856)  
 [5] H. C. Brinkman *A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles*, Appl. Sci. Res., p. 27, (1947)  
 [6] J.D.Jackson *Classical electrodynamics*, John Wiley & sons, (1998), New york

### Remerciement

C. Depollier bénéficie du support de la RSF (Russian science foundation) Grant 14-49-00079

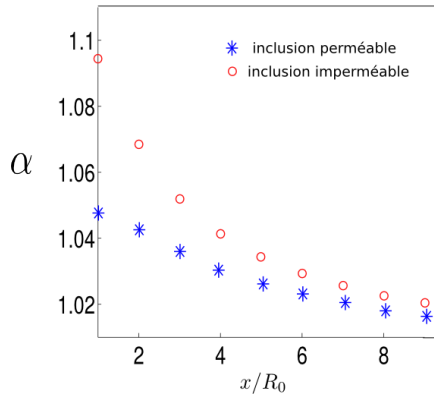


FIGURE 7 – Évolution de la tortuosité relative  $\alpha$  en fonction de  $\Omega$  autour d’une inclusion fluide perméable (\*) et imperméable (o) de rayon  $R_0$  pour  $\zeta_0 = 10$ .

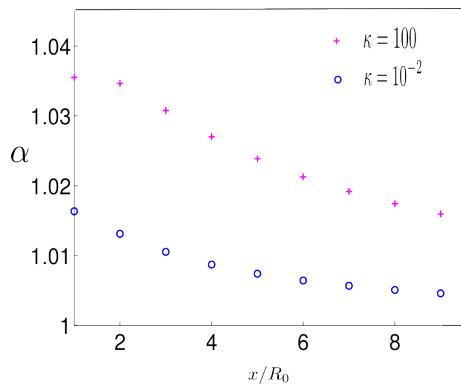


FIGURE 8 – Évolution de la tortuosité relative  $\alpha$  en fonction de  $\Omega$  autour d’une inclusion poreuse de rayon  $R_0$  pour les deux cas :  $\kappa = 100$  (+) et  $\kappa = 10^{-2}$  (o).

## 5 Conclusion

Ce modèle de défaut dans le milieu poreux, permet de calculer une tortuosité effective en régime permanent. Par la suite, on se propose de calculer une expression temporelle à partir de la loi de Darcy temporelle. Cette étude sera étendue dans le cas des inclusions non circulaires (ellipsoïdales).

## Références

[1] H. Saomotoa, J. Katagirib *Direct comparison of hydraulic tortuosity and electric tortuosity based on finite element analysis*, Theoretical and Applied Mechanics Letters Volume 5, Issue 5, August 2015, Pages 177–180 [2] A. Koponen, M. Katäja, and J. Timonen *Tortuous flow in porous media* PHYSICAL REVIEW E, VOLUME 54, NUMBER 1, (1996).  
 [3] J.B. Keller *Stochastic equations and wave propagation in random media* 17<sup>th</sup> Symp. Appl. Math. XVI, American Mathematical Society, p. 145, (1964).