

## CFA/VISHNO 2016

**Scattering inside acoustical waveguides through a numerical approach**

A. Kessentini<sup>a</sup>, O. Bareille<sup>a</sup>, M. Ichchou<sup>a</sup>, M. Taktak<sup>b</sup>, M.A. Ben Souf<sup>b</sup> et  
M. Haddar<sup>b</sup>

<sup>a</sup>LTDS, Ecole centrale de Lyon, 36 Avenue Guy de Collongue, 69134 Ecully Cedex,  
69134 Lyon, France

<sup>b</sup>Laboratoire Mécanique, Modélisation et Production, route de soukra KM 4, LA2MP-  
ENIS, Université de Sfax, Route de Soukra, 3038 Sfax, Tunisie  
ahmed.ke90@gmail.com



LE MANS

Le calcul de la matrice de diffusion pour la propagation acoustique guidée fait l'objet de ce travail. La méthode WFE (Wave Finite Element) a été utilisée et les avantages potentiels de la méthode ont été exploités. En effet, une cellule élémentaire du modèle EF complet est uniquement considérée. Les conditions de périodicité permettront de déduire un simple problème à valeurs propres à résoudre numériquement. La matrice de diffusion, décrivant la diffusion acoustique due à la partie acoustiquement traitée, peut être aussi exprimée. Ici, le traitement est considéré à réaction localisée. Des modèles empiriques de la littérature peuvent être utilisés pour l'impédance acoustique. Le caractère multimodal de la méthode permet d'étudier les phénomènes de diffusion acoustique des modes élevés, et de conversion modale entre les modes du même ordre circonferentiel. Le formalisme peut être étendu pour étudier des réponses forcées à des excitations données. Les résultats obtenus par la méthode WFE ont été validés par le calcul analytique et par la méthode des éléments finis.

## 1 Introduction

La prédiction de la propagation et la diffusion dans les conduits en présence de discontinuité ou d'un traitement acoustique en paroi est une tâche très importante afin de réduire le bruit rayonné par des systèmes composés d'une source et d'un guide d'onde, tels que les compresseurs et les moteurs d'avion. La diffusion sonore à l'intérieur des conduits avec des discontinuités d'impédance peut être décrite par la matrice de diffusion [1]. Par conséquent, il serait intéressant de trouver des moyens pour exprimer la matrice de diffusion tout en considérant le caractère multi-modal de la propagation acoustique guidée et des conditions quasi réalistes.

De nombreux travaux théoriques ont été développés pour caractériser la propagation acoustique et la diffusion à l'intérieur des conduits. Des travaux utilisant une méthode analytique comme dans [2] ont utilisé une projection sur une base de fonctions orthogonales. Ces travaux ont été réalisés pour un conduit cylindrique. Cependant, pour des géométries complexes, il peut être difficile d'exprimer la pression acoustique à l'intérieur d'un conduit. Des méthodes numériques de la modélisation de la propagation du son en 3D ont été également proposées dans les travaux précédents de [3]. Ces approches sont basées sur une formulation d'éléments finis, et les résultats des méthodes numériques proposées ont été validés par une comparaison avec les résultats analytiques, et par méthodes expérimentales comme dans [4, 5]. Néanmoins, ces méthodes expérimentales ont été réalisées pour une bande de fréquences telle que les cinq premiers modes seulement sont propagatifs.

La méthode "Wave Finite Element", communément abrégée méthode WFE, est utilisée dans ce papier pour calculer la matrice de diffusion acoustique. L'avantage principal de cette approche est que seule une petite portion d'un guide d'ondes est modélisée, et ce en utilisant les logiciels commerciaux d'élément fini. Le théorème de Bloch [6] est ensuite utilisé, et le problème de valeurs propres obtenu est résolu numériquement. La méthode aura un coût de calcul assez faible par rapport à celui lorsque le modèle élément fini complet est utilisé.

La méthode WFE a été utilisée plus largement pour des applications structurales comme dans [7, 8]. La méthode pourrait bien être sujet de problèmes numériques, notamment de mal conditionnement des matrices [9]. La densité du maillage sur une section du guide peut être augmentée de telle sorte que la base d'onde est étendue avec des modes d'ordre élevé, mais des écritures matricielles mal conditionnées doivent être manipulées d'autant plus qu'on augmente le nombre de degrés de liberté. Certains auteurs ont gardé seulement une base d'onde réduite pour calculer la

réponse forcée, et les modes évanescents ont été négligés [10]. Dans cet article, la base d'onde a été choisie avec des modes d'onde d'ordre élevé suffisants pour étudier la diffusion acoustique et les phénomènes de conversion multi-modale.

On rappellera brièvement le principe de la méthode WFE dans une première partie. Des validations de l'approche proposée par des méthodes conventionnelles seront ensuite présentées. Dans un premier temps, la réponse forcée à des excitations données sera calculée pour des guides complètement rigides. Puis, la diffusion pour les guides traités sera abordée.

## 2 Revue de la méthode WFE

La méthode WFE fournit numériquement les différentes propriétés des ondes se propageant dans les guides d'ondes périodiques. Un guide d'onde est supposé être composé de sous-éléments identiques qui sont liés le long d'un axe principal, appelé direction de propagation. La longueur de chaque sous-élément est notée  $d$ . Chaque interface séparant deux sous-éléments a le même degré de liberté, disons  $n$ . Il est supposé que l'impédance est infinie sur la paroi à l'intérieur du guide d'onde, ce qui correspond à une condition de paroi rigide. L'équation de la dynamique d'un sous-élément de guide d'ondes est exprimée comme suit :

$$\begin{pmatrix} v_l \\ v_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{ll} & D_{lr} \\ D_{rl} & D_{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_l \\ p_r \end{pmatrix} \quad (1)$$

où  $p$  et  $v$  sont respectivement les pressions et les vitesses des particules ;  $D$  est donnée par  $D = -\omega^2 M + K$  où  $M$  et  $K$  sont respectivement les matrices de masse et de rigidité du sous-élément du guide d'ondes, et  $\omega$  est la pulsation. Les indices  $l$  et  $r$  désignent les bords gauche et droit.

En utilisant la théorie de Zhong et Williams [11], l'équation (1) peut être reformulée en termes de vecteurs d'état comme suit :

$$u_r = S u_l \quad (2)$$

où  $u_l^t = [(p_l)^t (-v_l)^t]$  and  $u_r^t = [(p_r)^t (v_r)^t]$ . La matrice  $S$  est exprimée [12] :

$$S = \begin{pmatrix} -D_{lr}^{-1} D_{ll} & -D_{lr}^{-1} \\ D_{rl} - D_{rr} D_{lr}^{-1} D_{ll} & -D_{rr} D_{lr}^{-1} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Compte tenu des conditions de couplage entre deux sous-éléments de guide d'ondes successifs  $k$  et  $k + 1$ ,  $u_l^{(k+1)} = u_r^{(k)}$  dans (2) conduit à :

$$u_l^{(k+1)} = S u_l^{(k)} \quad (4)$$

En utilisant le théorème de Bloch [6], les solutions de (4) peuvent être exprimées en tant que :

$$u_l^{(k+1)} = \lambda u_l^{(k)} \quad (5)$$

Ces solutions sont  $(\lambda_j, \phi_j)$ . Elles sont numériquement calculées au moyen du problème des valeurs propres suivant :

$$S \phi_j = \lambda_j \phi_j \quad (6)$$

Pour un mode  $j$  donné,  $\lambda_j = \exp(-ik_j d)$  où  $k_j$  est le nombre d'onde axial, alors que le vecteur  $\phi_j$  représente le mode d'onde. Il convient de noter que chaque vecteur propre peut être partitionné en composantes de pression et de vitesse, étant donné  $\phi_j^t = [(\phi_p)_j^t, (\phi_v)_j^t]$ .

Ainsi, si les valeurs propres  $\{\lambda_i\}_{i=1..n}$  sont associées à des vecteurs propres  $\{\phi_i\}_{i=1..n}$  se propageant dans le sens positif, les valeurs propres  $\{\lambda_i\}_{i=n+1..2n}$  sont associées avec les vecteurs propres  $\{\phi_i\}_{i=n+1..2n}$  se propageant dans le sens négatif. La matrice  $\Phi$  des vecteurs propres peut être détaillée de cette manière :

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_p^{inc} & \phi_p^{ref} \\ \phi_v^{inc} & \phi_v^{ref} \end{pmatrix} \quad (7)$$

Les vecteurs d'état  $u_l^{(k)}$  et  $u_r^{(k)}$  d'une sous-structure  $k$  sont donnés en fonction des vecteurs propres  $\{\phi_i\}_{i=1..2n}$  comme suit :

$$u_l^{(k)} = \Phi Q^{(k)} \quad (8)$$

and

$$u_r^{(k)} = \Phi Q^{(k+1)} \quad (9)$$

Pour un problème aux conditions aux limites, lorsque le guide est particulièrement soumis à une excitation de pression et une impédance aux extrémités gauche et droite respectivement, les relations suivantes sont exprimées :

$$\phi_p^{inc} Q^{inc(1)} + \phi_p^{ref} Q^{ref(1)} = p_0 \quad (10)$$

$$\Lambda^{-N} Q^{ref(1)} = R \Lambda^N Q^{inc(1)} \quad (11)$$

(i) désigne la  $i^{eme}$  surface du guide d'onde,  $p_0$  est le vecteur amplitudes de la pression imposée,  $N$  est le nombre de sous-éléments composant le conduit,  $\Lambda$  est la matrice diagonale des valeurs propres correspondant aux modes incidents, et  $R$  représente une matrice diagonale de réflexion.

Pour un guide d'onde traité acoustiquement en paroi, le guide peut être considéré comme étant composé de deux parties rigides liées à travers d'un élément de couplage. La matrice de diffusion peut être introduite dans ce cas. Il s'agit de réécrire l'équation (1) pour l'élément de couplage et exprimer les conditions de couplage [13]. La matrice de diffusion  $C$  est enfin exprimée comme suit :

$$C = - (D_c \psi_p^{ref} + \psi_v^{ref})^+ (D_c \psi_p^{inc} + \psi_v^{inc}) \quad (12)$$

avec

$$\begin{aligned} \psi_p^{inc} &= \begin{pmatrix} \phi_p^{inc} & 0 \\ 0 & \phi_p^{ref} \end{pmatrix} & \psi_p^{ref} &= \begin{pmatrix} \phi_p^{ref} & 0 \\ 0 & \phi_p^{inc} \end{pmatrix} \\ \psi_v^{inc} &= \begin{pmatrix} \phi_v^{inc} & 0 \\ 0 & -\phi_v^{ref} \end{pmatrix} & \psi_v^{ref} &= \begin{pmatrix} \phi_v^{ref} & 0 \\ 0 & -\phi_v^{inc} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

$D_c$  est la matrice de rigidité dynamique de l'élément de couplage condensée à ses extrémités gauche et droite.

### 3 Validations numériques

Dans tout ce que suit, des cas particuliers sont considérés à titre d'exemples afin de valider la formulation proposée.

#### 3.1 Réponses forcées à des excitations prescrites

##### 3.1.1 Conduit rigide

On considère un conduit cylindrique rigide soumis à une pression acoustique  $p(\omega)$  et une impédance normalisée  $Z$  à ses extrémités gauche et droite, respectivement. Le conduit est supposé périodique ne présentant aucun changement brusque de section transversale. Le conduit est soumis à une excitation harmonique d'amplitude  $p_0$ . La méthode WFE a été d'abord utilisée pour la prédiction de la réponse forcée à un point donné à l'intérieur du guide. Une portion de taille réduite du guide est considérée dans ce cas et les équations (10) et (11) sont réécrites. L'évolution de l'amplitude de pression en fonction de la fréquence en ce même point est ensuite déterminée en utilisant le modèle élément fini complet sur le logiciel ANSYS.

La réponse forcée est représentée par la figure 1. Le rayon du conduit considéré est  $a = 0,02$  m. La longueur du conduit est de 0,25 m. L'amplitude de la pression imposée  $p(\omega)$  à tous les nœuds est  $p_0 = 1$  Pa et l'impédance acoustique normalisée à l'extrémité est  $Z = 2$ .

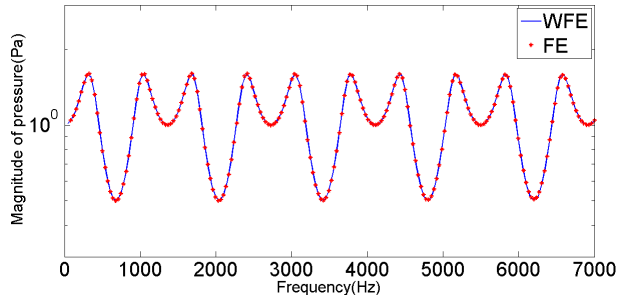


FIGURE 1 – Évolution fréquentielle de l'amplitude de la pression à un point à l'intérieur d'un guide rigide soumis au mode plan de pression et une impédance normalisée  $Z = 2$  à ses extrémités

##### 3.1.2 Conduit traité

Supposons à présent que le guide est traité à sa surface latérale, avec une impédance réelle partiellement réfléchissante à son extrémité. Pour cette simulation, l'impédance acoustique normalisée correspondant au traitement acoustique est supposée constante et égale à  $Z_l = 2 - 5i$ . Un système de quatre équations régissant les conditions aux limites aux deux extrémités du conduit et aux interfaces guides rigides-élément de couplage est exprimé. La réponse forcée était d'abord déterminée par la méthode WFE puis comparée à celle trouvée par la méthode élément fini.

La figure 2 montre l'évolution de l'amplitude de la pression en fonction de la fréquence d'excitation à un point donné à l'intérieur du guide. Ici, Une amplitude de pression  $p_0 = 1$  Pa est appliquée pour tous les nœuds appartenant à la surface extrémité du conduit. L'impédance normalisée à

l'autre extrémité est  $Z = 2$ . Le rayon du conduit est  $a = 0,06$  m.

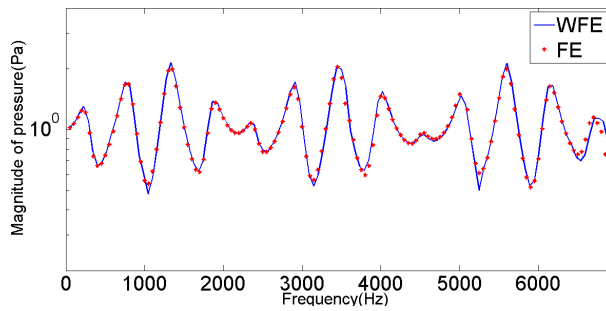


FIGURE 2 – Évolution fréquentielle de l'amplitude de la pression à un point à l'intérieur du guide traité soumis au mode plan de pression et une impédance normalisée  $Z = 2$  à ses extrémités

### 3.2 Coefficients de diffusion

On se propose de calculer la matrice de diffusion d'un conduit traité acoustiquement en paroi. Il s'agit d'un ensemble composé d'une structure en nid d'abeille et une plaque perforée (Figure 3). Le traitement est considéré à réaction localisée. L'expression de l'impédance des traitements acoustiques est en générale dépendante de la fréquence. Des modèles empiriques présentés dans la littérature peuvent être utilisés pour déterminer l'impédance acoustique. Ici, Le modèle linéaire de Guess est utilisé [14].

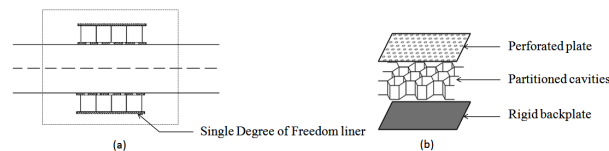


FIGURE 3 – Domaine de calcul (a) Composition du traitement (b)

Les coefficients de diffusion étaient calculés par la méthode WFE présentée à la section 1, et comparés à ceux trouvés par la méthode analytique. La matrice de diffusion a été calculée en utilisant la méthode analytique comme était détaillé dans [2]. Une méthode sélective a été utilisée pour le calcul de la matrice de diffusion. Seuls les modes propagatifs sont pris en considération et l'influence des modes évanescents est négligée.

Dans tous les cas suivants, on considère : une porosité de la plaque perforée  $\sigma=3\%$ , une épaisseur de la plaque perforée  $t = 10^{-3}$  m, un diamètre de trous  $d = 10^{-3}$  m et une profondeur de cavités  $D = 10^{-2}$  m. Le conduit étudié est de rayon  $a = 0.06$  m, et la longueur de la partie traitée est  $l = 0.03$  m.

L'évolution de la fréquence des coefficients de diffusion peut alors être représentée pour les différents modes  $(m,n)$ ,  $m$  et  $n$  étant les ordres circonférentiel et radial du mode respectivement. Les figures 4 et 5 représentent respectivement le module des coefficients de transmission et de réflexion du mode plan. Les figures 6 et 7 représentent respectivement le module des coefficients de transmission et de réflexion du mode  $(2,0)$ .

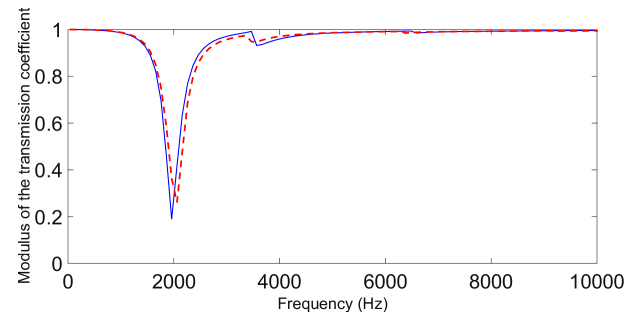


FIGURE 4 – Évolution fréquentielle du module du coefficient de transmission  $T((0,0),(0,0))$  : (—) Méthode WFE (- - -) Méthode analytique

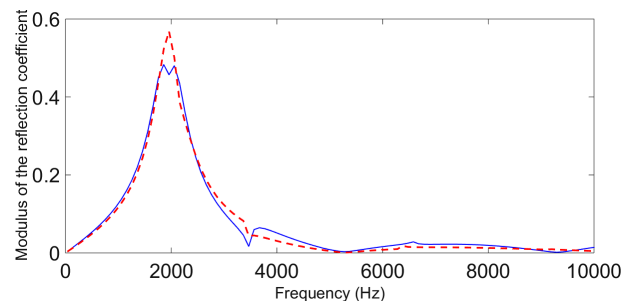


FIGURE 5 – Évolution fréquentielle du module du coefficient de réflexion  $R((0,0),(0,0))$  : (—) Méthode WFE (- - -) Méthode analytique

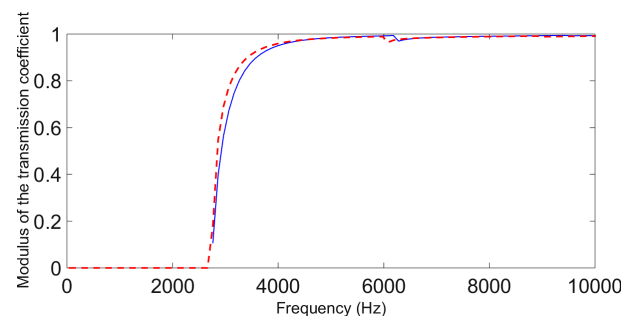


FIGURE 6 – Évolution fréquentielle du module du coefficient de transmission  $T((2,0),(2,0))$  : (—) Méthode WFE (- - -) Méthode analytique

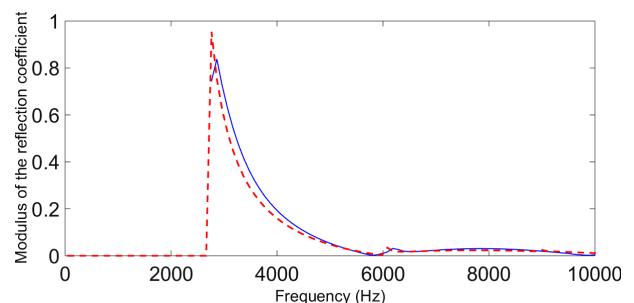


FIGURE 7 – Évolution fréquentielle du module du coefficient de réflexion  $R((2,0),(2,0))$  : (—) Méthode WFE (- - -) Méthode analytique

Les figures 8 , 9, 10 et 11 représentent la conversion du mode plan avec les modes  $(0,1)$  et  $(0,2)$ , respectivement. La conversion entre les modes  $(2,0)$  et  $(2,1)$  est représentée

par les figures 12 et 13 . Ces coefficients correspondent aux termes hors-diagonaux de la matrice de diffusion.

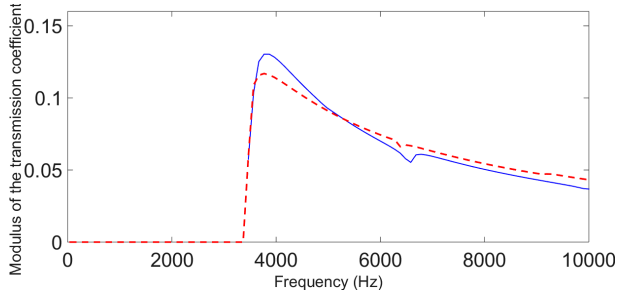


FIGURE 8 – Évolution fréquentielle du module du coefficient de transmission  $T((0,0),(0,1))$  : (—) Méthode WFE (---) Méthode analytique

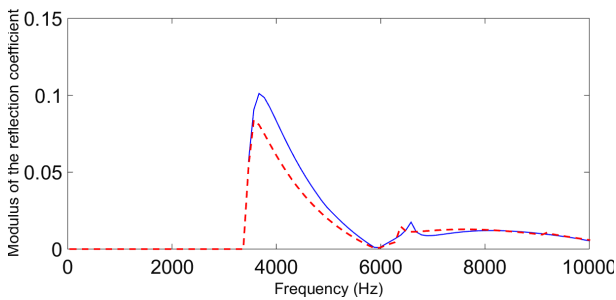


FIGURE 9 – Évolution fréquentielle du module du coefficient de réflexion  $R((0,0),(0,1))$  : (—) Méthode WFE (---) Méthode analytique

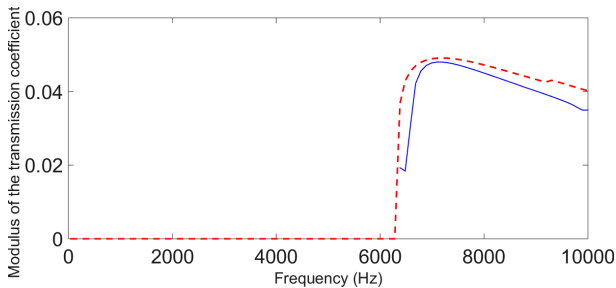


FIGURE 10 – Évolution fréquentielle du module du coefficient de transmission  $T((0,0),(0,2))$  : (—) Méthode WFE (---) Méthode analytique

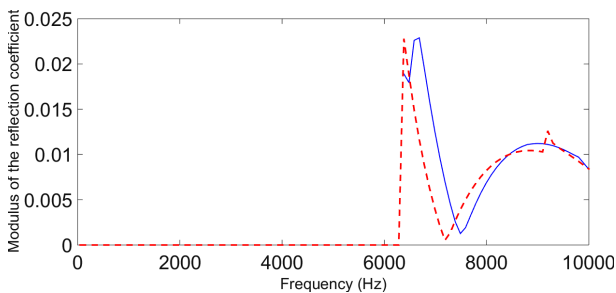


FIGURE 11 – Évolution fréquentielle du module du coefficient de réflexion  $R((0,0),(0,2))$  : (—) Méthode WFE (---) Méthode analytique

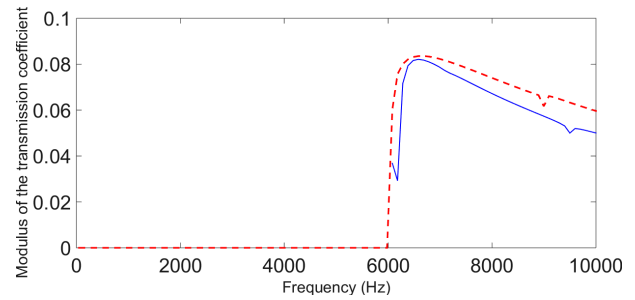


FIGURE 12 – Évolution fréquentielle du module du coefficient de transmission  $T((2,0),(2,1))$  : (—) Méthode WFE (---) Méthode analytique

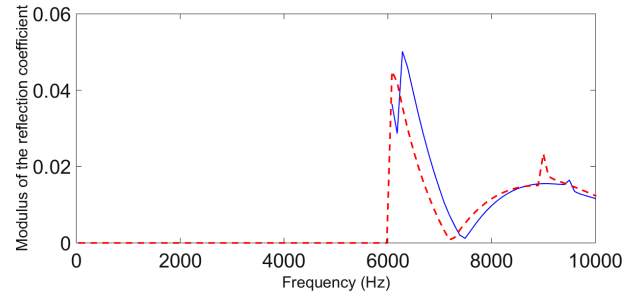


FIGURE 13 – Évolution fréquentielle du module du coefficient de réflexion  $R((2,0),(2,1))$  : (—) Méthode WFE (---) Méthode analytique

### 3.3 Discussion

Les simulations traitées montrent que les résultats trouvés par la méthode WFE sont en bon accord avec ceux trouvés par la méthode élément fini ainsi que le calcul analytique. Le formalisme proposé est intéressant puisqu'il permet une réduction en coût de calcul pour le calcul des réponses forcées. En effet, le temps de calcul pour la méthode WFE dépend uniquement de la densité du maillage sur une section transversale, alors qu'il dépend bel et bien de la longueur du conduit quand on utilise le modèle élément fini complet. Les coefficients de diffusion correspondant à la conversion des modes ont été présentés seulement pour des modes de même ordre circonférentiel puisque la conversion entre des modes d'ordres circonférentiels différents est non significative.

## 4 Conclusion

La formulation WFE a été développée pour calculer la matrice de diffusion et les réponses forcées des guides d'ondes rigides et traités. La méthode WFE a permis la prédiction d'une façon aussi précise que les méthodes conventionnelles de la propagation guidée des ondes acoustiques. Il serait intéressant dans une prochaine étude de considérer le cas de la propagation convective plus représentative de l'environnement des applications industrielles.

## Références

- [1] M. Abom, Measurement of the scattering matrix of acoustical two-ports, *Mechanical Systems and Signal*

- Processing* **5**, 89-104 (1991).
- [2] W. Bi, V. Pagneux, D. Lafarge, Y. Aurégan, Modelling of sound propagation in a non-uniform lined duct using a Multi-Modal Propagation Method, *Journal of Sound and Vibration* **289**, 1091-1111 (2006).
- [3] M. Taktak, J. M. Ville, M. Haddar, G. Gabrad, F. Foucart, An indirect method for the characterization of locally reacting liners, *The Journal of the Acoustical Society of America* **127**, 3584-3559 (2010).
- [4] A. Sittel, J. M. Ville, F. Foucart, An Experimental Facility for Measurement of Acoustic Transmission Matrix and Acoustic Power Dissipation of Duct Discontinuity in Higher Order Modes Propagation Conditions, *Acta Acustica united with Acustica* **89**, 586-594 (2003).
- [5] A. Sittel, J. M. Ville, F. Foucart, Multiloop procedure to measure the acoustic scattering matrix of a duct discontinuity for higher order mode propagation conditions, *The Journal of the Acoustical Society of America* **120**, 2478-2490 (2006).
- [6] C. Wilcox, Theory of Bloch waves, *Journal d'Analyse Mathématique* **33**, 146-167 (1978).
- [7] J. M. Renno, B. R. Mace, On the forced response of wave guides using the wave and finite element method, *Journal of Sound and Vibration* **329**, 5474-5488 (2010).
- [8] J. -M. Mencik, M. N. Ichchou, Multi-mode propagation and diffusion in structures through finite elements, *European Journal of Mechanics-A/Solids* **24**, 877-898 (2005).
- [9] Y. Waki, B. R. Mace, M. J. Brennan, Numerical issues concerning the wave and finite element method for free and forced vibrations of waveguides, *Journal of Sound and Vibration* **327**, 92-108 (2009).
- [10] Y. Fan, M. Collet, M. N. Ichchou, L. Li, O. Bareille, Z. Dimitrijevic, Energy flow prediction in built-up structures through a hybrid finite element/wave and finite element approach, *Mechanical Systems and Signal Processing* **66-67**, 137-158 (2016).
- [11] W. Zhong, F. Williams, On the direct solution of wave propagation for repetitive structures, *Journal of Sound and Vibration* **181**, 485-501 (1995).
- [12] A. Craggs, The application of the transfer matrix and matrix condensation methods with finite elements to duct acoustics, *Journal of Sound and Vibration* **132**, 393-402 (1989).
- [13] A. Kessentini, M. Taktak, M. A. Ben Souf, O. Bareille, M. Ichchou, M. Haddar, Computation of the scattering matrix of guided acoustical propagation by the Wave Finite Element approach, *Applied Acoustics*
- [14] A. W. Guess, Calculation of perforated plate liner parameters from specified acoustic resistance and reactance, *Journal of Sound and Vibration* **40**, 119-137 (1975).