

CFA/VISHNO 2016

Atténuation dans un guide d'onde hétérogène: Étude de sensibilité

J.-L. Christen, C. Droz, O. Bareille et M. Ichchou
LTDS UMR 5513, 36 av Guy de Collongues, 69134 Ecully, France
jean-loup.christen@ec-lyon.fr



LE MANS

Afin de réduire les niveaux vibratoires, de nombreuses structures peuvent être munies d'un traitement dissipatif. Celui-ci peut prendre la forme d'une couche de matériau viscoélastique libre ou contrainte entre deux plaques. Dans certaines applications, comme des structures soumises à des chocs localisés, il peut être intéressant de caractériser ce traitement non pas en termes de niveau vibratoire, mais plutôt d'atténuation des ondes se propageant à travers la structure. Par ailleurs, ce type de traitement est sujet à de forts niveaux d'incertitudes, dès lors que les coefficients d'amortissements sont délicats à mesurer. Dans une phase de préconception, certains paramètres peuvent également varier assez largement. Une étude de sensibilité permet alors de distinguer quels paramètres sont les plus importants en vue d'une optimisation ultérieure. L'exemple proposé ici est celui de la conception d'une poutre composite avec deux types de traitements viscoélastiques, libre et contraint, visant à maximiser l'atténuation spatiale d'une onde de flexion sur une large bande de fréquence. L'étude de sensibilité est réalisée avec la méthode FAST, permettant de considérer de larges plages de variation des paramètres.

1 Introduction

Différentes méthodes, tant numériques qu'expérimentales, ont été proposées ces dernières décennies pour améliorer la détection de défauts dans les structures élancées, abondantes dans les industries automobiles et aérospatiale [1]. La plupart de ces méthodes comprennent l'évaluation des propriétés de dispersion d'ondes propagatives dans la structure, dont il est préférable pour ces applications qu'elles puissent parcourir de longues distances sans trop d'atténuation. D'un autre côté, dans l'optique de réduire les vibrations, des traitements viscoélastiques amortissants, libres ou contraints, sont souvent appliqués sur la structure. Il est donc nécessaire de comprendre l'effet d'un traitement viscoélastique sur l'atténuation des ondes.

La méthode des éléments finis ondulatoires (Wave Finite Element, WFE) est largement utilisée pour calculer les caractéristiques de la propagation d'ondes dans des guides complexes. Il s'agit d'une application de la théorie des structures périodiques [2], la cellule unitaire du guide d'onde étant modélisée en éléments finis [3, 4]. Les caractéristiques de dispersion des ondes peuvent ainsi être obtenues par la résolution d'un problème aux valeurs propres [5]. Dans le cas de structures amorties, les nombres d'onde obtenus sont des nombres complexes, dont la partie imaginaire représente une distance caractéristique d'atténuation de l'onde.

Par ailleurs, dans une optique de conception d'un système amortissant, il peut être très utile d'étudier l'effet d'incertitudes sur l'atténuation des ondes. Ces incertitudes peuvent provenir de la méconnaissance des paramètres (difficulté de mesure, tolérances de fabrication), ou encore de marges de conception, appelées à être diminuées au cours du processus de conception de la structure. Diverses méthodes d'analyse de sensibilité peuvent être utilisées pour cela. Dans le cas de dépendance non-linéaire aux paramètres incertains et de larges domaines de variation, les plus prometteuses sont basées sur l'analyse de variance (ANOVA). La méthode FAST [6] en fait partie, étant particulièrement utile par ses temps de calcul réduits. Initialement proposée pour des applications en chimie [7] puis appliquée à divers domaines, cette méthode a été utilisée récemment dans le domaine de la vibroacoustique [8, 9].

Après une présentation de la méthode WFE et de la méthode FAST dans les deux premières sections, on présente des résultats d'analyse de sensibilité sur des poutres avec traitement viscoélastique, vis-à-vis de paramètres de conception desdits traitements.

2 Calcul de nombres d'ondes par la méthode WFE

La méthode des éléments finis ondulatoires est un couplage de la méthode des éléments finis et de la théorie des structures périodiques, utilisée pour le calcul des ondes libres dans un guide d'onde. Cette méthode a été introduite par les travaux de Mead [10], puis la thèse de Houillon [11], qui fut le premier à proposer l'utilisation de codes éléments finis. Le principe de la WFE est de modéliser le guide d'onde par une seule cellule unitaire, en supposant une relation linéaire entre les déplacements des faces opposées de la cellule dans la direction de propagation.

Pour un guide d'onde monodimensionnel homogène dans la direction de propagation, la cellule unitaire est une section du guide d'épaisseur arbitraire d , modélisée avec un seul élément fini dans la direction x . Selon un critère usuel dans la méthode des éléments finis, la longueur d doit être inférieure au dixième de la longueur d'onde minimale.

Les déplacements et forces appliquées sur les faces de la cellule s'écrivent respectivement

$\mathbf{u} = (\mathbf{u}_L^T \mathbf{u}_R^T)^T$ and $\mathbf{F} = (\mathbf{F}_L^T \mathbf{F}_R^T)^T$, de telle sorte que l'équation d'équilibre dynamique s'écrive

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}_{LL} & \mathbf{D}_{LR} \\ \mathbf{D}_{RL} & \mathbf{D}_{RR} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_L \\ \mathbf{u}_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_L \\ \mathbf{F}_R \end{pmatrix}, \quad (1)$$

où \mathbf{D} est la matrice de raideur dynamique :

$$\mathbf{D} = \mathbf{K}(1 + i\eta) - \omega^2 \mathbf{M}. \quad (2)$$

D'après le théorème de Floquet-Bloch, le déplacement de la face droite est proportionnel au déplacement de la face gauche, le rapport des deux étant le nombre complexe Λ , appelé constante de propagation :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_R \\ -\mathbf{F}_R \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_L \\ \mathbf{F}_L \end{pmatrix}. \quad (3)$$

En injectant cette relation dans l'équation 1, on obtient un problème aux valeurs propres quadratique

$$(\Lambda^2 \mathbf{D}_{RL} + \Lambda(\mathbf{D}_{RR} + \mathbf{D}_{LL}) + \mathbf{D}_{LR})\mathbf{u}_L = 0, \quad (4)$$

qui peut être résolu numériquement. Les valeurs propres Λ sont reliées aux nombres d'onde par la relation

$$\Lambda = \exp(ikd), \quad (5)$$

ce qui permet d'obtenir le nombre d'onde complexe k en prenant le logarithme complexe de Λ .

3 Analyse de sensibilité FAST

Dans les méthodes d'analyse de variance (ANOVA), l'influence d'un paramètre sur la sortie d'un modèle est quantifiée par l'effet qu'il a sur la variance, dans un espace de conception donné. On considère dans cette section un modèle mathématique générique, défini comme une fonction à valeurs réelles continue définie sur $K = [0, 1]^n$. Toute fonction continue sur un produit d'intervalles peut se ramener à ceci avec des changements de variable appropriés. On s'intéresse alors à une fonction f de n variables x_1, \dots, x_n , et on considère une décomposition en somme de fonctions à nombre de variables croissant (appelée décomposition de Hoeffding ou HDMR [12]) :

$$\begin{aligned} y &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= f_0 + \sum_{i=1}^n f_i(x_i) + \sum_{i < j} f_{ij}(x_i, x_j) + \dots + f_{1\dots n}(x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (6)$$

où f_0 est la moyenne de f sur K . Le théorème de Sobol indique qu'en ajoutant la condition que chacune des fonctions de cette décomposition a une moyenne nulle sur son domaine de définition, cette décomposition existe et est unique.

Pour un ensemble d'indices donné $U = \{i_1, \dots, i_n\}$, la variance partielle est alors la variance de f_U

$$D_U = \int_{K|_U} f_U(x_U)^2 dx_U, \quad (8)$$

où $K|_U$ est le domaine de définition de f_U . L'indice de sensibilité relatif à U s'exprime par le rapport de D_U à la variance totale du modèle :

$$SI(I) = \frac{D_I}{D}. \quad (9)$$

Le calcul de la totalité des 2^n indices de sensibilité est nécessaire pour représenter complètement le modèle, ce qui devient rapidement coûteux en temps de calcul, chacun des termes devant être évalué par intégration numérique. Cependant, beaucoup d'information peut en général être obtenue sur l'influence d'un paramètre à partir de l'indice de sensibilité du premier ordre et éventuellement de l'indice de sensibilité total, qui peuvent être calculés efficacement avec la méthode FAST [6].

Pour un paramètre donné $i \in [1, n]$, l'indice de sensibilité du premier ordre (main effect, ME) est celui relatif à la fonction d'une seule variable f_i . Cet indice représente la fraction de la variance totale qui est expliquée par ce paramètre seul. Les paramètres les plus importants ont donc un ME élevé, en revanche un ME faible ne signifie pas que le paramètre n'a pas d'influence, car il peut être impliqué dans des interaction d'ordre supérieur.

Le principe de la méthode FAST est d'éviter l'évaluation des n intégrales multidimensionnelles pour calculer les indices du premier ordre, mais de l'approcher par une seule intégrale portant sur une seule variable, s , qui est le paramètre d'une courbe de remplissage. Cette courbe est choisie pour être périodique dans toutes les dimensions de l'espace, avec une période différente pour chaque paramètre.

Saltelli [6] propose une fonction définie par

$$x_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin(\sin(\omega_i s + \varphi_i)) \quad (10)$$

Les fréquences ω_i sont des entiers choisis pour minimiser les interférences entre paramètres [13]. On dit qu'elles sont sans interférences à l'ordre M si la relation suivante est satisfaite pour toutes les combinaisons linéaires à coefficients entiers :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \omega_i \neq 0 \quad (11)$$

avec $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ et $\sum_{i=1}^n |\alpha_i| < M$.

Les ω_i étant entiers, la courbe qui en résulte est 2π -périodique en la variable s . L'échantillonnage se fait donc sur $N > 2\omega_n + 1$ points compris dans l'intervalle $[0, 2\pi]$. Les φ_i sont des réels choisis aléatoirement entre 0 et 2π . Pour améliorer la robustesse de la méthode, il est possible de prendre une moyenne sur plusieurs tirages des φ_i .

Soit $y_k = f(x_k)$ les valeurs de f sur cet échantillonnage. On peut alors y calculer la transformée de Fourier discrète \hat{y}_k . La variance totale est obtenue à partir du théorème de Parseval :

$$D = \int_K f^2(x) - f_0^2 dx \approx \sum_{k=1}^N y_k^2 = \sum_{k=1}^N \hat{y}_k^2, \quad (12)$$

et la contribution du paramètre i est alors

$$D_i = \sum_{k=1}^M \hat{y}_{k\omega_i}, \quad (13)$$

ce qui permet de calculer l'indice du premier ordre.

4 Résultats

4.1 Modèles WFE

On se place dans le cadre de la conception d'un traitement viscoélastique avec des incertitudes sur la structure de départ. Ces incertitudes portent sur le facteur de perte du matériau, alors que tous les paramètres du traitement viscoélastique varient dans des intervalles de conception.

Le système initial est formé d'une poutre en aluminium de section rectangulaire, d'épaisseur $h_s = 2\text{mm}$ et de largeur 25mm . Le module d'Young est $E_s = 70\text{GPa}$, le coefficient de Poisson $\nu_s = 0.33$, la masse volumique $\rho_s = 2700\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$. L'amortissement varie entre deux bornes données dans le tableau 1. Le traitement viscoélastique consiste en un matériau isotrope relativement mou et très amorti et d'une couche rigide en aluminium. Les paramètres du matériau amortissant varient dans les intervalles donnés dans le tableau 1. Les valeurs données pour le facteur de perte sont en réalité le logarithme décimal de l'amortissement hystérétique, celui-ci étant donc donné par $10^{-\eta}$. Le maillage est constitué d'éléments linéaires brique 3D (Q8), avec 5 éléments en largeur (direction y) et 3 éléments par couche en épaisseur (direction z). Trois configurations de traitement viscoélastique sont considérées ici :

- cas symétrique : la couche de contrainte est identique à la poutre initiale,
- cas non symétrique : la couche de contrainte est dans le même matériau que la poutre initiale, mais dont l'épaisseur est de $0,67\text{mm}$,
- cas libre : seule la couche viscoélastique est présente.

Les figures 1 à 3 présentent les parties réelles des nombres d'ondes propagatives pour les trois cas, les

paramètres incertains étant fixés à leurs valeurs médianes $((\text{Min}+\text{Max})/2$ dans le tableau 1). Les courbes ont été obtenues par appariement selon le critère du WAC (*Wave Assurance Criterion* [14]), analogue ondulatoire du critère modal MAC. L'onde de flexion étudiée est représentée en trait continu sur chacune des figures. Son nombre d'onde présente une évolution assez classique d'une poutre sandwich dans le cas symétrique interagissant faiblement avec les autres types d'ondes. Dans les cas asymétrique et libre, on observe une inflexion de la courbe entre 10 et 15 kHz, traduisant une forte interaction (*veering*) avec d'autres types d'ondes apparaissant dans cette zone. Cet effet s'accompagne d'une localisation des déformations dans le matériau viscoélastique, qui est la partie la plus souple.

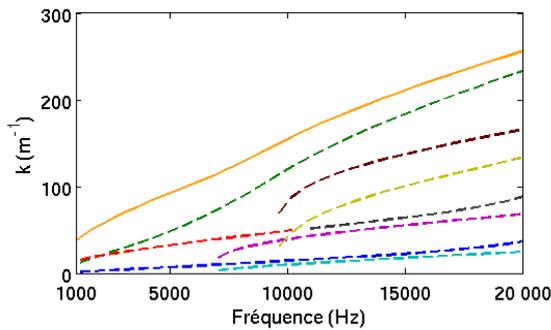


FIGURE 1 – Partie réelle des nombre d'ondes propagatives pour le traitement contraint, cas symétrique.

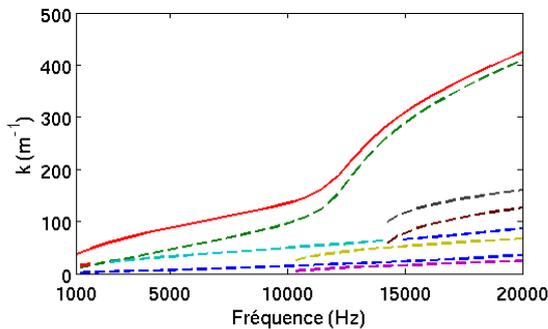


FIGURE 2 – Partie réelle des nombre d'ondes propagatives pour le traitement contraint, cas non symétrique.

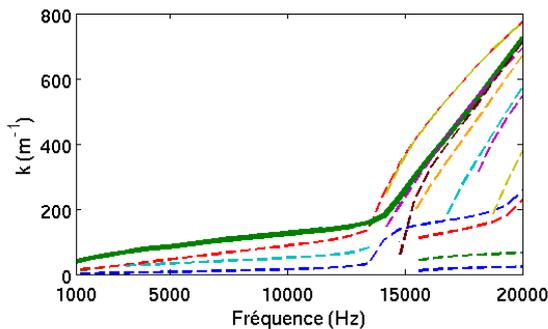


FIGURE 3 – Partie réelle des nombre d'ondes propagatives pour le traitement libre.

4.2 Analyse FAST

Une étude FAST a été réalisée sur l'atténuation de l'onde de flexion principale dans la poutre pour les trois cas, les paramètres variant uniformément entre les bornes indiquées dans le tableau 1. Les résultats sont présentés entre 1 kHz et 20 kHz. L'atténuation de l'onde est représentée par l'indice

$$\gamma = \exp((\text{Im}(k)), \quad (14)$$

où k est le nombre d'onde, dont la partie imaginaire est nécessairement négative pour des raisons de conservation d'énergie. Ceci correspond au facteur appliqué à l'amplitude de l'onde par une propagation sur une distance d'1 m. Une onde non atténuée aura un γ proche de 1, alors que $\gamma \geq 0$ indique une onde évanescence.

TABLEAU 1 – Variation des paramètres pour les analyses FAST.

Paramètre	Description	Unité	Min.	Max.
η_s	Facteur de perte structure	-	-3	-2.3
E_c	Module d'Young traitement	MPa	10	50
ρ_c	Masse volumique traitement	kg.m ⁻³	920	990
h_c	Épaisseur traitement	mm	2	5
η_c	Facteur de perte traitement	-	-1.6	-1.1

4.2.1 Cas symétrique

Les indices de sensibilité pour les 5 paramètres incertains sont présentés figure 4 dans le cas du sandwich symétrique. La somme des indices du premier ordre est proche de 1, ce qui montre qu'il existe peu d'interactions entre paramètres (au sens statistique) dans ce modèle. Le paramètre dominant dans la plus grande partie de la gamme de fréquence est l'amortissement du cœur viscoélastique, sauf dans deux zones, entre 5 et 8 kHz et au delà de 15 kHz, où cette influence est partagée avec le module d'Young du traitement et son épaisseur. Ceci peut s'expliquer par la présence d'autres ondes propagatives dans la partie haute fréquences, mais est plus difficile à interpréter pour la partie moyenne fréquence. La figure 5 indique que cette zone entre 5 et 8 kHz correspond à une chute de l'indice d'atténuation. Dans le cas symétrique, l'écart type sur l'indice d'atténuation varie assez peu en fonction de la fréquence, entre 5 et 15 %. Enfin, il est à noter que dans ce cas, l'amortissement de la structure n'a que très peu d'influence sur l'atténuation de l'onde, n'approchant 10 % qu'aux alentours de 2500 Hz. La masse du traitement n'a quant à elle aucun effet sur l'atténuation.

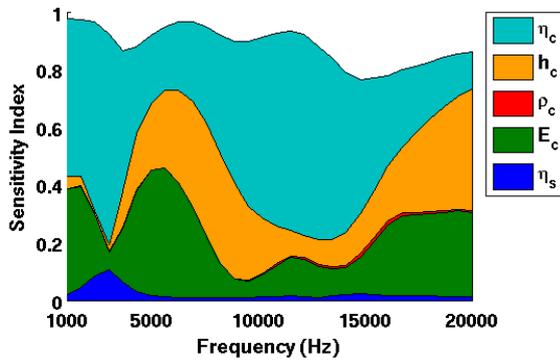


FIGURE 4 – Indices de sensibilité pour le traitement contraint, cas symétrique.

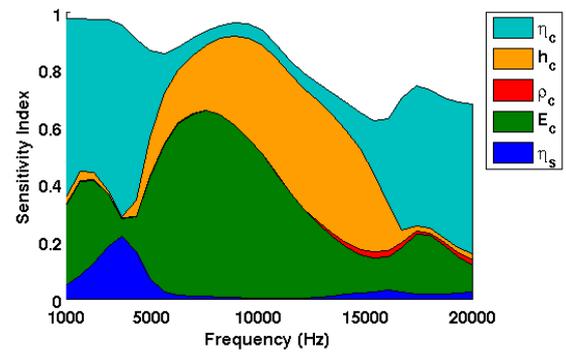


FIGURE 6 – Indices de sensibilité pour le traitement contraint, cas non symétrique.

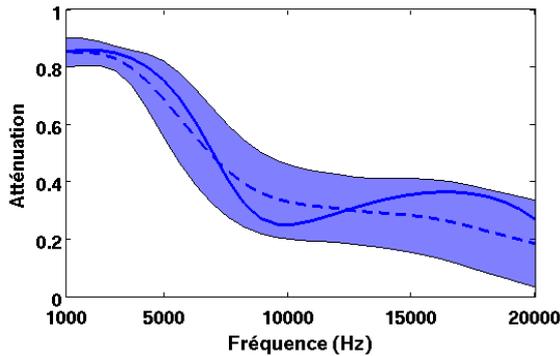


FIGURE 5 – Cas symétrique. Atténuation de l'onde de flexion après 1 m. Lignes — : valeurs médianes, -- moyenne, surface : moyenne \pm écart type.

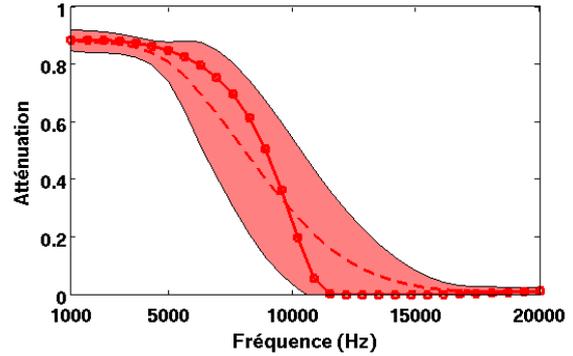


FIGURE 7 – Cas non symétrique. Atténuation de l'onde de flexion après 1 m. Lignes -o : valeurs médianes, -- moyenne, surface : moyenne \pm écart type.

4.2.2 Cas asymétrique

Les indices du premier ordre sont présentés en figure 6. On observe comme dans le cas symétrique une prépondérance de l'amortissement du matériau viscoélastique en basse fréquence, en dessous de 5 kHz, partagé avec le module d'Young et l'amortissement de la structure. Les deux paramètres les plus influents entre 5 et 15 kHz sont le module d'Young du matériau viscoélastique et l'épaisseur du traitement. Cette zone est également celle qui présente la variance la plus importante (Figure 7). En haute fréquence, l'amortissement du traitement redevient prépondérant, mais la somme des ME s'écartant de 1, des interactions entre paramètres existent. L'indice d'atténuation devient très faible, ce qui indique que l'onde devient évanescence, à partir de 12 kHz avec les valeurs médianes des paramètres, après 15 kHz en moyenne. Au delà, la variance étant très faible, l'influence des paramètres observés est limitée.

4.2.3 Cas libre

Les valeurs de ME pour le cas du traitement non contraint sont présentées en figure 8. Par rapport aux deux cas de traitement contraint, on observe une prépondérance de l'amortissement de la structure dans la partie basse de la gamme de fréquences, entre 1000 et 5000 Hz, tempérée toutefois par la faible variance dans cette zone (Figure 9). Au delà on observe comme précédemment que l'épaisseur de la couche viscoélastique et son module d'Young dominent la variabilité de l'indice d'atténuation. Cependant, la somme des ME y étant largement inférieure à 1, d'importantes

interactions statistiques existent entre des paramètres, où l'influence de l'amortissement du matériau viscoélastique peut se retrouver.

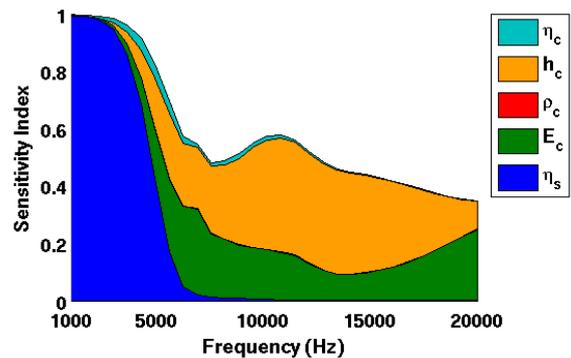


FIGURE 8 – Indices de sensibilité pour le traitement libre.

5 Conclusion

Ce travail présente une application de la méthode d'analyse de sensibilité FAST à un indice d'atténuation d'une onde de flexion dans une poutre munie d'un traitement amortissant viscoélastique. Sur les trois types de traitements considérés, seul le cas contraint symétrique présente une influence notable de l'amortissement dû au traitement dans toute la gamme de fréquence 1-20 kHz. L'influence de la configuration du traitement (épaisseur, raideur) peut souvent s'expliquer par l'interaction de l'onde de flexion étudiée avec d'autres formes d'ondes lors de *veerings* ou

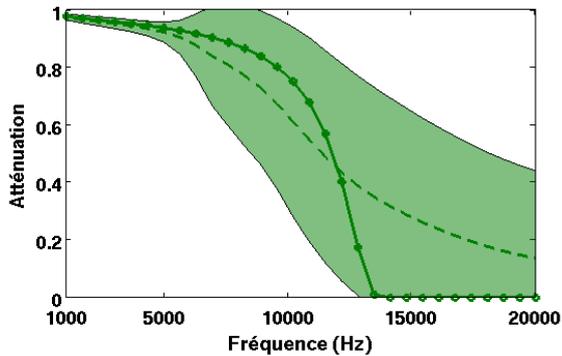


FIGURE 9 – Cas libre. Atténuation de l’onde de flexion après 1 m. Lignes -o : valeurs médianes, -- moyenne, surface : moyenne \pm écart type.

de localisation des déformées d’onde dans la partie souple de la structure. Les structures considérées présentant en haute fréquence une grande richesse de solutions d’ondes propagatives. La structure asymétrique présente également une grande influence de l’amortissement, mais partagée avec l’épaisseur et le module d’Young du traitement.

L’amortissement de la structure porteuse est rarement le paramètre prépondérant, hormis en basses fréquences avec un traitement libre, lorsque l’onde est très faiblement atténuée. Ce résultat est intéressant dans le cadre de la conception d’un traitement amortissant en présence d’incertitudes sur la structure porteuse, l’amortissement étant un paramètre notoirement délicat à mesurer.

Le choix d’un traitement libre ou contraint change énormément le comportement de la structure vis à vis de l’atténuation de l’onde de flexion. Dans tous les cas, on observe une onde faiblement atténuée en basses fréquences et très atténuée en haute fréquence, mais la transition entre les deux états est extrêmement variable selon la configuration et les valeurs des paramètres choisis. Le cas contraint symétrique présente une faible variance, tandis que l’atténuation dans le cas libre montre une variance très élevée en haute fréquence, illustrant l’intérêt de l’analyse de sensibilité pour connaître les origines de cette variabilité.

Remerciements

Les auteurs remercient Airbus Defence and Space pour leur soutien financier.

Références

- [1] V. Giurgiutiu. *Structural health monitoring : with piezoelectric wafer active sensors*. Academic Press, 2007.
- [2] F. Bloch. Über die Quantenmechanik der Elektronen in Kristallgittern. *Zeitschrift für Physik*, 52(7-8) :555–600, 1929.
- [3] D. Duhamel, B. R. Mace, and M. J. Brennan. Finite element analysis of the vibration of waveguides and periodic structures. *J. Sound Vib.*, 294 :205–220, 2006.
- [4] J. M. Mencik and M. N. Ichchou. Multi-mode propagation and diffusion in structures through finite elements. *Eur. J. Mech. A–Solid*, 24(5) :877–898, 2005.
- [5] C. Droz, J.-P. Lainé, M.N. Ichchou, and G. Inquiété. A reduced formulation for the free-wave propagation analysis in composite structures. *Compos. Struct.*, 113 :134–144, 2014.
- [6] A. Saltelli, S. Tarantola, and K. P.-S. Chan. A quantitative model-independent method for global sensitivity analysis of model output. *Technometrics*, 41(1) :39–56, 1999.
- [7] R. I. Cukier, C. M. Fortuin, K. E. Shuler, A. G. Petschek, and J. H. Schaibly. Study of the sensitivity of coupled reaction systems to uncertainties on rate coefficients. I. Theory. *Journal of Chemical Physics*, 59(8) :3873–3878.
- [8] Morvan Ouisse, Mohamed Ichchou, Slaheddine Chedly, and Manuel Collet. On the sensitivity analysis of porous material models. *Journal of Sound and Vibration*, 331(24) :5292 – 5308, 2012.
- [9] J.-L. Christen, M. Ichchou, B. Troclet, O. Bareille, and M. Ouisse. Global sensitivity analysis of analytical vibroacoustic transmission models. *Journal of Sound and Vibration*, 368 :121 – 134, 2016.
- [10] D. J. Mead. A general theory of harmonic wave propagation in linear periodic systems with multiple coupling. *Journal of Sound and Vibration*, 27(2) :235–260, 1973.
- [11] L. Houillon. *Modélisation vibratoire des carrosseries automobiles en moyennes et hautes fréquences*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 1999.
- [12] W. Hoeffding. A class of statistics with asymptotically normal distribution. *The annals of Mathematical Statistics*, 19 :293–325, 1948.
- [13] G. J. McRae, J. W. Tilden, and J. H. Seinfeld. Global sensitivity analysis –a computational implementation of the Fourier amplitude sensitivity test (FAST). *Computers and chemical engineering*, 6(1) :15–25, 1982.
- [14] C. Droz, C. Zhou, M.N. Ichchou, and J.-P. Lainé. A hybrid wave-mode formulation for the vibro-acoustic analysis of 2d periodic structures. *Journal of Sound and Vibration*, 363 :285 – 302, 2016.