

CFA/VISHNO 2016

Imagerie de Défauts dans un guide d'ondes élastiques en régime temporel à partir de données en surfaceA. Recoquillay^a, V. Baronian^a et L. Bourgeois^b^aCEA List, Centre de Saclay, 91190 Gif-Sur-Yvette, France^bLaboratoire POEMS, UMR ENSTA/CNRS/INRIA, ENSTA ParisTech, 32 boulevard Victor, 75739 Paris, France

arnaud.recoquillay@ensta-paristech.fr



LE MANS

Nous nous intéressons ici à l'imagerie de défauts dans un guide d'ondes acoustiques ou élastiques. La Linear Sampling Method [1] dans sa formulation modale permet la détection de défauts dans ce cas à partir de données sur les sections du guide pour des ondes en régime harmonique, sa précision augmentant avec la fréquence et donc le nombre de modes propagatifs. Nous proposons ici une généralisation de cette méthode à des sollicitations et des mesures à la surface du guide et une dépendance temporelle quelconque dans un guide bidimensionnel.

1 Introduction

Les guides d'ondes sont des structures fortement représentées dans le milieu industriel : par exemple, les tuyaux, les plaques et les rails en font partie. Leur particularité est que les ondes s'y propagent sur de longues distances avec peu d'atténuation. Ainsi, le contrôle non destructif des guides d'ondes peut être réalisé pour de larges zones en une fois à partir de la mesure de ces ondes. Toutefois, la décomposition selon les modes entraîne une dispersion des ondes, rendant difficiles l'interprétation des signaux et l'application des méthodes usuelles dès que le nombre de modes augmente, à savoir aux hautes fréquences. C'est pourquoi il est nécessaire d'utiliser une méthode prenant en compte la décomposition modale adaptée aux fréquences élevées afin de détecter de petits défauts tels que des fissures. C'est le cas de la Linear Sampling Method dans sa formulation modale, introduite dans [2] en acoustique et [3] en élasticité. Les défauts de cette méthode sont, comme nous allons le voir, de nécessiter des sollicitations et des mesures internes au guide et d'être limitée au régime harmonique. Pour avoir un cadre d'application plus réaliste, nous étendons ici [8] cette méthode à des sollicitations et des mesures en surface et au régime temporel pour le guide d'ondes acoustiques. Pour ce faire, nous réalisons une transformée de Fourier de nos données, ce qui nous conduit à résoudre le problème en régime harmonique pour un ensemble discret de fréquences. Remarquons qu'une autre approche a été proposée dans [4], où le problème est résolu directement en régime temporel.

Nous nous concentrons ici sur le guide d'ondes acoustiques : dans une première partie, nous allons présenter la Linear Sampling Method modale, puis son extension aux données surfaciques et au domaine temporel dans une deuxième partie. Enfin, nous présenterons quelques résultats numériques.

Soit $W = \mathbb{R} \times (0, d)$ un guide d'ondes avec $d > 0$ sa hauteur. Nous noterons $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_d$ sa surface, Σ une section transverse et ν la normale unitaire orientée vers l'extérieur. Posons f une fonction de x_1 à support compact et χ une fonction du temps, causale et à support compact. Soient D un obstacle impénétrable, $\bar{D} \subset W$ et $\Omega = W \setminus \bar{D}$. Nous supposons par ailleurs qu'il existe $R > 0$ tel que le défaut D soit inclus dans la portion de guide comprise entre les sections $\Sigma_{\pm R}$ d'abscisses $-R$ et R . Le champ acoustique v est solution du problème de diffraction :

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \partial_t^2 v - \Delta v = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \\ \partial_\nu v = f\chi & \text{sur } \Gamma_d \times (0, +\infty), \\ \partial_\nu v = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, +\infty), \\ v = 0 & \text{sur } \partial D \times (0, +\infty), \\ v = 0 & \text{sur } \Omega \times \{0\}, \\ \partial_t v = 0 & \text{sur } \Omega \times \{0\}. \end{cases} \quad (1)$$

La fonction χ étant fixée, le support de la fonction f sera centré autour d'un point source décrivant une grille régulière sur Γ_d . Nous voulons alors, à partir de la mesure de v en différents points de réception de la surface Γ_d pour les différents points source, obtenir une image du défaut D . Pour cela, nous allons partir de la Linear Sampling Method modale et développer notre méthode étape par étape.

2 La Linear Sampling Method modale

Considérons le nombre d'onde k et introduisons quelques notations : soit le problème transverse

$$\begin{cases} \Delta_\perp \theta + k^2 \theta = 0 & \text{dans } \Sigma, \\ \partial_\nu \theta = 0 & \text{sur } \partial \Sigma. \end{cases} \quad (2)$$

Nous noterons (k_n^2, θ_n) les couples de valeurs propres et vecteurs propres de ce problème ($k_n^2 = n^2 \pi^2 / d^2$). $\beta_n = \sqrt{k^2 - k_n^2}$ sera appelé le nombre d'onde du mode n et θ_n la n -ème fonction transverse. Notons qu'il existe un nombre fini N de modes propagatifs (β_n réel) et un nombre infini de modes évanescents (β_n imaginaire pur). Enfin, un mode a pour expression

$$u_n^\pm(x_1, x_2) = \theta_n(x_2) e^{\pm i \beta_n x_1},$$

le signe faisant référence au sens de propagation selon l'axe du guide.

Notons $u_n^{s\pm}$ le champ diffracté associé au mode u_n^\pm . Celui-ci est alors solution du problème de diffraction

$$\begin{cases} \Delta u_n^{s\pm} + k^2 u_n^{s\pm} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \partial_\nu u_n^{s\pm} = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ u_n^{s\pm} = -u_n^\pm & \text{sur } \partial D, \\ (CR), \end{cases} \quad (3)$$

avec (CR) une condition de radiation qui régit le comportement du champ à l'infini. Nous pouvons désormais introduire la matrice de scattering \mathcal{S} , dont les coefficients sont les projections sur les sections $\Sigma_{\pm R}$ des champs diffractés associés aux modes propagatifs selon les fonctions transverses θ_n . Cette matrice peut être décomposée en 4 blocs suivant la section sur laquelle a lieu la projection et le sens de propagation du mode considéré :

$$u_n^+|_{\Sigma_{\pm R}} = \sum_{m \geq 0} S_{mn}^{++} \theta_m, \quad u_n^-|_{\Sigma_{\pm R}} = \sum_{m \geq 0} S_{mn}^{-\pm} \theta_m,$$

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} S^{+-} & S^{--} \\ S^{++} & S^{-+} \end{pmatrix}$$

Cette matrice est donc de taille $2N \times 2N$.

La LSM modale consiste alors en la résolution du système

$$\mathcal{S} \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} h = \begin{pmatrix} G^-(z) \\ G^+(z) \end{pmatrix},$$

avec K la matrice diagonale $N \times N$, de coefficients $e^{i\beta_n R}/2i\beta_n$ et

$$\begin{cases} G_m^-(z) = \frac{e^{i\beta_m(R+z_1)}}{2i\beta_m} \theta_m(z_2), \\ G_m^+(z) = \frac{e^{i\beta_m(R-z_1)}}{2i\beta_m} \theta_m(z_2), \end{cases}, \quad m = 0, \dots, N-1, \quad (4)$$

et ce pour chaque point z de l'échantillonnage de la portion de guide à tester. D'après [2], la fonction $\psi(z) = 1/||h(z)||$ est alors une fonction caractéristique du défaut.

Pour résoudre ce système, il est donc nécessaire de construire la matrice de scattering, ce qui nécessite de connaître le champ sur deux sections de part et d'autre de la portion de guide à tester.

Notons que, comme mentionné dans [2], au cas où l'accès est limité à un côté de la portion à contrôler : le système est alors, si nous nous plaçons par exemple à gauche du défaut

$$S^{+-} K \tilde{h} = G^-(z).$$

3 Extension aux sources et mesures surfaciques

Nous considérons à présent une source sur le bord de notre guide. Le problème s'écrit alors

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{dans } W, \\ \partial_\nu u = \phi & \text{sur } \Gamma_d, \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ u = 0 & \text{sur } \partial D, \\ (CR) \end{cases} \quad (5)$$

La solution de ce problème est la somme d'un champ incident u^i et d'un champ diffracté u^s .

Commençons par exprimer le champ incident u^i . Celui-ci est solution du problème de propagation dans le guide sans défaut

$$\begin{cases} \Delta u^i + k^2 u^i = 0 & \text{dans } W, \\ \partial_\nu u^i = \phi & \text{sur } \Gamma_d, \\ \partial_\nu u^i = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ (CR) \end{cases} \quad (6)$$

Soit $y = (y_1, d)$, $y_1 \in \mathbb{R}$. Alors la fonction

$$G(x, y) = - \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2i\beta_n} e^{i\beta_n |x_1 - y_1|} \theta_n(d) \theta_n(x_2)$$

est solution de (5) avec $\phi = \delta_{y_1}$. Nous en déduisons que la solution de (6) pour ϕ une fonction suffisamment régulière est

$$u^i(x_1, x_2) = - \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2i\beta_n} \theta_n(x_2) \theta_n(d) \int_{\mathbb{R}} e^{i\beta_n |x_1 - y_1|} \phi(y_1) dy_1$$

Enfin, le champ diffracté u^s est solution du problème de diffraction suivant

$$\begin{cases} \Delta u^s + k^2 u^s = 0 & \text{dans } W, \\ \partial_\nu u^s = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ u^s = -u^i & \text{sur } \partial D, \\ (CR) \end{cases} \quad (7)$$

Nous considérons à présent une configuration réaliste, à savoir où les points source et les points de mesure sont éloignés du défaut. Pour cela, introduisons les points $x_1^{s\pm} = \pm(R + s\delta)$, avec $\delta > 0$ et $s = 0, \dots, M-1$, $M \geq N$. On suppose

que $\phi = g(\cdot - x_1^{s\pm})$ avec g une fonction paire. Nous avons deux possibilités, suivant que la source se trouve à gauche ou à droite le défaut. Nous ne traiterons ici que le cas où la source se situe à gauche, l'autre cas étant analogue. Puisque $x_1^{s-} = -(R + s\delta)$, nous pouvons écrire

$$u^i = - \sum_{n \geq 0} \frac{e^{i\beta_n R}}{2i\beta_n} \alpha_n \theta_n(d) e^{i\beta_n \delta} u_n^+,$$

avec $\alpha_n = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\beta_n z} g(z) dz$.

Par linéarité, nous avons l'expression suivante pour le champ diffracté :

$$u^s = - \sum_{n \geq 0} \frac{e^{i\beta_n R}}{2i\beta_n} \alpha_n \theta_n(d) e^{i\beta_n \delta} u_n^{s+},$$

Nous avons à nouveau deux possibilités, suivant que le point de mesure considéré se trouve à gauche ou à droite du défaut. Nous ne considérerons que le cas où la mesure se trouve après le défaut. Nous avons à présent besoin du lemme suivant, prouvé dans [2], pour lier les données à la surface à celles dans la section :

Lemme Pour tout s et tout $h \in H^{1/2}(\Sigma_s)$, le problème

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{dans } (s, +\infty) \times (0, d), \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sur } (s, +\infty) \times (\{0\} \cup \{d\}), \\ u = h & \text{sur } \Sigma_s, \\ (CR) \end{cases} \quad (8)$$

possède une unique solution dans $H^1((s, t) \times (0, d))$ pour tout $t > s$

$$u(x_1, x_2) = \sum_{n \geq 0} (h, \theta_n)_s e^{i\beta_n (x_1 - s)} \theta_n(x_2),$$

avec $(\cdot, \cdot)_s$ le produit scalaire sur $L^2(\Sigma_s)$.

Nous pouvons appliquer ce lemme aux champs diffractés correspondants aux différents modes :

$$\begin{aligned} u_n^{s+}(x_1^{r+}, d) &= \sum_{m \geq 0} (u_n^{s+}(R, \cdot), \theta_m)_R e^{ir\beta_m \delta} \theta_m(d) \\ &= \sum_{m \geq 0} S_{mn}^{++} e^{ir\beta_m \delta} \theta_m(d). \end{aligned}$$

En injectant cette relation dans l'expression du champ diffracté et en tronquant les sommes en ne considérant que les modes propagatifs (nos points étant loin du défaut, nous supposons que toute l'information est portée par les modes propagatifs), nous obtenons la matrice de mesure \mathcal{M} . Par exemple, le terme général du bloc M^{++} correspondant à la mesure r associée à la source s s'écrit

$$\begin{aligned} M_{rs}^{++} &= u^s(x_1^{r+}, d) \\ &= - \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} e^{ir\beta_m \delta} \theta_m(d) \frac{e^{i\beta_n R}}{2i\beta_n} S_{mn}^{++} \alpha_n \theta_n(d) e^{i\beta_n \delta}. \end{aligned}$$

Nous pouvons alors écrire ce système matriciellement : Soient V la matrice de Vandermonde de taille $M \times N$,

$$V_{mn} = e^{im\beta_n \delta}, \quad m = 0, \dots, M-1, \quad n = 0, \dots, N-1,$$

et A et T les matrices diagonales de taille $N \times N$ dont les coefficients sont respectivement α_n et $\theta_n(d)$. La relation devient

$$M^{++} = -(VT)(S^{++}K)(VTA)^T.$$

En appliquant le même raisonnement aux trois autres configurations nous obtenons finalement

$$M = -\mathcal{R}U\mathcal{E}^T$$

avec

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} M^{+-} & M^{--} \\ M^{++} & M^{+-} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R} = \begin{pmatrix} VT & 0 \\ 0 & VT \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{U} = \mathcal{S} \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E} = \begin{pmatrix} (VTA)^T & 0 \\ 0 & (VTA)^T \end{pmatrix},$$

\mathcal{M} étant donc de taille $2M \times 2M$.

Connaissant \mathcal{M} , nous pouvons donc ensuite calculer \mathcal{U} par inversion de \mathcal{R} et \mathcal{E} et utiliser la LSM modale. L'inversion de \mathcal{R} et \mathcal{E} revient à celle de V^*V .

3.1 Optimisation du choix des sources et récepteurs

La matrice V dépend des nombres β_n , du nombre de points de la grille M et du pas δ . Si les nombres β_n sont caractéristiques du guide considéré, les paramètres M et δ peuvent être optimisés.

Une première condition pour que la matrice V^*V soit inversible est que V soit injective, ce qui revient à $(\beta_n - \beta_m)\delta/2\pi \notin \mathbb{Z}$ qui ne soit pas un multiple de 2π quelques soient $m \neq n$, $0 \leq m, n \leq N - 1$. Or, avec $\lambda = 2\pi/k$ la longueur d'onde,

$$\frac{\beta_n \delta}{2\pi} = \sqrt{1 - n^2 \frac{\lambda^2}{4d^2}} \frac{\delta}{\lambda},$$

ce qui implique que $|\beta_n - \beta_m|\delta/2\pi < \delta/\lambda$. Finalement, il suffit d'avoir $\delta \leq \lambda$ pour que V^*V soit inversible.

Toutefois, nous prévoyons d'appliquer la méthode pour des données présentant une erreur. Il est donc important de s'intéresser aussi au conditionnement de V^*V . Pour ce faire, introduisons la distance modulo 1

$$d_w(f, g) = \inf_{q \in \mathbb{Z}} |f - g + q|,$$

qui nous permet de définir la séparation minimale entre les coefficients

$$\Delta = \min_{n, n' = 0, \dots, N-1, n \neq n'} d_w\left(\frac{\beta_n \delta}{2\pi}, \frac{\beta_{n'} \delta}{2\pi}\right).$$

Nous savons d'après [5] que, si $M > 1/\Delta + 1$, alors nous pouvons majorer le conditionnement $\kappa(V)$

$$\kappa(V) \leq \sqrt{\frac{M + 1/\Delta - 1}{M - 1/\Delta - 1}}.$$

Nous voyons alors que celui-ci tend vers sa valeur optimale, 1, pour M et Δ croissants. D'autre part, si $\delta \leq \lambda$,

$$\Delta = \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4d^2}}\right) \frac{\delta}{\lambda}.$$

Nous en déduisons que nous avons intérêt à prendre δ le plus grand possible, soit $\delta = \lambda$. Sur la figure 1, $\kappa(V)$ est représenté en fonction de δ pour différentes valeurs de M . Nous voyons la décroissance du conditionnement en fonction du nombre de points de la grille, ainsi que la valeur critique $\delta = \lambda$, au dessus de laquelle la matrice V^*V peut ne plus être inversible.

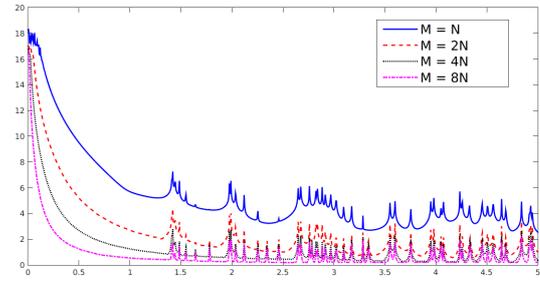


FIGURE 1 – Conditionnement de V en fonction du pas δ pour $N = 12$ et différentes valeurs de M

3.2 Passage au domaine temporel

Nous revenons dorénavant au problème initial (1). Nous définissons la transformée de Fourier par rapport au temps

$$\hat{v}(x, \omega) = \int_{\mathbb{R}} v(x, t) e^{i\omega t} dt.$$

La convention de signe dans $e^{i\omega t}$ est importante ici pour sélectionner les solutions sortantes [6], ce qui revient à vérifier la condition de radiation (CR) dans (6). Alors, pour $\omega > 0$, la transformée de Fourier $\hat{v}(\cdot, \omega)$ de la solution de (1) est solution de (6) avec

$$k = \omega/c, \quad \phi = \widehat{\chi}(\omega)f.$$

Nous considérons donc la famille de fonctions $\{g(\cdot - x_1^{\pm})/\widehat{\chi}(\omega)\}$ et la solution du problème (1) associée à chacune de ces fonctions en chaque récepteur x_1^{\pm} . Nous soustrayons à ces données le champ incident correspondant (solution du même problème sans le défaut) pour obtenir le champ diffracté. Après transformée de Fourier, nous nous retrouvons dans la situation précédente et nous pouvons obtenir notre matrice de LSM $\mathcal{U}(\omega)$ et une fonction caractéristique $\psi(\cdot, \omega)$ du défaut, pour ω dans un intervalle (ω_-, ω_+) , ces fréquences dépendant de la sollicitation temporelle $\chi(t)$ choisie.

Il est donc intéressant de combiner les différentes fonctions $\psi(\cdot, \omega)$ pour obtenir la meilleure identification possible. Deux choix ont été proposés dans [7] pour l'espace libre : réaliser une sommation "en série" ou "en parallèle", soit

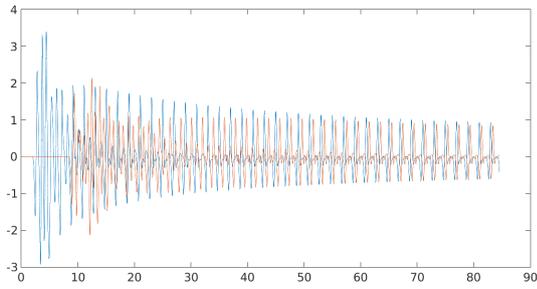
$$\psi^s = \left(\int_{\omega_-}^{\omega_+} |\psi(\cdot, \omega)|^{-2} d\omega \right)^{-1/2}, \quad \psi^p = \left(\int_{\omega_-}^{\omega_+} |\psi(\cdot, \omega)|^2 d\omega \right)^{1/2}.$$

Nous optons pour celle en série, étant donné que ses résultats étaient meilleurs lors des essais numériques. De plus, contrairement au cas de l'espace libre, un facteur de normalisation est ajouté pour corriger les différences d'échelle des fonctions $\psi(\cdot, \omega)$. Notre fonction caractéristique a donc pour expression

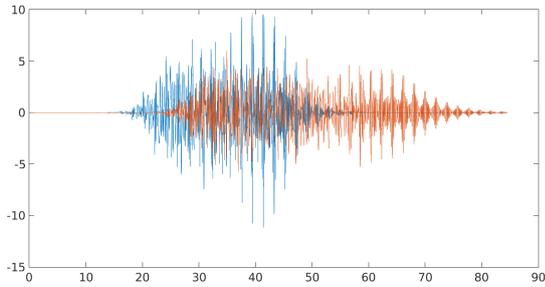
$$\psi^s = \left(\int_{\omega_-}^{\omega_+} \frac{\max_{z \in G} |\psi(z, \omega)|^2}{|\psi(\cdot, \omega)|^2} d\omega \right)^{-1/2},$$

avec G le domaine d'échantillonnage.

Importance du choix de χ Dans les guides d'ondes, les fréquences pour lesquelles un nombre d'ondes β_n est nul posent problème car les composantes du champ aux fréquences propres k_n ne se propagent pas selon l'axe du guide. Il est alors important pour nos applications d'éviter



(a) Fonction χ dont le spectre contient des fréquences de coupure



(b) Fonction χ utilisée dans nos simulations

FIGURE 2 – Influence de la fonction χ

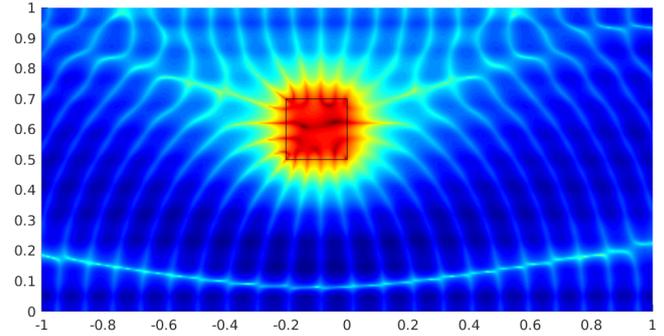
ces fréquences en choisissant une source temporelle χ bien adaptée. Nous prenons

$$\chi(t) = \sum_{n \geq 1}^N \frac{d}{dt} [\sin(A_n t) e^{-B_n(t-C_n)^2}],$$

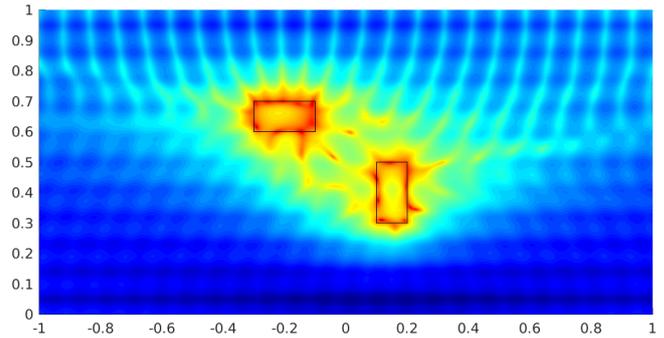
les coefficients A_n , B_n et C_n étant choisis de sorte que le support de χ évite les fréquences de coupure k_n . Nous présentons figure 2 les champs diffractés mesurés en deux points de part et d'autre du défaut, obtenus dans les mêmes conditions hormis la fonction χ , qui dans un cas est quelconque et excite des fréquences de coupures, et dans l'autre est celle retenue pour nos simulations.

4 Résultats numériques

Nous considérons ici deux obstacles différents, un carré et deux rectangles. Deux cas sont considérés : La Linear Sampling Method modale (figures 3) et celle utilisant des données temporelles mesurées à la surface (figures 4 et 5). La figure 4 présente les résultats de la méthode appliquée pour la même fréquence que dans le cas modal, à titre de comparaison avec la méthode initiale, et 5 le résultat en utilisant toutes les fréquences. Les données nécessaires à l'application des méthodes ont été obtenues numériquement, au moyen d'un calcul éléments finis pour le calcul fréquentiel et avec un code éléments finis d'ordre élevé en espace et un schéma différence finis saute-mouton en temps pour l'autre cas. Nous voyons que l'identification du défaut est moins bonne pour les données temporelles en surface que dans le cas modale. Cela vient à la fois du mauvais conditionnement de la méthode et de la présence d'une erreur numérique dans les données provenant du schéma temporel. Toutefois, les résultats obtenus en utilisant toutes les fréquences sont proches de ceux de la méthode modale, ce qui valide notre extension. Enfin, figure 6 est présentée

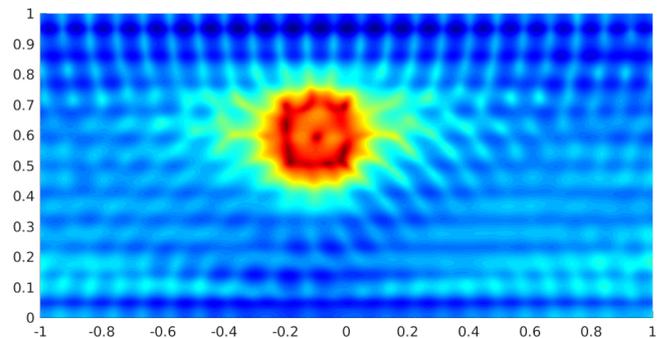


(a) Un défaut carré

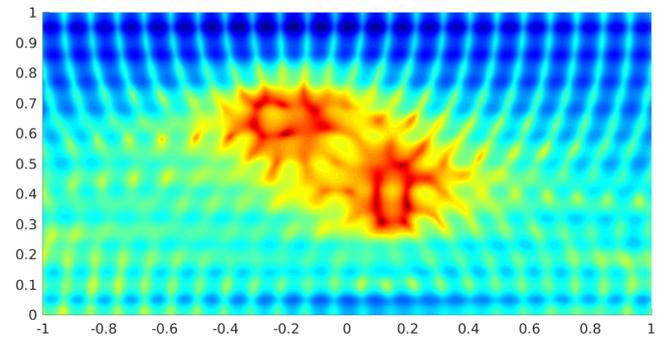


(b) Deux défauts rectangulaires

FIGURE 3 – Utilisation de la Linear Sampling Method modale

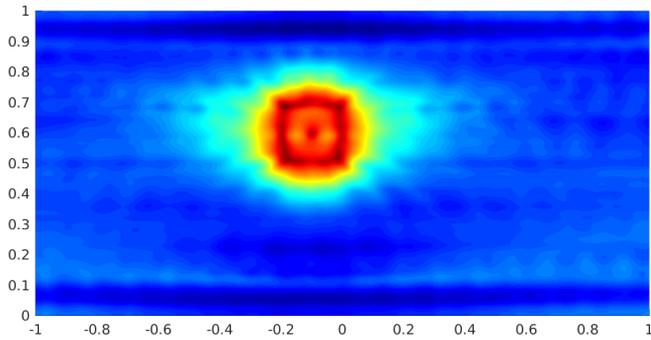


(a) Un défaut carré

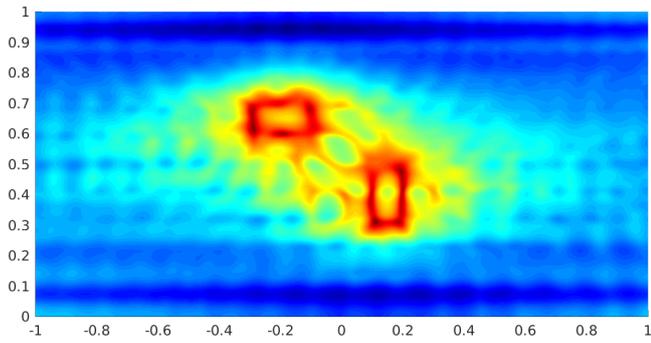


(b) Deux défauts rectangulaires

FIGURE 4 – Utilisation de données temporelles de surface pour une seule fréquence



(a) Un défaut carré



(b) Deux défauts rectangulaires

FIGURE 5 – Utilisation de données temporelles de surface pour plusieurs fréquences

une étude de sensibilité de l'image en fonction du nombre de sources et récepteurs. Nous voyons clairement l'image du défaut s'affiner à mesure que le nombre de points augmente, ce qui prouve l'importance du bon conditionnement de V^*V .

5 Conclusion

Nous avons montré ici la possibilité d'imager un défaut dans un guide d'ondes à partir de données temporelles mesurées en surface. Il faut pour cela utiliser un nombre suffisamment élevé de sources et récepteurs, ainsi qu'un signal temporel permettant d'éviter les fréquences de coupure.

Nous avons commencé à adapter cette méthode aux guides d'ondes élastiques, et nous comptons notamment la tester sur des géométries en trois dimensions, pour étudier l'influence de la répartition des points de sollicitation et de mesure sur la surface. Enfin, nous comptons l'appliquer à des données mesurées expérimentalement sur une pièce, pour vérifier la possibilité d'utiliser cette méthode en situation industrielle.

Remerciements

Les auteurs remercient Alexandre Impériale pour son aide sur l'utilisation pour les simulations en temps du code Echo, qu'il a développé au CEA, ainsi qu'Eric Lunéville et Anne-Claire Egloffé qui ont initié ces travaux.

Références

- [1] D. Colton, A. Kirsch, A simple method for solving inverse scattering problems in the resonance region,

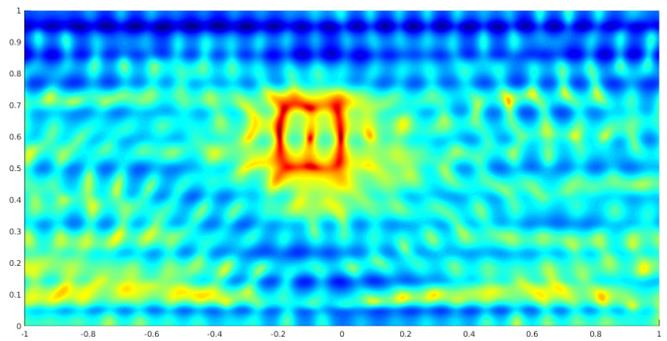
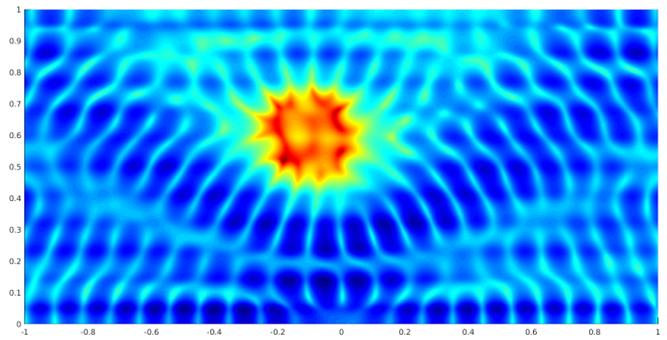
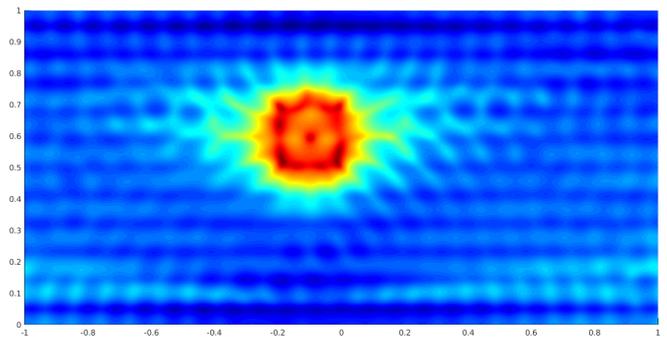
(a) $M = N$ (b) $M = 2N$ (c) $M = 3N$

FIGURE 6 – Influence du nombre de points sur l'image

- Inverse Problems* **12**, 383-393 (1996).
- [2] L. Bourgeois, E. Lunéville, The Linear Sampling Method in a waveguide : a modal formulation, *Inverse Problems* **24**, 15-18 (2008).
- [3] L. Bourgeois, F. Le Louër, E. Lunéville, On the use of Lamb modes in the Linear Sampling Method for elastic waveguides, *Inverse Problems* **27** (2011).
- [4] P. Monk, V. Selgas, A time domain linear sampling method for a wave guide, *Proceedings of the XXIV Congress on Differential Equations and Application, XIV Congress on Applied Mathematics, Cadix*, 919-923 (2015).
- [5] A. Moitra, Super-resolution, extremal functions and the condition number of vandermonde matrices, *Proceedings of the 47th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*.
- [6] M. Cassier, C. Hazard, Space-time focusing of acoustic waves on unknown scatterers, *Wave Motion* **51 (8)**, 1254-1272 (2014).
- [7] B. B. Guzina, F. Cakoni, C. Bellis, On the multi-frequency obstacle reconstruction via the linear sampling method, *Inverse Problems* **26 (12)** (2010).
- [8] V. Baronian, L. Bourgeois, A. Recoquillay, Imaging an acoustic waveguide from surface data in the time domain, *Submitted* (2016).