

## CFA/VISHNO 2016

**Le pompage énergétique par absorbeur non-linéaire  
bi-stable : prédiction de la transition chaotique de  
l'absorbeur par analyse de Mel'nikov**

P.-O. Mattei, V. Iurasov, R. Côte et M. Pachebat  
LMA Marseille, 4 impasse Nikola Tesla, 13453 Marseille, France  
mattei@lma.cnrs-mrs.fr



LE MANS

Une des principales caractéristiques des absorbeurs dynamiques non linéaires tient à l'existence d'un seuil d'activation en deçà duquel l'absorbeur reste inactif. Dans certains cas, les niveaux énergétiques du système primaire requis pour que l'absorbeur s'active restent trop élevés. Afin de pallier cet inconvénient, nous avons récemment développé un absorbeur dynamique non linéaire bistable. Nos expérimentations ont montré que ce principe de bi-stabilité a permis, non seulement de limiter le niveau vibratoire d'un système mécanique sur ces deux premiers modes du système de vibration de plus de 10 dB, mais aussi que cette limitation a pu être obtenue pour une large gamme de niveaux vibratoires. À la différence des absorbeurs non linéaires usuels, basés sur une non linéarité de raideur cubique ou quintique, l'absorbeur bistable, mollissant à faible niveau et raidissant à fort niveau, peut être approché par un système à un seul degré de liberté dont la raideur associée à un comportement linéaire des effets quadratique et cubique. Ce type d'oscillateur possède un Hamiltonien de potentiel à deux puits dont on peut montrer qu'il est caractérisé par une dynamique chaotique (qui n'est pas observée sur les absorbeurs classiques).

Nous avons pu montrer expérimentalement que l'absorption apportée au système primaire par l'absorbeur bistable s'observait principalement sur sa dynamique chaotique. Ainsi, toute optimisation de ce type absorbeur passe par la capacité à prédire l'apparition d'une telle dynamique. Pour ce faire, un outil particulièrement performant est l'analyse par fonction de Melnikov des bifurcations homocliniques ; toutefois, si cette analyse est aisée à conduire pour un absorbeur à un seul degré de liberté, son extension aux systèmes à plusieurs degrés de liberté présente des difficultés notables. Nous présenterons dans cette communication la mise en œuvre de cette analyse et son application à l'optimisation du pompage énergétique.

## 1 Introduction

Réduire le bruit et des vibrations reste un sujet de recherche d'actualité car cela permet, par exemple, une meilleure résistance à la fatigue avec une réduction conséquente des coûts de maintenance et la réduction du bruit résultant en un confort accru. De nombreux dispositifs actifs et passifs ont été développés pour améliorer le comportement vibroacoustique des ensembles mécaniques. Dans le domaine passif, pour atténuer les vibrations structurelles, l'absorbeur de Frahm [1], constitué d'un système masse-ressort-amortisseur accordé à la fréquence des vibrations à éliminer est très efficace mais il a une plage de fréquences limitée d'efficacité [2]. Le pompage d'énergie par absorbeur passif non-linéaire est un moyen de surmonter cette limitation. Depuis les travaux fondateurs de Gendelman *et al.* [3, 4], du fait de ses nombreuses applications, le pompage énergétique non-linéaire a suscité un fort intérêt de la communauté [5]. Le cas le plus simple est décrit par un système mécanique ou acoustique linéaire relié à un oscillateur secondaire ayant une rigidité fortement non linéaire (généralement cubique). Cet dispositif est généralement nommé "Nonlinear Energy Sink (NES)". Ce type de non linéarité conduit à une résonance du NES qui varie avec l'amplitude d'excitation et permet un transfert passif non linéaire de l'énergie par capture de résonance [4]. Le transfert d'énergie non linéaire passif du système primaire vers le NES se produit par couplage résonant lorsque l'amplitude du NES dépasse un certain seuil ; le retour du flux d'énergie inverse du NES vers le système primaire est empêché en raison de la perte du couplage résonant dû à la diminution de l'énergie induite par la dissipation. L'existence d'un tel seuil dans les NES purement cubiques ou quintiques peut être considérée soit comme avantage soit comme inconvénient selon l'application.

À ce jour, une grande variété de NES a été proposée et testée : raideur cubique pure dans les systèmes mécaniques [5], membrane agissant comme un ressort cubique ou quintique dans les systèmes acoustiques [6], haut-parleur utilisé comme un piston suspendu agissant comme un oscillateur essentiellement non linéaire [7]. Parmi les

nombreuses tentatives menées par abaisser le seuil de déclenchement du pompage, les travaux théoriques et numériques de Manevitch *et al.* [8] ont montré qu'un oscillateur non linéaire bi-stable est une solution qui permet une activation du pompage énergétique pour de faibles niveaux vibratoires.

Dans l'exemple présenté ici, on contrôle les vibrations des deux premiers modes de vibration d'un système composé de deux poutres cantilever couplées par un ressort à l'aide d'un absorbeur bi-stable non linéaire fixé sur une des poutres. Ce résonateur non linéaire est constitué d'un support en ABS fabriqué par une imprimante 3D, sur lequel est fixée une lame mince flambée avec une masse attachée en son centre. La principale caractéristique de ce NES réside dans son flambage qui permet un comportement bi-stable facile à contrôler.

Nos expérimentations ont montré que ce dispositif simple permet plus de 10 dB d'atténuation pour les deux premiers modes de fonctionnement du système de vibration avec des seuils d'activation comparables. En outre, l'essentiel de la dissipation s'observe lorsque le NES bistable a un comportement chaotique. Une étude numérique réalisée sur un modèle simplifié du dispositif a montré que, pour une large gamme de configurations d'absorbeurs dynamiques non-linéaires bi-stables, la réduction du niveau vibratoire du système primaire autour de ses deux premières résonances est obtenue pour un mouvement chaotique de l'absorbeur bi-stable [10].

Ainsi, toute optimisation de ce type absorbeur passe par la capacité à prédire l'apparition d'une telle dynamique. Pour ce faire, un outil particulièrement performant est l'analyse par fonction de Melnikov des bifurcations homocliniques [9] ; toutefois, si cette analyse est aisée à conduire pour un absorbeur à un seul degré de liberté, son extension aux systèmes à plusieurs degrés de liberté présente des difficultés notables. En suivant une méthode similaire à celle proposée par Gourdon et Lamarque [11], nous avons développé une méthode qui permet de contourner ces difficultés et de proposer des règles d'optimisation particulièrement simples.

La section 2 est consacrée à une brève description de l'expérience et du modèle simplifié qui a été développé.

La section 3 est dédiée à la comparaison des résultats expérimentaux et numériques qui montrent que la dissipation due à l'absorbeur non-linéaire s'obtient pour un mouvement chaotique. La section 4 est consacrée à l'étude de la méthode de Melnikov. Quelques commentaires concluent cette brève présentation.

## 2 Le dispositif expérimental et son modèle simplifié

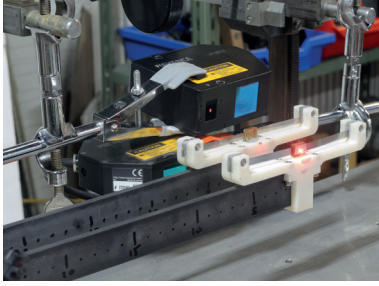


FIGURE 1 – Vue de l'expérience. Ici, un seul NES est actif, le second reste fixé.

Une photographie de l'expérience est donnée Fig. 1 et un schéma de celle-ci est donné Fig. 2. Chaque poutre est en acier de module d'Young  $E_b = 185$  GPa, de masse volumique  $\rho_b = 7621$  kg.m<sup>-3</sup> et d'amortissement visqueux  $\mu_b = 0,1$  kg.s<sup>-1</sup>. Leurs dimensions sont données par leur épaisseur  $h_b = 4,2$  mm, leur hauteur  $e_b = 2,52$  cm et leur longueur  $L = 35$  cm. Les deux poutres sont reliées par un ressort de couplage de masse  $m_c = 6$  g et la raideur  $r_c = 2200$  kg.s<sup>-2</sup>. Ce ressort est situé à proximité de l'extrémité libre des poutres en  $x_N = 34,5$  cm. L'excitation est effectuée par un dispositif sans contact situé à  $x_0 = 3,5$  cm de l'extrémité encastree de la poutre. Le NES consiste en une petite masse (ici une masse  $m_0 = 2,6$  g a été choisie) fixée au milieu de la lame mince flambée comme illustré sur la Fig. 3. Cette lame est réalisée en acier de caractéristiques  $E = 200$  GPa, amortissement visqueux  $\mu = 0,18$  kg.s<sup>-1</sup>, masse volumique  $\rho = 7800$  kg.m<sup>-3</sup>, longueur  $\ell = 10$  cm, épaisseur  $h = 0,1$  mm et de hauteur  $e = 5$  mm. La lame flambée est fixée rigidement à ses extrémités à un support en ABS réalisé par une imprimante 3-D. Ce support de masse 30 g est fixé près de l'extrémité de la poutre cantilever à  $x_N = 34,5$  cm. Afin d'assurer la symétrie du système, chaque poutre cantilever porte un NES, mais une seule supporte un NES actif, l'autre reste bloqué tout au long de l'expérience.

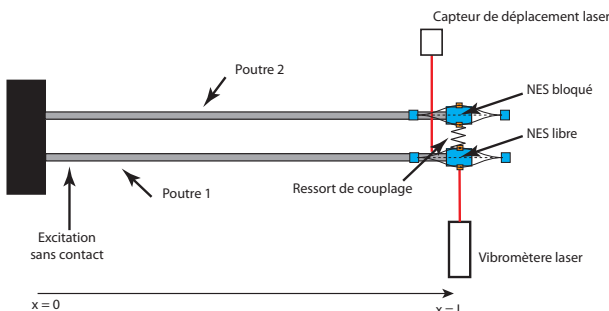


FIGURE 2 – Schéma de l'expérience

Les deux premiers modes de ce système sont obtenus pour les mouvements en phase des poutres (autour de 22 Hz, qui ne dépend que des poutres) et en opposition de phase (autour de 39 Hz qui dépend des poutres et du ressort de couplage) du premier mode de chaque poutre cantilever. Le déplacement de la poutre cantilever est mesuré par un capteur de déplacement laser CCD Keyence LK-G 32. Le déplacement du NES est mesuré par un capteur de déplacement laser CCD Keyence LK-G 82 et sa vitesse par un vélocimètre laser Doppler Polytec OFV-303.

### 2.1 Approximation du déplacement des poutres

La dynamique des deux poutres couplées est décrite par un système simplifié à deux degrés de liberté. A basse fréquence, chaque déplacement  $w_{1,2}(x, t)$  est approché par

$$w_{1,2}(x, t) = \phi_1(x)u_{1,2}(t), \quad (1)$$

où  $\phi_1(x)$  est le premier mode d'une poutre cantilever. Cette approximation couplée à une réduction de Ritz conduit au système d'équations différentielles linéaires couplées

$$m_1 \ddot{u}_1(t) + \mu_b \dot{u}_1(t) + k_1 u_1(t) + k_c (u_1(t) - u_2(t)) = F(t) \quad (2)$$

$$m_1 \ddot{u}_2(t) + \mu_b \dot{u}_2(t) + k_1 u_2(t) - k_c (u_1(t) - u_2(t)) = 0, \quad (3)$$

$\dot{u}_i(t)$  représente la dérivée temporelle de chaque composante  $u_i(t)$ .  $F(t) = \mathcal{A}\phi_1^2(x_0) \cos(\omega t)$  est l'excitation,  $m_1 = \rho_b S_b + (m_N + \frac{m_c}{2})\phi_1^2(x_N)$  est la masse dynamique totale avec  $S_b = e_b h_b$  et  $k_c = r_c \phi_1^2(x_N)$  est la raideur de couplage dynamique.

### 2.2 Approximation du déplacement du NES

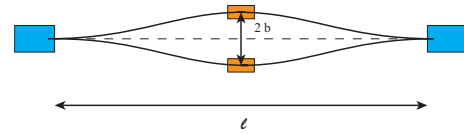


FIGURE 3 – Géométrie du NES

Une poutre mince amortie avec une masse  $m_0$  fixée en son centre qui est flambée sous l'effet d'une contrainte axiale  $N$  possède une non-linéarité géométrique. Son déplacement  $w(x, t)$  est solution de [12] :

$$(\rho A + m_0 \delta_{\ell/2}(x)) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{EA}{2\ell} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \int_0^\ell \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx = G(t),$$

où  $G(t) = B \cos(\omega t)$ ,  $I = eh^3/12$  et  $A = eh$ . À cette équation, on ajoute les conditions aux limites habituelles pour une poutre encastree. On adimensionnalise en utilisant les grandeurs adimensionnelles  $\tilde{x} = x/\ell$ ,  $r = \sqrt{I/A}$  est le rayon de giration de la section transversale,  $\tilde{w} = w/r$ ,  $\omega_0 = 1/\ell^2 \sqrt{EI/(\rho A)}$ ,  $\tilde{t} = \omega_0 t$ ,  $\Omega = \omega/\omega_0$ ,  $\tilde{N} = N\ell^2/(EI)$ . En utilisant  $\tilde{b} = b/r = \sqrt{4(\tilde{N} - \tilde{N}_c)/\pi^2}$ ,  $\tilde{N}_c = 4\pi^2$  la flèche de la poutre flambée, le déplacement de la poutre flambée est écrit comme  $\tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \tilde{w}_0(\tilde{x}) + \tilde{v}(\tilde{x}, \tilde{t})$ , avec  $\tilde{w}_0(\tilde{x}) = 1/2\tilde{b}(1 - \cos 2\pi\tilde{x})$ . On approche le déplacement dynamique autour de la position d'équilibre  $\tilde{v}(\tilde{x}, \tilde{t})$  en

utilisant uniquement le premier mode de flambement  $\tilde{v}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \tilde{w}_0(\tilde{x})\tilde{q}(\tilde{t})$ . Cette approximation permet de décrire le changement de position d'équilibre, mais ne donne pas accès à une description fine du mouvement de la poutre flambée [13], en particulier pour sa résonance linéaire. Une réduction de Ritz conduit à l'équation non linéaire suivante pour le déplacement du NES

$$(3/8 + \beta_N)\ddot{\tilde{q}}(\tilde{t}) + \frac{3}{8}\mu\dot{\tilde{q}}(\tilde{t}) + \frac{b^2\pi^4}{4}\left(\tilde{q}(\tilde{t}) + \frac{3}{2}\tilde{q}(\tilde{t})^2 + \frac{1}{2}\tilde{q}(\tilde{t})^3\right) = \mathcal{B}\cos\Omega\tilde{t},$$

$\beta_N \approx 7$  est défini comme le rapport de la petite masse  $m_0$  à la masse de la poutre flambée et  $\mathcal{B} = Bl^4/(r.EI)$ . Il est facile de montrer que cette équation a trois points d'équilibre. Deux sont stables (0 et -2) correspondant à chaque position flambée ; une est instable (-1). Comme l'approximation à un mode ne permet pas de décrire toute la dynamique du NES, nous estimons les paramètres (rigidité et amortissement) à partir d'une mesure de la première résonance linéaire du NES flambé  $f_{N1} = \hat{f}_{N1} - i\hat{f}_{N1} \approx 36 - i0,3$  Hz. L'équation différentielle non linéaire satisfaite par  $q(t)$  s'écrit en variable dimensionnées

$$m_N\ddot{q}(t) + \mu_N\dot{q}(t) + k_N\mathcal{F}(q(t)) = B\cos\omega t, \quad (4)$$

où  $m_N = (3/8\rho Al + m_0)$  est la masse dynamique,  $\mu_N = 4\pi m_N \hat{f}_{N1}$  est l'amortissement dynamique identifié et  $k_N = (2\pi \hat{f}_{N1})^2 m_N$  est la raideur dynamique identifiée. Dans cette équation, la raideur non linéaire est donnée par  $\mathcal{F}(q(t)) = (q(t) - b) + 3/(2b)(q(t) - b)^2 + 1/(2b^2)(q(t) - b)^3$ .

### 2.3 Le système complet

Le système complet correspondant aux deux poutres linéaires couplées dont les déplacements  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$  sont les solutions des Eq. 2 et 3 avec un NES fixé à proximité de l'extrémité de la poutre 1 de déplacement  $q(t)$  en  $x_N$ , solution de l'Eq. 4, est donné par

$$m_1\ddot{u}_1(t) + \mu_1\dot{u}_1(t) + k_1u_1(t) + k_c(u_1(t) - u_2(t)) - \mu_N\dot{Q}(t) - k_{1N}\mathcal{F}(Q(t)) = F(t) \quad (5)$$

$$m_1\ddot{u}_2(t) + \mu_1\dot{u}_2(t) + k_1u_2(t) - k_c(u_1(t) - u_2(t)) = 0 \quad (6)$$

$$m_N\ddot{q}(t) + \mu_N\dot{Q}(t) + k_{1N}\mathcal{F}(Q(t)) = 0 \quad (7)$$

où  $Q(t) = q(t) - \phi_1(x_N)u_1(t)$ . Les solutions  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  et  $q(t)$  de ce système sont calculées sans difficultés particulières en utilisant la fonction "NDSolve" de résolution numérique d'équations différentielles du logiciel Mathematica [14].

## 3 L'absorbeur dynamique non linéaire comme dissipateur chaotique

Comme cela a été précisé, dans les expériences rapportées ici, seul le NES fixé sur la poutre 1 est actif. Autour de chaque mode de fonctionnement du système primaire (soit 22,2 Hz et 39,3 Hz), la réponse en fréquence du déplacement de la poutre 1 a été mesurée à l'aide d'une source sinusoïdale pour un ensemble discret d'amplitudes et de fréquences. Pour chaque couple amplitude-fréquence, l'expérience durait 50 s. Le signal de forçage sinusoïdal avait une durée de 30 s, suffisante pour atteindre un mouvement

stable du système primaire pour une amplitude et fréquence donnée, puis après coupure de l'excitation, le système était laissé libre pour 20 s. La plus faible amplitude d'excitation avait été fixée afin d'assurer un comportement linéaire de l'ensemble du système (poutres couplées et NES). L'amplitude d'excitation la plus élevée choisie assurait un comportement linéaire des poutres couplées (dans ce cas, l'amplitude maximale à leurs extrémités libres restait beaucoup plus faible que leur épaisseur).

Nous ne présentons ici que les résultats autour du second mode dans la Fig. 4. Cette figure montre deux cartes de niveau du déplacement de la poutre 1 autour du seconde mode : (a) est la carte mesurée et (b) est la carte calculée. Pour plus de détails et de résultats, le lecteur est invité à se référer à [10]. Sur ces figures, la différence entre deux fines lignes noires successives correspond à un changement du niveau de 5 dB. En chaque point de la surface, l'altitude correspond au niveau en décibel du rapport de la valeur quadratique moyenne (RMS) calculée sur 3 secondes des signaux du déplacement et de l'excitation, soit  $20 \log U_{RMS}/A$ , où  $U_{RMS} = \sqrt{1/3 \int_{t_1}^{t_1+3} u_1^2(t) dt}$  est la mesure du déplacement de la poutre 1 et  $A = \sqrt{1/3 \int_{t_1}^{t_1+3} A^2(t) dt}$  est l'amplitude d'excitation mesurée, le temps  $t_1$  correspond au temps 3 secondes avant que la source soit coupée. Ces résultats montrent que, lorsque le NES est activé, le pompage énergétique induit par le NES bistable a permis de réduire le niveau de réponse vibratoire du système primaire de plus de 10 dB.

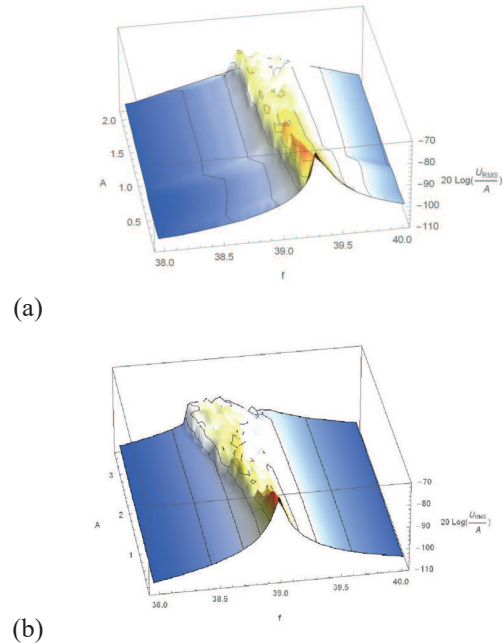


FIGURE 4 – Carte de niveau du déplacement de la poutre 1 autour du seconde mode. (a) : mesure, (b) : calcul

De plus, dans ce cas, plus l'amplitude d'excitation augmente, plus la réponse du système primaire diminue. Ces courbes montrent également que, en dépit de toutes les hypothèses et simplifications réalisées, le modèle simplifié est en mesure de décrire l'essentiel des fonctionnalités du système : léger décalage de la fréquence des deux premiers modes du système primaire, étalement et réduction de la réponse en fréquence jusqu'à 10 dB. Il faut remarquer que

l'une des difficultés d'une telle expérience est d'assurer sa stabilité à long terme puisque chaque expérience dure environ 20 heures. Il faut également remarquer que le dispositif est très robuste car tout au long de ces expériences, le système affiche une très bonne répétabilité.

On présente Fig. 5 un exemple de réponse typique du système au voisinage du second mode linéaire. Les quatre figures tracées représentent : (a) la carte de densité (vue du dessus de la carte de niveau (a) de la Fig. 4) dans laquelle l'ellipse noire représente le point d'intérêt ; (b) le diagramme de phase du NES dans lequel les cercles noirs indiquent les points d'équilibre ; (c) le spectre de déplacement du NES et (d) le spectre de déplacement de la poutre 1.

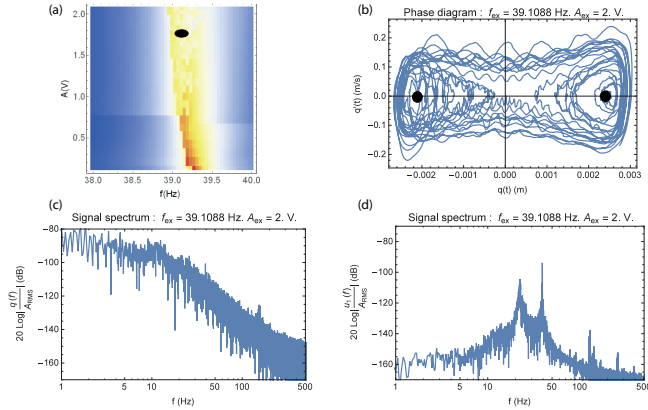


FIGURE 5 – Réponse mesurée typique au voisinage du second mode linéaire à une fréquence d'excitation  $f_{EX} \approx 39,11$  Hz et un amplitude  $A_{EX} \approx 2$  V. (a) : carte de densité, l'ellipse noire représente le point d'intérêt ; (b) : diagramme de phase du NES, les cercles noirs indiquent les points d'équilibre ; (c) : spectre de déplacement du NES ; (d) : spectre de déplacement de la poutre 1.

Le calcul de l'exposant principal de Lyapunov  $\lambda_1$  des diverses composantes du système a été réalisé à l'aide du package TISEAN [15]. On obtient pour le déplacement du NES  $\lambda_1 = 3,6$ , pour la vitesse du NES  $\lambda_1 = 4,4$ , pour le déplacement de la poutre 1  $\lambda_1 = 10,8$  et pour le déplacement de la poutre 2  $\lambda_1 = 8,2$  ; pour toutes les grandeurs, cet exposant positif indique clairement que le mouvement est chaotique. En pratique, on peut montrer que lorsque le pompage est effectif, le mouvement du NES se fait généralement sur un mouvement chaotique. Optimiser et comprendre le fonctionnement du NES bistable nécessite donc de disposer d'outils aptes à la description de la dynamique chaotique. Pour ce faire, l'analyse de Melnikov [16] est un outil particulièrement adapté.

## 4 Analyse de Melnikov

### 4.1 Excitation monofréquentielle

L'analyse de Melnikov est une méthode qui permet la prédiction de la dynamique chaotique par analyse des orbites homocliniques [16]. Pour présenter la méthode, repartons de l'équation du NES adimensionnée :

$$\ddot{x}(t) + \epsilon \delta \dot{x}(t) + \left( x(t) + \frac{3}{2} x(t)^2 + \frac{1}{2} x(t)^3 \right) = \epsilon \gamma \cos \Omega t, \quad \epsilon \ll 1$$

Dans l'espace des phases :

$$y(t) = \dot{x}(t) \quad (8)$$

$$\dot{y}(t) = -f(x(t)) - \epsilon \delta \dot{x}(t) + \epsilon \gamma \cos \Omega t, \quad (9)$$

pour  $\epsilon = 0$  c'est un système Hamiltonien d'énergie  $H(x, y) = 1/2 y^2 + V(x)$ .  $V(x) = 1/2 x^2 + 1/2 x^3 + 1/8 x^4$  est un potentiel à deux puits. Dans l'espace des phases, les orbites homocliniques :  $x_{l,r}^h(t) = \pm \sqrt{2} \operatorname{sech}(t/\sqrt{2}) - 1$  séparent les différents types de mouvements du système. Si  $\epsilon \neq 0$ , ces orbites se déstabilisent pour certaines valeurs de  $\delta$  et de  $\alpha$  et les deux variétés homocliniques associées (l'une stable et l'autre instable) se séparent. On peut montrer que, si ces deux variétés s'intersectent transversalement, alors la dynamique du système devient chaotique. Toute la difficulté est alors dans la recherche de ces points d'intersection.

Si  $\epsilon$  est suffisamment petit, la fonction de Melnikov  $\mathcal{M}^{l,r}(t_0, \phi_0)$  est définie comme la distance entre ces deux variétés et on montre alors que les zéros de la fonction de Melnikov, qui caractérisent donc la transition entre les dynamiques régulières et chaotiques, sont donnés par l'annulation de  $\mathcal{M}^{l,r}(t_0, \phi_0)$  définie par :

$$\mathcal{M}^{l,r}(t_0, \phi_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{x}_{l,r}^h(t) \left( -\delta \dot{x}_{l,r}^h(t) \pm \gamma \cos(\Omega(t + t_0) + \phi_0) \right) dt$$

On montre aisément que :

$$\mathcal{M}^{l,r}(t_0, \phi_0) = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \delta \mp 2\pi\gamma\Omega \operatorname{sech}\left(\frac{\Omega\pi}{\sqrt{2}}\right) \sin(\Omega t_0 + \phi_0),$$

si  $|\Im(\Omega)| < 1/2$ . Une condition nécessaire (mais non suffisante) pour que  $\mathcal{M}^{l,r}(t_0, \phi_0)$  s'annule est que  $\gamma \geq \delta \sqrt{2}/(3\pi\Omega) \cosh(\Omega\pi/\sqrt{2})$ . On applique cette analyse à l'Eq. 4 du NES et la courbe, nommée par la suite "courbe de transition de Melnikov", qui marque la transition dans le plan amplitude-fréquence entre la dynamique régulière et la dynamique chaotique possible est donnée par la courbe du plan amplitude-fréquence qui satisfait  $M(A, f) = 0$  où :

$$M(A, f) = A - 2\pi \check{f}_{N1} \mu_N \frac{1}{3} \frac{\cosh\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{f}{\check{f}_{N1}}\right)}{\frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{f}{\check{f}_{N1}}} \quad (10)$$

On présente dans la Fig. 6 la carte de densité de la réponse en fréquence dans le plan amplitude-fréquence du NES utilisé pour les expériences sur laquelle est superposée à la courbe de transition de Melnikov donnée par l'Eq. 10. Sur la gauche de la courbe de transition de Melnikov, la dynamique est assurée d'être régulière et sur la droite, la dynamique est potentiellement chaotique.

Le placement de cette courbe dans le plan amplitude-fréquence est utilisé pour optimiser le NES. Les deux principaux paramètres sont la fréquence  $f_0$  et l'amplitude  $A_0$  qui correspondent à l'amplitude et la fréquence minimales pour lesquelles la dynamique chaotique devient possible.  $f_0$  est obtenue comme la fréquence qui annule la dérivée fréquentielle de la courbe de Melnikov donné par l'Eq. 10. Cette fréquence est solution de  $\cosh X - X \sinh X = 0$ , où  $X = \pi/\sqrt{2} f/\check{f}_{N1}$ . On montre aisément que l'on a  $f_0 \approx \check{f}_{N1}/2$ . En reportant ce résultat dans la relation  $M(A_0, f_0) = 0$ , on en déduit que  $A_0 \approx \pi \check{f}_{N1} \mu_N$ . Par exemple, pour les résultats présentés Fig. 10, on obtient  $f_0 \approx 18$  Hz et  $A_0 \approx 1,1$  ce qui correspond aux valeurs observées sur cette figure. Par exemple, si on souhaite décaler vers les fortes amplitudes la

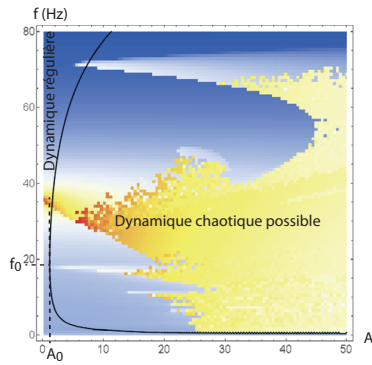


FIGURE 6 – Carte de densité dans le plan amplitude fréquence du NES utilisé pour les expériences superposée à la courbe de transition de Melnikov

dynamique chaotique sans modifier la résonance linéaire du NES, il suffit d'augmenter son amortissement. On présente Fig. 7 la carte de densité dans le plan amplitude-fréquence du NES utilisé pour les expériences mais avec un amortissement 10 fois supérieur sur laquelle est superposée la courbe de transition de Melnikov. On a tracé deux diagrammes de phase de part et d'autre de la courbe de transition de Melnikov qui montrent bien le changement de dynamique.

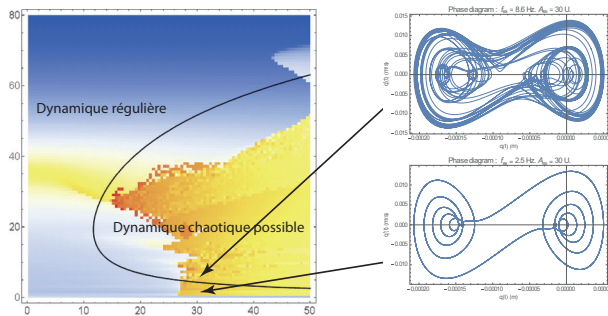


FIGURE 7 – Carte de densité dans le plan amplitude fréquence du NES utilisé pour les expériences avec un amortissement décuplé superposée à la courbe de transition de Melnikov

On voit clairement que la dynamique chaotique a été décalée vers les fortes amplitudes d'excitation comme on le souhaitait.

## 4.2 Excitation multifréquentielle

Toutefois, ceci n'est valide que si le NES est soumis à une excitation monofréquentielle. Or, comme on peut le remarquer sur le tracé (d) de la Fig. 5, le mouvement chaotique du NES redistribue l'énergie sur tout le spectre et en particulier sur tous les modes du système. Dans ce cas, le NES est soumis à une excitation formée principalement de deux composantes fréquentielles d'amplitudes comparables et l'analyse précédente est insuffisante. Naturellement, il conviendrait de reprendre toute cette analyse en considérant le système complet NES-poutres à 3 ddl. Dans ce cas, l'analyse deviendrait d'une extrême complexité, en particulier le calcul des orbites homocliniques. Pour pallier cette difficulté, il convient de procéder à l'analyse de l'excitation des modes résonant localisés sur le NES [11]. On peut donc s'intéresser au NES seul lorsqu'il est soumis

à un forçage multifréquences. Même si isoler le NES de son environnement reste une approximation grossière, cela permet d'étudier simplement l'influence d'une excitation multifréquence sur la transition chaotique.

Repartons, dans l'espace des phases, de l'équation du NES que l'on soumet à une excitation qui comporte deux sinusoides ; ceci revient à remplacer le forçage du second membre de l'Eq. 9, donné par  $\epsilon\gamma \cos(\Omega t)$ , par un forçage de la forme  $\epsilon\gamma (\cos(\Omega t) + \alpha \cos(\beta\Omega t))$  où on peut sans perdre en généralité fixer  $0 \leq \alpha \leq 1$  et  $0 \leq \beta < \infty$ . On montre alors que la fonction de Melnikov s'écrit

$$\mathcal{M}^{l,r}(t_0, \phi_0) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}\delta \mp 2\pi\gamma\Omega \left( \operatorname{sech}\left(\frac{\Omega\pi}{\sqrt{2}}\right) \sin(\Omega t_0 + \phi_0) + \alpha\beta \operatorname{sech}\left(\frac{\beta\Omega\pi}{\sqrt{2}}\right) \sin(\beta\Omega t_0 + \phi_0) \right),$$

si  $|\Im(\Omega)| < 1/2$  et  $|\Im(\beta\Omega)| < 1/2$ . Une condition nécessaire (toujours non suffisante) pour que  $\mathcal{M}^{l,r}(t_0, \phi_0)$  s'annule est que

$$\gamma \geq \delta \frac{1}{3} \frac{1}{\frac{\Omega\pi}{\sqrt{2}} \left( \operatorname{sech}\left(\frac{\Omega\pi}{\sqrt{2}}\right) + \alpha\beta \operatorname{sech}\left(\frac{\beta\Omega\pi}{\sqrt{2}}\right) \right)}.$$

Comme précédemment, cette analyse appliquée au NES conduit à l'expression de la courbe qui marque la transition dans le plan amplitude-fréquence de la dynamique régulière et chaotique possible. Elle est donnée par le lieu des zéros de la courbe de Melnikov  $M(A, f, \alpha, \beta)$  définie par :

$$M(A, f, \alpha, \beta) = A - \frac{2}{3}\pi\check{f}_{N1}\mu_N \left[ \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{f}{\check{f}_{N1}} \left( \operatorname{sech}\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{f}{\check{f}_{N1}}\right) + \alpha\beta \operatorname{sech}\left(\beta \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{f}{\check{f}_{N1}}\right) \right) \right]^{-1} \quad (11)$$

On a tracé sur la Fig. 8, toujours pour le NES utilisé dans les expériences, trois exemples de courbes de transition de Melnikov. La courbe obtenue pour l'Eq. 11 avec  $\alpha = 0$  et  $\beta = 0$  correspond évidemment à la courbe de transition obtenue précédemment pour un NES soumis à une excitation monofréquentielle et qui est donnée par l'Eq. 10. Les deux autres courbes correspondent aux cas observés dans nos expériences.  $\alpha = 0,5$  correspond à une amplitude d'excitation de la seconde composante fréquentielle 6 dB plus faible que la composante principale. Lorsque la fréquence d'excitation principale se fait au voisinage du premier mode (22 Hz) du système linéaire  $\beta = 1,77$  correspond à une excitation secondaire au voisinage du second mode (39 Hz). Lorsque la fréquence d'excitation principale se fait au voisinage du second mode du système linéaire,  $\beta = 1/1,77$  correspond à une excitation secondaire au voisinage du premier mode. Pour fixer les idées, nous avons représenté par une ligne horizontale pointillée la fréquence d'excitation 39,11 Hz comme celle utilisée dans les résultats présentés Fig. 5 ; on observe pour ce cas que la transition vers le chaos s'observe pour un niveau d'excitation près de deux fois plus faible puisque l'on passe d'une amplitude de transition  $A_t = 1,85$  pour le cas monofréquentiel à une amplitude de transition  $A_t = 0,98$  pour le cas bi-fréquentiel avec  $\beta = 1/1,77$ .

Ce que l'on observe clairement sur les courbes de transition c'est que la superposition d'une seconde fréquence de forçage permet une transition vers une dynamique chaotique à plus faible niveau d'excitation que

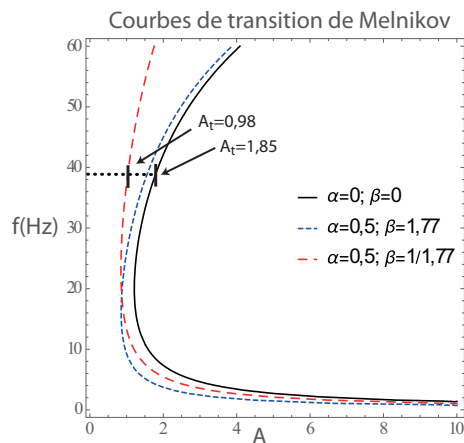


FIGURE 8 – Courbes de transition de Melnikov dans le plan amplitude-fréquence du NES utilisé pour les expériences pour divers paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ .  $\alpha = 0$  et  $\beta = 0$  : courbe continue noire,  $\alpha = 0,5$  et  $\beta = 1,77$  : courbe pointillée bleue,  $\alpha = 0,5$  et  $\beta = 1/1,77$  : courbe discontinue rouge. La ligne noire horizontale pointillée correspond à la fréquence d'excitation de la Fig. 5.

pour le cas monofréquentiel. En outre, l'ajout d'une basse fréquence au terme principal de forçage est plus efficace pour accélérer la transition vers le chaos que l'ajout d'une haute fréquence. Ainsi que l'ont fait remarquer Romeo *et al* [9], un NES bi-stable réinjecte de l'énergie principalement vers les basses fréquences et on se trouve donc ce cas dans la configuration  $\beta < 1$  qui apparaît comme la plus favorable.

## 5 Conclusion

Les résultats présentés ici, à la fois expérimentaux et numériques, montrent qu'un NES bi-stable de faible masse (3 g et 30 g de support) est capable de réduire fortement l'amplitude d'un système primaire comportant plusieurs résonances de masse significative (environ 500 g). Nos expériences récentes, toujours en cours, réalisées sur une plaque mince excitée par des ondes sonores montrent que le NES bistable est une voie prometteuse pour réduire les niveaux des systèmes vibroacoustiques. Le point important et que le maximum de dissipation d'énergie du NES s'opère lorsque celui-ci se comporte de manière chaotique. Nous avons pu montrer que la méthode de Melnikov est un outil qui permet de très simplement édicter des règles de conception pour adapter la transition vers le chaos du NES au système à contrôler. En outre, nous avons pu montrer que la présence d'un forçage multifréquentiel permet d'activer la transition vers le chaos pour des niveaux d'excitation plus faibles que le système monofréquentiel.

## Références

[1] H. Frahm, *Device for Damping Vibrations of Bodies*, U.S. Patent No. 989,958, 1909.  
 [2] J.P. Den Hartog, *Mechanical Vibration*, McGraw-Hill, New York, 1947.  
 [3] O. Gendelman, L.I. Manevitch, A.F. Vakakis, R.M. Closkey, Energy Pumping in Nonlinear Mechanical

Oscillators : Part I—Dynamics of the underlying Hamiltonian systems. *ASME Journal of Applied Mechanics* **68** (2001) 34-42. doi :10.1115/1.1345524

- [4] A.F. Vakakis, O.V. Gendelman, Energy Pumping in Nonlinear Mechanical Oscillators : Part II—Resonance Capture. *ASME Journal of Applied Mechanics* **68** (2001) 42-48. doi :10.1115/1.1345525
- [5] A.F. Vakakis, O.V. Gendelman, L.A. Bergman, D.M. McFarland, G. Kerschen, Y.S. Lee, *Nonlinear Targeted Energy Transfer in Mechanical and Structural Systems (two volumes)*. Springer Verlag, Berlin, 2008. doi :10.1007/978-1-4020-9130-8
- [6] R. Bellet, B. Cochelin, R. Côte, P.-O. Mattei, Enhancing the dynamic range of targeted energy transfer in acoustics using several nonlinear membrane absorbers. *Journal of Sound and Vibration* **331** (2012) 5657-5668. doi :10.1016/j.jsv.2012.07.013
- [7] R. Mariani, S. Bellizzi, B. Cochelin, Ph. Herzog, P.-O. Mattei, Toward an adjustable non linear low frequency acoustic absorber. *Journal of Sound and Vibration* **330** (2012) 5245-5258. doi :10.1016/j.jsv.2011.03.034
- [8] L.I. Manevitch, G. Sigalov, F. Romeo, L.A. Bergman, A. Vakakis, Dynamics of a Linear Oscillator Coupled to a Bistable Light Attachment : Analytical Study. *ASME Journal of Applied Mechanics* **81** (2014) 041011-1-9. doi :10.1115/1.4025150
- [9] F. Romeo, L.I. Manevitch, L.A. Bergman, A. Vakakis, Transient and chaotic low-energy transfers in a system with bistable nonlinearity, *Chaos* **25** (2015) 053109. doi :10.1063/1.4921193
- [10] P.-O. Mattei, R. Ponçot, M. Pachebat, R. Côte, Nonlinear Targeted Energy Transfer of Two Coupled Cantilever Beams Coupled to a Bistable light Attachment, Accepted for publication in *Journal of Sound and Vibration* (2016).
- [11] E. Gourdon, C.-H. Lamarque, Energy Pumping with Various Nonlinear Structures : Numerical Evidences. *Nonlinear Dynamics*, **40** (2005) 281-307. doi : 10.1007/s11071-005-6610-6
- [12] E. Ventsel, Th. Krauthammer, *Thin Plates and Shells. Theory, Analysis, and Applications*, Marcel Dekker, New York-Basel, 2001.
- [13] W. Kreider, A.H. Nayfeh, Experimental Investigation of Single-Mode Response in a Fixed-Fixed Buckled Beam, *Nonlinear Dynamics* **15** (1998) 155-177. doi :10.1023/A :1008231012968
- [14] *Wolfram Mathematica 10*, Wolfram Research Inc., Champaign, IL, USA, 2014.
- [15] R. Hegger, H. Kantz, T. Schreiber, Practical implementation of nonlinear time series methods : The TISEAN package, *Chaos* **9** (1999) 413-435. doi : 10.1063/1.166424
- [16] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos* Springer-Verlag, New-York, 1990.