

## CFA/VISHNO 2016

**Couplage Wave Finite Element Method (WFEM) et Finite Element Method (FEM) pour le calcul de la réponse forcée d'un rail infini à section complexe supporté périodiquement**

T. Gras<sup>a,b</sup>, M.A. Hamdi<sup>b</sup> et M. Ben Tahar<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Railenium, Institut de Recherche Technologique Railenium, Espace Technopôle Le Mont Houy - RD 958, 60200 Compiègne, France

<sup>b</sup>Sorbonne universités, Université de Technologie de Compiègne, Laboratoire Roberval, UMR CNRS 7337, CS 60319, 60203 Compiègne, France  
thibaut.gras@railenium.eu



LE MANS

Le bruit de roulement est une problématique essentielle des nuisances acoustiques dans le ferroviaire. Au point de contact roue/rail, la voie et la roue vibrent pour émettre le bruit de roulement à des vitesses de circulation usuelles. La réceptance (rapport déplacement/force) au point de contact est une donnée primordiale pour la prédiction du bruit de roulement. Le rail est relié aux traverses par des systèmes d'attache, espacés de manière périodique et comprenant des semelles en élastomère. Une variation des paramètres de raideur de l'attache modifie la propagation des ondes le long de la voie et influe donc sur le bruit de roulement.

Pour le calcul de la réponse dynamique du rail, le principe de périodicité est utilisé pour ne modéliser qu'une cellule unitaire représentant un rail entre deux supports. Une méthode de calcul est proposée pour faciliter la condensation de la matrice de raideur dynamique d'une cellule unitaire de rail à section complexe sur supports périodiques. La condensation est la première étape de résolution du problème périodique en vue d'obtenir la réponse forcée de la structure globale. La partie non supportée du rail est modélisée par Wave Finite Element Method (WFEM) et la partie supportée y est couplée par Finite Element Method (FEM). Ce couplage permet d'améliorer le temps de calcul de la condensation de la cellule unitaire et permet une modification simple des supports pour le calcul des ondes périodiques.

## 1 Introduction

Le bruit de roulement est une problématique essentielle des nuisances acoustiques dans le ferroviaire. Le contact roue/rail entraîne la vibration de l'ensemble voie/roue pour émettre le bruit de roulement aux vitesses de circulation usuelles. Le spectre d'émission est généralement compris entre 50 Hz et 5000 Hz. La voie est constituée d'un rail reposant de manière périodique sur des semelles en élastomère, de traverses et d'une couche de ballast. Les semelles lient le rail aux traverses et constituent une partie essentielle de la voie car elles permettent une atténuation de la propagation des ondes. La réceptance (rapport déplacement/force) au point de contact est une donnée primordiale pour la prédiction du bruit de roulement [1]. Une variation des paramètres de raideur de l'attache modifie la réponse dynamique de la voie et influe donc sur le bruit de roulement. Pour calculer la réponse dynamique d'une voie ferrée infinie, le principe de périodicité basé sur la théorie de Mead [2] a souvent été utilisé. Ce principe a servi de base que ce soit pour des modèles analytiques de voie [3] ou des modèles à section de rail en éléments finis [4, 5, 6]. Pour calculer la propagation des ondes périodiques le long d'un rail par éléments finis, il est nécessaire de condenser la matrice de raideur dynamique d'une cellule périodique du rail, c'est à dire d'exprimer les degrés de liberté internes en fonctions des degrés de liberté aux interfaces de la cellule du rail.

Dans cet article, une méthode de condensation est proposée par couplage entre une partie non supportée du rail modélisée par Wave Finite Element Method (WFEM) avec la partie supportée (comprenant l'attache) modélisée par Finite Element Method (FEM). Ce couplage permet une modification simple des supports à moindre coût pour le calcul des ondes périodiques. Une technique de condensation sans approximation est proposée et comparée à la condensation par réduction modale.

## 2 Modélisation des structures périodiques

### 2.1 Condensation des matrices de raideur dynamique des cellules unitaires

Une structure périodique est constituée d'éléments identiques couplés par plusieurs degrés de liberté aux interfaces (Fig. 1). La cellule unitaire  $E_n$  est un élément périodique répété autant de fois qu'il y a de sous-structures

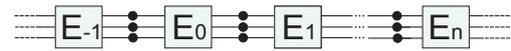


FIGURE 1 – Structure périodique multi-couplée

dans le système. Il est possible de distinguer les degrés de liberté de couplage notés respectivement  $q_L$  et  $q_R$  de la cellule unitaire et  $q_i$  ses degrés de liberté internes. Les forces de couplage aux interfaces de la cellule unitaire sont notées  $F_L$  et  $F_R$  (Fig. 2).

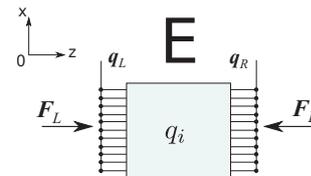


FIGURE 2 – Déplacements et forces aux interfaces d'une cellule unitaire

La matrice de raideur dynamique  $\tilde{D}$  de la cellule unitaire peut s'écrire sous la forme :

$$\tilde{D} = K + i\omega C - \omega^2 M \quad (1)$$

$K, C, M$  sont les matrices de raideur, amortissement et de masse de la cellule unitaire. Sans présence de forces extérieures, le déplacement harmonique discret peut être écrit comme étant :

$$\begin{bmatrix} \tilde{D}_{LL} & \tilde{D}_{Li} & \tilde{D}_{LR} \\ \tilde{D}_{iL} & \tilde{D}_{ii} & \tilde{D}_{iR} \\ \tilde{D}_{RL} & \tilde{D}_{Ri} & \tilde{D}_{RR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_L \\ q_i \\ q_R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_L \\ 0 \\ F_R \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Il est ainsi possible de condenser la matrice de raideur dynamique en exprimant les déplacements internes par rapport aux déplacements des interfaces. Ce procédé peut être réalisé par une méthode classique de type FEM (Finite Element Method) et constitue la première étape du problème des structures périodiques. La condensation mène à une nouvelle relation entre les déplacements et forces aux interfaces :

$$\begin{bmatrix} D_{LL} & D_{LR} \\ D_{RL} & D_{RR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_L \\ q_R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_L \\ F_R \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Avec :

$$\begin{aligned} D_{LL} &= \tilde{D}_{LL} - \tilde{D}_{Li} \tilde{D}_{ii}^{-1} \tilde{D}_{iL} & D_{LR} &= \tilde{D}_{LR} - \tilde{D}_{Li} \tilde{D}_{ii}^{-1} \tilde{D}_{iR} \\ D_{RL} &= \tilde{D}_{RL} - \tilde{D}_{Ri} \tilde{D}_{ii}^{-1} \tilde{D}_{iL} & D_{RR} &= \tilde{D}_{RR} - \tilde{D}_{Ri} \tilde{D}_{ii}^{-1} \tilde{D}_{iR} \end{aligned} \quad (4)$$

Le calcul de la matrice de raideur dynamique condensée aux interfaces doit être effectué pour chaque fréquence. Ainsi, Le fait de procéder à l'inversion directe de la matrice  $\widetilde{D}_{ii}$  par FEM peut s'avérer couteux en termes de temps de calcul si la cellule unitaire à condenser comprend de nombreux degrés de liberté.

## 2.2 Calcul des modes de propagation d'une cellule unitaire

Le calcul des modes de propagation d'une cellule unitaire est la deuxième étape pour la résolution du problème périodique. Il permet d'obtenir une base de vecteurs qui servira à la réponse forcée du système. Les conditions aux interfaces sont exprimées grâce au théorème de Floquet-Bloch [2]. Il est alors possible d'exprimer les degrés de liberté de couplage d'une interface à l'autre telle que :

$$q_R = q_L e^{-\mu} \quad F_R = -F_L e^{-\mu} \quad (5)$$

Le terme  $\mu$  représente la constante de propagation de la cellule unitaire telle que  $\mu = e^{-ikl}$ , avec  $k$  le nombre d'onde complexe et  $l$  la longueur de la cellule unitaire. La combinaison des Eqs. (3) et (5) mène à :

$$\begin{bmatrix} D_{LL} & D_{LR} \\ D_{RL} & D_{RR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_L \\ q_L e^{-\mu} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_L \\ -F_L e^{-\mu} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Le problème aux valeurs propres généralisé peut être obtenu en exprimant  $q_R$  et  $F_R$  tels que :

$$\left[ \begin{bmatrix} D_{RL} & D_{RR} \\ 0 & I \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} D_{LL} & D_{LR} \\ -I & 0 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} q_L \\ q_R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

En notant  $\lambda_j = e^{-\mu_j}$ , le vecteur propre  $w_j$  associé à la valeur propre  $\lambda_j$  contient les vecteurs propres de déplacement tel que :

$$w_j = \begin{Bmatrix} \phi_{qj} \\ \mu_j \phi_{qj} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

En considérant  $n_c$  le nombre de degrés de liberté d'une interface, il existe ainsi pour chaque fréquence un nombre  $2n_c$  d'ondes libres au sein de la cellule. Les vecteurs propres liés aux forces  $\phi_f$  sont déduits de l'Eq. (6) :

$$\phi_{fj} = (D_{LL} + \lambda_j D_{LR}) \phi_{qj} \quad (9)$$

Il existe un nombre  $2n_c$  de modes de propagation  $\Phi_j$  constituant une base de vecteur propres de la cellule unitaire :

$$\Phi_j = \begin{Bmatrix} \phi_q \\ \phi_f \end{Bmatrix}_j \quad (10)$$

Dans les structures linéaires, les ondes se propagent dans le sens positif et négatif à la même vitesse, les valeurs propres sont ainsi déduites par paires  $\{\lambda_i, \frac{1}{\lambda_i}\}$  [7]. Dans une structure amortie, ces valeurs propres peuvent être réparties en  $n_c$  ondes positives et  $n_c$  ondes négatives. :

- Si  $|\lambda_j| > 1$  l'onde associée se propage dans le sens négatif..
- Si  $|\lambda_j| < 1$  l'onde associée se propage dans le sens positif..

La base des vecteurs propres peut ainsi être séparée entre ondes positives et négatives :

$$\Phi = [\Phi^+ \quad \Phi^-] \quad (11)$$

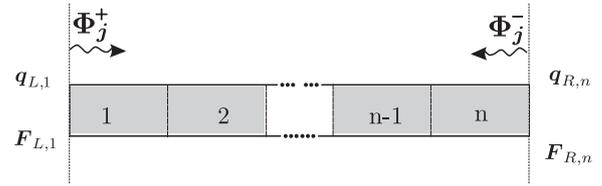


FIGURE 3 – Définition des cellules périodiques du système fini à n cellules

$$\Phi^+ = \begin{bmatrix} \phi_q^+ \\ \phi_f^+ \end{bmatrix} \quad \Phi^- = \begin{bmatrix} \phi_q^- \\ \phi_f^- \end{bmatrix}$$

## 3 Réponse forcée des structures périodiques par WFEM

Soit une structure périodique composée de n cellules, il est possible d'exprimer les déplacements et forces à l'interface gauche et droite de la cellule  $k$  telle que :

$$\begin{Bmatrix} q_{L,k} \\ F_{L,k} \end{Bmatrix} = \sum \Phi_i^+ \lambda_i^{k-1} \psi_i^+ + \Phi_i^- \lambda_i^{n+1-k} \psi_i^- \quad (12)$$

$$\begin{Bmatrix} q_{R,k} \\ -F_{R,k} \end{Bmatrix} = \sum \Phi_i^+ \lambda_i^k \psi_i^+ + \Phi_i^- \lambda_i^{n-k} \psi_i^- \quad (13)$$

Les composantes de forces et du déplacement sont ainsi exprimées selon la base des modes de propagation calculés pour une seule cellule élémentaire du système (Pour une structure infinie, seules les ondes incidentes sont présentes au sein de la structure, il n'y a pas d'ondes retour). En utilisant les Eqs. (12) (13) ainsi que les propriétés d'orthogonalité des vecteurs propres, il est possible d'exprimer les forces aux extrémités par rapport aux déplacements [7] :

$$\begin{Bmatrix} F_{L,1} \\ F_{R,n} \end{Bmatrix} = D_c \begin{Bmatrix} q_{L,1} \\ q_{R,n} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

Avec :

$$D_c = \begin{bmatrix} D_{LL} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_{RR} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{LR} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_{RL} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \phi_q^- \lambda^{n-1} \phi_q^{-1} & \phi_q^+ \lambda \phi_q^{+1} \\ \phi_q^- \lambda \phi_q^{-1} & \phi_q^+ \lambda^{n-1} \phi_q^{+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_q^- \lambda^n \phi_q^{-1} & I \\ I & \phi_q^+ \lambda^n \phi_q^{+1} \end{bmatrix}^{-1} \quad (15)$$

$D_c$  représente la matrice de raideur dynamique de la structure périodique complète condensée aux interfaces. L'avantage de cette formulation réside dans le fait que le temps de calcul nécessaire à cette opération est indépendant du nombre de cellules n.

## 4 Modélisation par couplage FEM-WFEM d'une portion de rail

La condensation de la cellule unitaire, constitue la première étape de résolution du problème périodique en vue d'obtenir la réponse forcée de la structure globale. L'exemple du rail permet de travailler avec une cellule unitaire nécessitant un maillage assez fin (jusque 5000

Hz) et donc comprenant un nombre important de degrés de liberté. Un rail UIC60 est choisi de longueur 0.6m et est supporté par des ressorts modélisant les semelles en élastomères présentes sous le rail. Une application directe de la condensation par FEM de l'Eq. (4) peut s'avérer très couteuse en temps de calcul dans la mesure où il sera nécessaire d'inverser une imposante matrice  $D_{ii}$  à chaque fréquence. Le principe de cet article consiste à considérer la partie non supportée comme étant constituée d'un nombre  $n$  de tranches périodiques et d'y appliquer localement la théorie des structures périodiques pour faciliter la condensation de celle-ci.

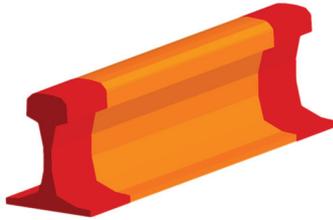


FIGURE 4 – Cellule unitaire du rail UIC 60, en rouge la partie supportée, en orange la partie non supportée

#### 4.1 Condensation de la cellule unitaire par FEM-WFEM

Les semelles sous le rail constituent un appui réparti, cette partie supportée du rail est modélisée par FEM. La partie non supportée du rail est modélisée par WFEM. Pour plus de clarté, la cellule unitaire désignera la portion de rail de 0.6m, les cellules au sein de la partie non supportée seront désignées comme tranches élémentaires de rail. La partie non supportée est donc composée de  $n$  tranches élémentaires périodiques (voir Fig. 5). La condensation de cette cellule unitaire s'effectue en quatre étapes :

- Calcul des vecteurs propres et valeurs propres d'une tranche élémentaire de rail
- Calcul de la matrice de raideur dynamique  $D_c$  de la partie non supportée par WFEM
- Assemblage des trois matrices de raideur dynamique des sous-parties en une matrice  $\tilde{D}_u$

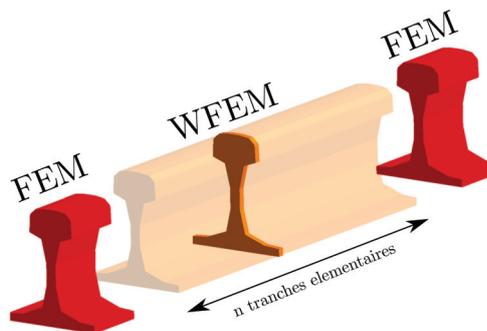


FIGURE 5 – Décomposition FEM-WFEM de la cellule unitaire

- Condensation de la matrice  $\tilde{D}_u$  assemblée pour chaque fréquence

Le calcul des vecteurs propres et valeurs propres d'une tranche élémentaire s'effectue grâce à l'Eq. (6) après condensation de la tranche (étape rapide si la tranche contient peu de nœuds internes). Le calcul de la matrice de raideur dynamique  $D_c$  est calculée grâce à l'Eq. (15). En considérant  $D_A$  et  $D_B$  comme étant les matrices de raideur dynamique des deux parties supportées du rail, l'assemblage des trois matrices est effectuée de la sorte :

$$D_u = L_A^T D_A L_A + L_C^T D_c L_C + L_B^T D_B L_B \quad (16)$$

Avec  $L_A$ ,  $L_C$  et  $L_B$  les matrices booléennes de passage qui expriment les degrés de liberté des sous-structures dans le repère global de la cellule unitaire.

#### 4.2 Comparaison des temps de calcul de la condensation par méthode directe et FEM-WFEM

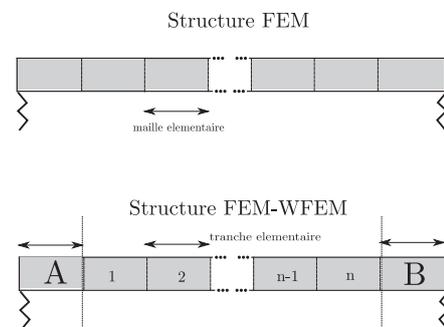


FIGURE 6 – Maillage FEM et FEM-WFEM

La condensation de la cellule unitaire est effectuée par méthode directe de l'Eq. (4) puis par l'intermédiaire du couplage FEM-WFEM de l'Eq. (16). Le calcul est effectué pour une portion de rail de 0.6m, les ressorts sont fixés sur les extrémités de la cellule unitaire. La structure est maillée par éléments finis, une section du rail est maillée avec 309 degrés de liberté et avec des longueurs de mailles élémentaires (distance entre deux sections) qui varient entre 0.2m et 0.01m. La même variation de longueur est appliquée aux tranches élémentaires de la structure couplée. Les résultats du calcul de la condensation pour une seule fréquence sont présentés dans la Fig 7. Dans le cas de la FEM directe, la variation du temps de calcul nécessaire à la condensation de la cellule unitaire apparaît logiquement croissante pour une discrétisation plus fine du maillage. Le temps de calcul varie de 1 seconde pour la longueur de maille élémentaire la plus grande jusqu'à 2900 secondes pour la discrétisation la plus fine comprenant 26049 degrés de liberté. Cependant, dans le cas du couplage WFEM-FEM une diminution de la longueur de tranche élémentaire ne modifie pas le temps de calcul qui ne dépasse pas 3 secondes. Ceci vient du fait que le temps de calcul de la matrice  $D_c$  est indépendant du nombre  $n$  de tranches élémentaires. Dans ce cas d'étude, après l'assemblage des trois matrices, il ne reste pour chaque configuration que deux sections à condenser aux interfaces.

Le couplage WFEM-FEM réduit considérablement le temps de calcul de la condensation par rapport à une méthode

directe et est de plus indépendant du nombre de cellules présentes à l'intérieur du guide non supporté.

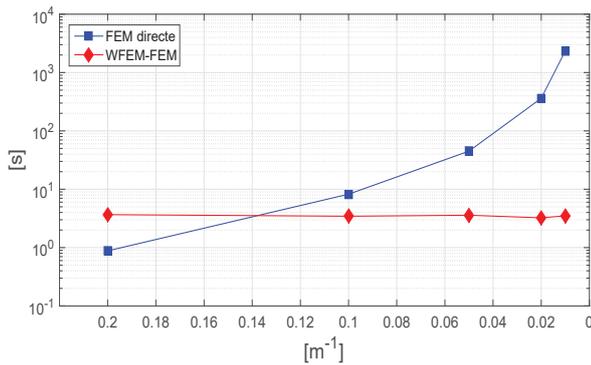


FIGURE 7 – Temps de calcul pour la condensation de la cellule unitaire à une fréquence en fonction de la taille de maille élémentaire

## 5 FRF de la cellule unitaire

Afin de montrer l'exactitude de la condensation réalisée par cette méthode de couplage, la FRF de la cellule unitaire est calculée pour la portion de rail condensée par les deux méthodes. Le maillage le plus fin est utilisé, soit une longueur de maille de 0.01m. Une force verticale est appliquée au sommet du rail sur la section extérieure gauche, la réponse est observée en ce même point telle que :

$$\mathbf{q} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{F} \quad (17)$$

Avec  $\mathbf{D}$  la matrice de raideur dynamique condensée de la portion de rail,  $\mathbf{F}$  le vecteur force et  $\mathbf{q}$  le vecteur déplacement. La Fig. 8 représente la réceptance de la portion de rail, c'est à dire le rapport entre le déplacement et la force excitatrice. La réponse de la structure couplée converge bien vers la réponse par FEM et confirme l'intérêt du couplage pour le calcul de la matrice de raideur dynamique condensée de la cellule unitaire.

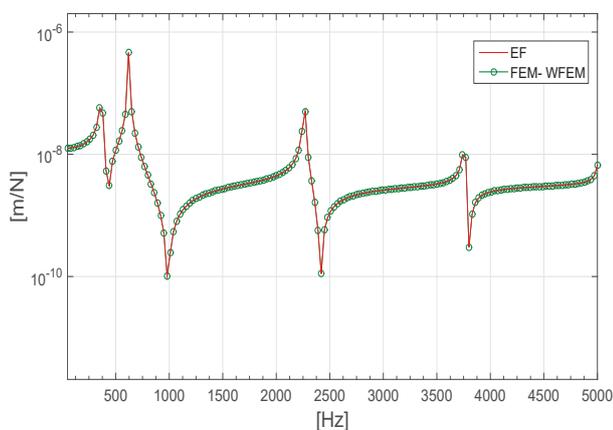


FIGURE 8 – FRF de la cellule unitaire par méthode directe FEM et par couplage FEM-WFEM

Il est possible de diminuer le temps de calcul de la matrice  $\mathbf{D}_c$  de l'Eq. (15) en réduisant le nombre de modes  $\phi_q^+$  et  $\phi_q^-$  de la tranche élémentaire [8]. Cette réduction modale peut être effectuée en prenant en compte les modes

qui participent le plus à la réponse totale du système ou encore en sélectionnant directement les constantes de propagation les plus propagatives. La Fig. 9 représente la FRF de la structure avec une sélection de 40 modes (20 modes positifs et 20 modes négatifs) sur les 612 possibles puis de 20 modes (10 modes positifs et 10 modes négatifs). Les réponses sont comparées à la solution FEM. Une réduction à 20 modes semble trop restrictive pour reconstituer la réponse. Cependant, la réponse réduite à 40 modes converge correctement vers la réponse FEM. Une réduction de 90% du nombre de modes de tranches permet de reconstituer de manière satisfaisante la réponse de la cellule unitaire et donc d'assurer une condensation cohérente de la cellule unitaire qui servira de base au problème périodique global.

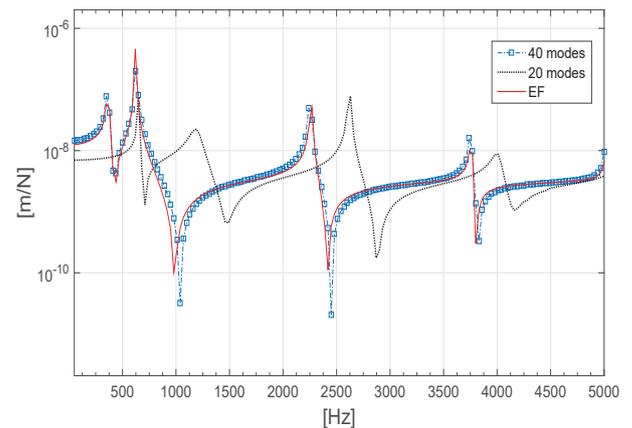


FIGURE 9 – FRF de la cellule unitaire par méthode directe FEM et par couplage FEM-WFEM avec réduction modale

## 6 Conclusion

Une approche par couplage FEM-WFEM a été mise en place dans le but de condenser aux interfaces une cellule unitaire de rail comportant un nombre important de degrés de liberté. Les parties FEM modélisent les parties supportées du rail. La partie WFEM qui y est couplée modélise la partie non-supportée du rail. La condensation de cette partie est réalisée en calculant les modes de propagation d'une tranche élémentaire de rail. La partie WFEM offre l'avantage d'un temps de calcul pour la condensation indépendant du nombre de cellules qui la compose. Une comparaison temps de calcul a montré l'intérêt de cette approche par rapport à une condensation directe par FEM si la cellule à condenser comporte un nombre important de tranches élémentaires. La FRF de la matrice condensée a montré qu'il était possible de réduire le nombre de modes des tranches élémentaires tout en convergeant vers la réponse FEM de la cellule unitaire, ainsi la cellule unitaire peut être correctement condensée en utilisant un nombre de modes de tranches réduits. La condensation de la cellule unitaire pourra servir pour les étapes suivantes du problème périodique, à savoir le calcul des modes de propagation de la cellule unitaire et l'utilisation de ces modes comme base pour la réponse forcée du rail infini sur supports périodiques.

## Références

- [1] S. L. Grassie, R. W. Gregory, D. Harrison, and K. L. Johnson, "The Dynamic Response of Railway Track to High Frequency Vertical Excitation", *Journal of Mechanical Engineering Science*, 24, 77-90, (1982).
- [2] D.J. Mead, "A general theory of harmonic wave propagation in linear periodic systems with multiple coupling", *Journal of Sound and Vibration*, Volume 27, Issue 2, 235-260, (1973).
- [3] J.F. Hamet, "Railway noise : Use of the Timoshenko model in rail vibration studies", *Acustica*, 85, 54-62, (1999).
- [4] L. Gry, "Dynamic modelling of railway track based on wave propagation", *Journal of Sound and Vibration*, Volume 195, Issue 3, Pages 477-505,(1996).
- [5] D.J. Thompson, "Wheel-rail Noise Generation, Part III : Rail Vibration", *Journal of Sound and Vibration*, Volume 161, Issue 3, 421-446, (1993).
- [6] G.P. Brown, K.P. Byrne, "Determining the response of infinite, one-dimensional, non-uniform periodic structures by substructuring using waveshape coordinates", *Journal of Sound and Vibration*, Volume 287, Issue 3, 505-523, (2005).
- [7] Duhamel, D., Mace, B.R. and Brennan, M.J. "Finite element analysis of the vibrations of waveguides and periodic structures", *Journal of Sound and Vibration*, 294, (1-2), 205-220, (2006).
- [8] J.-M. Mencik, D. Duhamel, "A wave-based model reduction technique for the description of the dynamic behavior of periodic structures involving arbitrary-shaped substructures and large-sized finite element models", *Finite Elements in Analysis and Design*, Volume 101,(2015).