

## CFA/VISHNO 2016

**Synthèse Modale Non-linéaire Pour l'Analyse des  
Systèmes Complexes**

X. Huang<sup>a</sup>, L. Jézéquel<sup>a</sup>, S. Besset<sup>a</sup>, L. Li<sup>b</sup> et O. Sauvage<sup>c</sup>

<sup>a</sup>ECOLE CENTRALE DE LYON, LTDS - Bât. E6, 36 avenue Guy de Collongue, 69134  
Ecully Cedex, France

<sup>b</sup>BUAA, 37, Rue de XueYuan, District de HaiDian, 100191 Pékin, Chine

<sup>c</sup>PSA Peugeot Citroën, Scientific and future technologies department / SteLab, F-78943  
Vélizy Villacoublay Cedex, France  
xingrong.huang@ec-lyon.fr



LE MANS

Dans l'industrie, les systèmes complexes sont souvent supposés linéaires en raison des temps de calcul prohibitifs requis pour simuler l'influence des non-linéarités. Dans cette étude, nous développons une méthode simple, rapide et efficace pour analyser les systèmes complexes faiblement non-linéaires en utilisant des modes non-linéaires, sous l'hypothèse que les modes non-linéaires considérés sont faiblement ou pas couplés. L'originalité de cette approche réside dans la stratégie de réduction des modes non-linéaires. L'un des principaux avantages de cette stratégie est le temps de calcul considérablement réduit. De plus, une fois les modes non-linéaires calculés, ils peuvent être utilisés pour obtenir la réponse forcée du modèle sous d'autres types d'excitations, par exemple lorsque l'excitation est localisée dans différentes zones du système. L'influence du nombre de modes non-linéaires utilisé sur la qualité du modèle réduit est analysée. L'effet de la troncature des modes linéaires dans la matrice de transformation est également étudié. La méthode proposée dans ce travail étant générale, elle s'applique à de nombreux systèmes industriels non-linéaires. À titre d'exemple, la méthode proposée est employée pour la détermination des effets non-linéaires à l'interface entre deux sous-structures.

## 1 Introduction

Les systèmes réels exhibent souvent des comportements non-linéaires. À cause des ressources informatiques et de la complexité de l'analyse, ces systèmes sont parfois supposés linéaires. Cependant, dans certains cas quand l'effet non-linéaire n'est plus négligeable, ce type de supposition ne satisfait plus aux attentes d'analyse. Ainsi, pour les systèmes assemblés soumis à de grandes déformations, que l'on rencontre dans le monde industriel automobile, ferroviaire ou aéronautique, les interfaces montrent un comportement non-linéaire que l'on ne peut négliger.

Pour analyser un système non-linéaire, les méthodes de Runge-Kutta, Newmark, Newton-Raphson sont introduites comme méthodes d'intégration temporelle. Elles donnent des résultats précis mais peuvent exiger des temps de calculs prohibitifs, ce qui n'est plus acceptable pour les systèmes à grand nombre de degrés de liberté (ddl). L'analyse modale est une technique très utile pour analyser ces structures mécaniques en projetant l'espace physique sur un espace modal, ce qui pourra aider à réduire le grand nombre de ddl en négligeant les modes de hautes fréquences. La synthèse modale linéaire est bien développée avec des bases de réduction variées : modes à interface fixée (modes internes) proposés par Hurty [7], modes libres introduits par MacNeal [12]. Craig and Bampton ont de plus développé une méthode combinant les modes à interface fixée et les modes contraints [4]. Besset and Jezequel ont proposé une technique de réduction du nom de "double synthèse modale", en introduisant les modes de branches dans l'analyse des systèmes assemblés [2].

Cependant, le principe d'orthogonalité et de superposition des modes linéaires dans la synthèse modale, n'est en général plus valable dans le cas non-linéaire. La notion de modes non-linéaires a été d'abord introduite par Rosenberg [13]. Il a montré que les solutions des problèmes géométriques peuvent se réduire à l'équation du mouvement en  $n$  équations découplées. Szemplinska-Stupnicka a ensuite démontré que, les réponses forcées des systèmes non-linéaires et continus pourraient être trouvés par une procédure d'approximations [14]. Cette méthode est une généralisation de méthode de Ritz et est connue sous le nom de "méthode du mode non-linéaire isolé". Ensuite, Jezequel and Lamarque ont développé une méthode analytique pour calculer les solutions périodiques des systèmes avec non-linéarités analytiques basé sur la théorie des modes normaux [8]. L'exploitation des modes non linéaires et des réponses forcées dans le cadre de la sous-structuration a été étendue

aux cas non-linéaires par Setio [5].

Les techniques de réduction sur le modèle ont été en outre développées pour faciliter l'analyse des systèmes complexes non-linéaires. Jiang a introduit les modes et variétés invariants numériques pour déterminer les réponses forcées des systèmes soumis à une excitation harmonique [9]. Krack a développé un modèle réduit basé sur la méthode généralisée de Fourier-Galerkin pour analyser les systèmes non-linéaires en absence de résonances internes [10]. Les méthodes de réduction pour les systèmes dynamiques non-linéaires sont comparés dans [11], qui montre que les performances des méthodes de réduction dépendent des types d'excitation.

Dans le cadre de ce travail, on s'intéresse aux systèmes assemblés faiblement non-linéaires, qui contiennent un grand nombre de ddl. Les non-linéarités sont localisées continûment sur les interfaces et le système est soumis à une excitation harmonique. Les modes non-linéaires réduits sont en premier lieu calculés grâce à des méthodes d'itérations numériques. Une base de réduction est introduite pour réduire le nombre d'éléments modaux dans le processus d'itérations, et cette base linéaire est composée des modes de branches et des modes internes de manière analogue au cas linéaire [6]. Ces modes, fréquences propres, et facteurs d'amortissement non-linéaires sont ensuite interpolés implicitement en fonction de l'amplitude modale. Ces paramètres modaux servent ensuite à déduire les réponses forcées d'une variété de types d'excitation. Les réponses forcées du système sont ensuite superposées aux réponses forcées d'un seul mode non-linéaire. Un exemple numérique est donné pour présenter la synthèse numérique des réponses forcées et pour analyser le phénomène non-linéaire. Les effets de réduction des modes de branches et modes internes sur les réponses du système non-linéaire sont également abordés

## 2 Théorie de base

Considérons un système dynamique, discret conservatif à  $N$  degrés de liberté (ddl), dont les équations du mouvement sont :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (1)$$

où  $\mathbf{M}$  est la matrice de masse,  $\mathbf{K}$  la matrice de raideur,  $\mathbf{f}$  l'effort non-linéaire intégré dans le système. Pour faciliter la description des méthodes ultérieures, les ddl physiques  $\mathbf{u}$  sont rangés dans l'ordre des ddl de l'interface, ddl de  $S_1$ , ddl de  $S_2$ . Le nombre de ddl sur l'interface est noté  $N_j$  et le

nombre de ddls des deux sous-structures est noté  $N_S$ .

## 2.1 Modes non-linéaires réduits

En oscillation libre, les réponses sont approchées par des fonctions harmoniques d'amplitude  $q$  et de pulsation  $\omega$  :

$$\mathbf{u}(t) \approx \sum_{j=1}^{N_r} \mathbf{u}_j \cos(\omega t) \approx \sum_{j=1}^{N_r} q_j \tilde{\Phi}_j \cos(\omega t) \quad (2)$$

$\mathbf{f}$  donne à ce problème une nature non-linéaire. L'une des difficultés numériques dans la résolution du problème non-linéaire réside dans le fait que de nombreuses variables sont intégrées dans le processus d'itérations et que le temps de calcul peut devenir prohibitif. Pour alléger la charge informatique, on introduit le concept de modes non-linéaires réduits. En projetant ces coordonnées physiques sur des coordonnées modales avec une base de réduction  $T_r$ , la taille du système est réduite à  $N_r$  ddls. Deux techniques de réduction seront abordées dans la suite.

En appliquant la technique de Craig & Bampton, la base de réduction est composée de  $N_C$  modes contraints et  $N_F$  modes à interface fixée (modes internes) :

$$\mathbf{T}_{CF} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{C1} & \mathbf{T}_{C2} & \mathbf{T}_{F1} & \mathbf{T}_{F2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{JJ} & \mathbf{0} \\ \Psi_{SJ} & \Phi_{FF} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Le nombre de ddls internes est ainsi réduit à travers la troncature des modes internes, tandis que le nombre de ddls sur l'interface reste le même, puisque  $N_F < N_S$  et  $N_C = N_J$ .

Pourtant, dans l'analyse du système assemblé où les interfaces représentent un grand nombre de ddls du système, il est nécessaire de réduire aussi les ddls sur l'interface. Dans ce contexte, les modes de branche sont introduits, et la base de réduction constituées des  $N_B$  modes de branches et  $N_F$  modes internes s'écrit :

$$\mathbf{T}_{BF} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{B1} & \mathbf{T}_{B2} & \mathbf{T}_{F1} & \mathbf{T}_{F2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_B & \mathbf{0} \\ \Psi_{SJ} \mathbf{X}_B & \Phi_{FF} \end{bmatrix} \quad (4)$$

La matrice des modes de branches  $\mathbf{X}_B$  est formée par les vecteurs propres  $\mathbf{x}_B$  de l'équation :

$$(-\omega^2 \mathbf{M}_B + \mathbf{K}_B) \mathbf{x}_B = \mathbf{0} \quad (5)$$

où  $\mathbf{M}_B = (\mathbf{T}_B)^T \mathbf{M} \mathbf{T}_B$ ,  $\mathbf{K}_B = (\mathbf{T}_B)^T \mathbf{K} \mathbf{T}_B$ ,  $\mathbf{T}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{JJ} \\ \Psi_{SJ} \end{bmatrix}$

En utilisant les modes de branche, le nombre de ddls sont encore réduit par rapport aux modes contraints, puisque  $N_B < N_C = N_J$ .

Dans l'analyse qui suit, on ne distinguera pas  $T_{CF}$  et  $T_{BF}$ , ils seront tous les deux notés  $T_r$ . L'équation du mouvement réduit s'écrit alors de la fa suivante :

$$\mathbf{M}_r \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_r \mathbf{q} + \mathbf{f}_r(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (6)$$

où  $\mathbf{M}_r = (\mathbf{T}_r)^T \mathbf{M} \mathbf{T}_r$ ,  $\mathbf{K}_r = (\mathbf{T}_r)^T \mathbf{K} \mathbf{T}_r$ ,  $\mathbf{f}_r = (\mathbf{T}_r)^T \mathbf{f}$

Le concept de la linéarisation équivalente a été introduit initialement par Krylov et Bogoliubov, et l'équation linéaire équivalente de ce système s'écrit :

$$\mathbf{M}_r \ddot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{K}}_r \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (7)$$

La raideur linéaire équivalente de ce système non-linéaire est :

$$\tilde{\mathbf{K}}_r \tilde{\Phi}_j^r \mathbf{q} = \mathbf{K}_r \mathbf{q} + \mathbf{f}_r \quad (8)$$

Les modes réduits  $\tilde{\Phi}_j^r$  sont normalisés par rapport à la matrice de masse :

$$(\tilde{\Phi}_j^r)^T \mathbf{M}_r \tilde{\Phi}_j^r = 1 \quad (9)$$

La pulsation non-linéaire  $\tilde{\omega}_j$  et les formes modales réduites  $\tilde{\Phi}_j$  sont obtenus par minimisation du module de la fonction résidu (10).

$$\epsilon(\mathbf{q}_j) = (\tilde{\mathbf{K}}_r - \mathbf{K}_r) \mathbf{T}_r (\tilde{\Phi}_j^r q_j) - (\mathbf{T}_r)^T \mathbf{f}_r \quad (10)$$

La détermination de ces paramètres est obtenue par le processus numérique itératif décrit dans le Tableau 1. Grâce à la base de réduction  $T_r$ , le nombre de variables intervenant dans les itérations est largement réduit.

TABLEAU 1 – Calcul des modes non-linéaires réduits

Algorithme 1	Calcul du j-ème mode non-linéaire réduit en fonction de l'amplitude modale
Variables	$\tilde{\omega}_j, \tilde{\Phi}_j$
Données	$\mathbf{M}_r, \mathbf{K}_r, \mathbf{f}_r, \mathbf{q}, n_a$ (nombre d'amplitude modale)
Conditions initiales	$\tilde{\omega}_j(\mathbf{q} = 0) = \omega_j, \tilde{\Phi}_j(\mathbf{q} = 0) = \Phi_j$
Traitement	Tant que $k > n_a$ , Faire fsolve( $\epsilon(\mathbf{q}_j)$ ) satisfaisant la condition de normalisation, Affecter à $\tilde{\omega}_j(\mathbf{q}_k)$ la solution précédente $\tilde{\omega}_j(\mathbf{q}_{k-1})$ , Fin Tant que
SortieS	$\tilde{\omega}_j(\mathbf{q}), \tilde{\Phi}_j(\mathbf{q})$

## 2.2 Paramètres modaux du modèle réduit

Issus de l'étape précédente, certains paramètres modaux pourront être retirés et serviront ensuite pour la synthèse des réponses forcées. Seul un nombre restreint de modes participe efficacement au comportement réel. Les  $N_n/l$  premiers modes sont retenus, et s'écrivent en fonction de la combinaison des modes linéaires. Les participations de ces modes linéaires seront interpolées en fonction de l'amplitude modale. Quand les composantes de cette forme modale non-linéaire ne sont pas très nombreuses, elles peuvent être interpolées directement en fonction de l'amplitude modale.

$$\tilde{\Phi}_j^r = \sum_{k=1}^{N_l} \tilde{\beta}_{jk}^r \Phi_k^r \quad (11)$$

En cas d'amortissement  $\mathbf{D}$  dans le système, les facteurs d'amortissement modal s'écrivent :

$$\tilde{\xi}_j = \frac{1}{2} \frac{(\tilde{\Phi}_j^r)^T \mathbf{D} \tilde{\Phi}_j^r}{(\tilde{\omega}_j^r)^2} \quad (12)$$

Considérons que le système est excité par un effort  $\mathbf{F}$ . De façon similaire, la force modale est également interpolée en fonction de l'amplitude modal.

$$\tilde{F}_j = (\tilde{\Phi}_j^r)^T \mathbf{F} \quad (13)$$



L'évolution des formes modales, des pulsations propres et des facteurs d'amortissement pour les premiers modes du système sont donc tous interpolés en fonction de l'amplitude modale. Ces paramètres modaux serviront de base pour l'analyse des réponses forcées à partir de résonances non-linéaires.

### 2.3 Synthèse des réponses forcées

La méthode du mode non-linéaire isolé est utilisée pour approcher la réponse à proximité de la résonance :  $u = q_j \tilde{\Phi}_j$ .

En appliquant la méthode d'approximation de Ritz-Galerkin (i.e. en pré-multipliant l'équation modale par  $\tilde{\Phi}_j^T \mathbf{T}_{BF}^T$ ), les équations du mouvement sont donc découplées en  $N_r$  équations (Premiers  $N_{nl}$  modes non-linéaire) et s'écrivent sous forme scalaire à l'aide des fonctions d'interpolation en  $\mathbf{q}_j$  de  $\tilde{\Phi}_j$  et  $\tilde{\omega}_j$  :

$$q_j = \frac{\tilde{F}_j(|q_j|)}{-\omega^2(\tilde{\mu}_r^j(|q_j|)) + i\tilde{d}_r^j(|q_j|) + (\tilde{\lambda}_r^j(|q_j|))} \quad (14)$$

avec

$$\tilde{\mu}_r^j = (\tilde{\Phi}_r^j)^T \mathbf{M}_r \tilde{\Phi}_r^j, \quad \tilde{d}_r^j = (\tilde{\Phi}_r^j)^T \mathbf{D}_r \tilde{\Phi}_r^j, \quad \tilde{\lambda}_r^j = (\tilde{\Phi}_r^j)^T \tilde{\mathbf{K}}_r \tilde{\Phi}_r^j$$

Ce problème non-linéaire pourra être résolu par deux moyens : résoudre  $\mathbf{q}_j$  en fonction de  $\tilde{\omega}_j$  par les méthodes numériques itératives illustrés dans l'Algorithme 2 ; ou exprimer  $\tilde{\omega}_j$  en fonction explicite de  $\mathbf{q}_j$  comme présenté dans [3], dans ce cas, les fonctions explicites dépendent du type d'amortissement.

TABLEAU 2 – Calcul de l'amplitude modale

Algorithme 2	Calcul de l'amplitude modale en fonction de la pulsation d'excitation pour mode non-linéaire $j$
Variables	$\mathbf{q}_j$ (dimension $N_r$ )
Données	$\tilde{\omega}_j(q)$ , $\tilde{\Phi}_j(q)$ , $\omega$ , $n_w$ (nombre discrétisé de pulsation d'excitation)
Condition initiale	$\mathbf{q}_j = 0$
Traitement	Tant que $k > n_w$ Faire fsolve (équation 14), Affecter à $q_k$ la solution précédente $q_{k-1}$ , Fin Tant que
Sortie	$\mathbf{q}_j(\omega)$

La solution est recherchée dans un espace de dimension finie et composée des formes modales non-linéaires. Les réponses forcées sont en fait une superposition des réponses forcées du mode non-linéaire isolé.

## 3 Simulations et discussions

Afin d'illustrer la méthode précédente, un exemple de deux plaques qui partagent une interface non-linéaire est investigué (Fig.1). Le modèle d'éléments finis (FE) est construit sous "Structural Dynamic Toolbox" [1]. Comme compromis entre la performance de calcul et la description du modèle, on choisit pour le maillage 4 à 5 éléments par longueur d'onde. Ce modèle FE comporte au total 72 ddls associés aux 15 éléments rectangulaires linéaires,

parmi lesquelles 9 éléments associés à la Plaque 1 ( $S_1$ )  $a = 0.66 \text{ m}$ ,  $b = 0.6 \text{ m}$ , et 6 éléments associés à la Plaque 2 ( $S_2$ )  $a = 0.44 \text{ m}$ ,  $b = 0.6 \text{ m}$ . Les deux plaques sont toutes les deux de type Kirchhoff, avec une épaisseur  $e = 2 \text{ mm}$ .

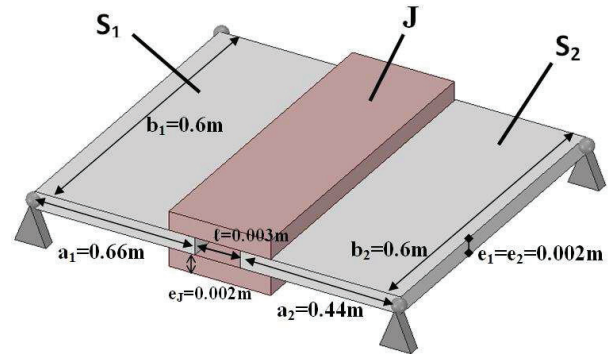


FIGURE 1 – Système assemblé composé de deux plaques du type Kirchhoff et une interface non-linéaire en caoutchouc

L'interface en caoutchouc ( $\theta = 0.003 \text{ m}$ ,  $e = 0.002 \text{ m}$ ) est modélisée par des éléments de ressorts uniformément répartis sur le maillage de l'interface. Le choix de cette modélisation peut s'expliquer par le fait que la masse de caoutchouc est négligeable par rapport à la masse de l'acier, et que le caoutchouc est beaucoup plus flexible que l'acier. Considérons le module de Young ( $E$ ) le long de la direction  $x$ , et le module de cisaillement ( $G$ ) le long des directions  $y$  et  $z$ , les raideurs des ressorts dans les trois directions sont notées  $k_x$   $k_y$   $k_z$  et donnés par la relation suivante. Une valeur de  $E = 10^8 \text{ Pa}$  qui est du grandeur de celle du caoutchouc est choisie. Afin d'assurer la quasi-incompressibilité en volume du caoutchouc ; la valeur de 0.49 est adoptée pour le coefficient de Poisson. La largeur du maillage est notée  $\delta y$ .

$$k_x = E \frac{\delta y}{\dagger} \theta, \quad k_y = G \frac{\delta y}{\dagger} \theta, \quad k_z = G \frac{\delta y}{\dagger} \theta. \quad (15)$$

Une force de type balourd est appliquée à  $S_1$  dans la direction  $z$ , et l'excitation est localisée à  $a = 0.44 \text{ m}$ ,  $b = 0.2 \text{ m}$  :  $F = mR\omega^2 \cos(\omega t)$  ; où  $m = 40 \text{ g}$ ,  $R = 10 \text{ cm}$  et la fréquence d'excitation est notée  $\omega$ .

Les non-linéarités concernent les forces d'interaction verticale sur le maillage de l'interface. La loi non-linéaire de l'oscillateur Duffing est définie par :

$$f_{nl} = \alpha \Delta u^3 \quad (16)$$

avec un coefficient non-linéaire constant :  $\alpha = 0.9$ .

### 3.1 Première réduction sur le nombre des modes non-linéaires complets

La performance globale du système peut être représentée par ses premiers modes. Une analyse de convergence du nombre de modes non-linéaires retenus est effectuée dans le processus de simulation.

Le coefficient de réduction est un concept important dans la synthèse modale. Si le coefficient de réduction est 2 pour une bande de fréquence de fréquence maximale  $50 \text{ Hz}$ , cela signifie que les modes inférieurs à  $2 * 50 \text{ Hz}$  sont retenus dans la synthèse. Dans cette étude, les 12 premiers modes

non-linéaires sont retenus, *i.e.* le coefficient de réduction est égal à 2. Ce choix de coefficient de réduction vient d'un compromis entre la précision du modèle et le coût de calcul.

Dans l'analyse qui suit, des résultats concernent la réponse au point d'excitation. La Fig.2 présente la sensibilité des réponses forcées vis-à-vis du nombre de modes non-linéaires retenus. On peut observer que quand le coefficient de réduction est supérieur à 2, les réponses restent stables bien que le coefficient de réduction augmente.

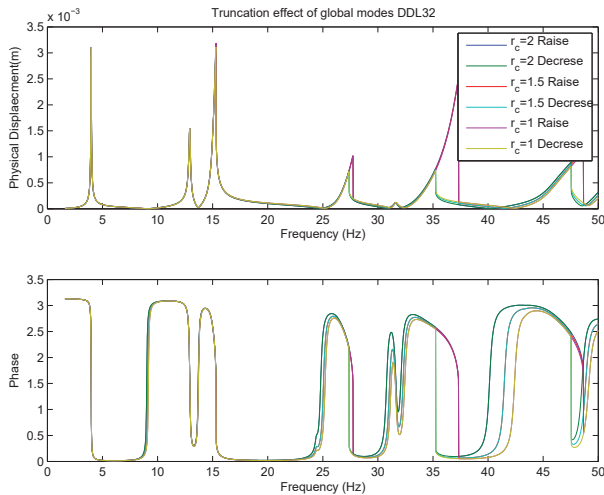


FIGURE 2 – L'effet de troncature du nombre de modes non-linéaires

En appliquant la méthode de mode non-linéaire isolé et en prenant ensuite la synthèse des réponses forcées dans la bande de fréquence intéressée, on obtient les réponses forcées du système non-linéaire. Ces résultats sont comparés avec les résultats obtenus par la méthode temporelle de Runge-Kutta, dans les deux sens de balayage ascendant et descendant (Fig.3). La demi-figure au-dessus compare l'amplitude des réponses forcées, et la demi-figure en dessous compare la phase. On peut observer que les réponses de ces deux méthodes sont assez proches, ce qui est une preuve de l'efficacité de la méthode de synthèse modale. Le décalage entre ces deux courbes et les sauts sont les conséquences des non-linéarités.

La Fig.3 en outre indique que quand la fréquence d'excitation se situe entre  $27 - 30 \text{ Hz}$ ,  $34 - 39 \text{ Hz}$  et  $45 - 50 \text{ Hz}$ , le modèle montre un comportement non-linéaire plus évident. Ce phénomène pourra être expliqué par les réponses forcées d'un seul mode non-linéaire, et par les évolutions des paramètres modaux.

La Fig.4 présente les contributions de chaque mode non-linéaire dans la réponse. La Fig.5 expose les participations des modes linéaires dans chaque mode non-linéaire. La Fig.4 montre aussi que les modes 5, 7, 8 et 9 ont un comportement plus fortement non-linéaire que celui des autres modes. Ces résultats sont en excellent accord avec ceux de la Fig.5, qui présente les participations des modes linéaires dans chaque mode non-linéaire.

La Fig.6 montre l'évolution des fréquences propres en fonction de leurs amplitudes modales respectives.

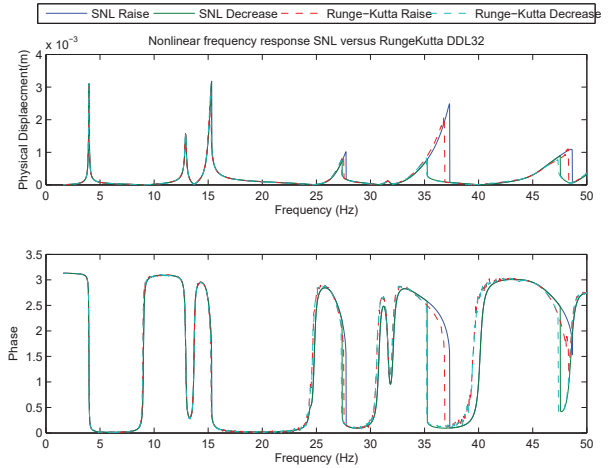


FIGURE 3 – Comparaison des réponses forcées obtenues par NLMS méthode appliqué sur modèle complet and obtenues par la méthode RungeKutta

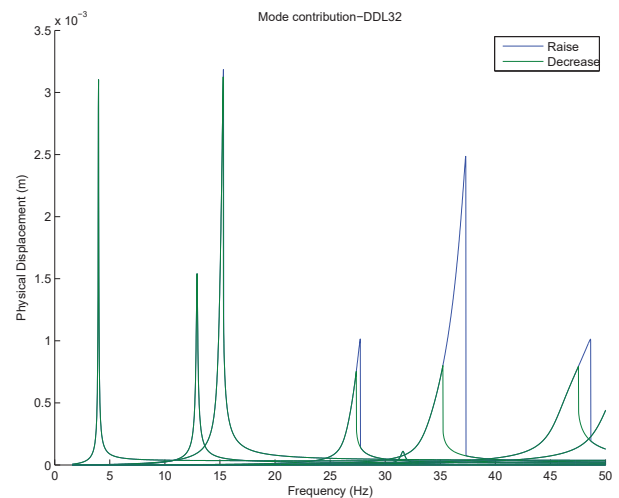


FIGURE 4 – Contributions de la réponse d'un mode non-linéaire isolé en cas d'amortissement hystérétique

### 3.2 Deuxième réduction avec une base de transformation basée sur les modes contraints ou les modes de branche

Afin d'estimer les comportements du système sans utiliser un calcul complet, une base de réduction est introduite. L'intérêt majeur de cette base réside dans le fait que le calcul numérique n'est effectué que pour les modes considérés, au lieu d'intégrer toutes les coordonnées physiques dans le processus d'itérations du calcul numérique.

Avant d'appliquer cette réduction sur le modèle non-linéaire, la qualité du modèle réduit est d'abord vérifiée pour le système linéaire. De la même manière, pour rechercher un compromis entre le temps de calcul et la qualité du modèle réduit, un coefficient de réduction égal à 2 est choisi pour les modes de branches et les modes internes. Deux modèles réduits sont étudiés : un modèle réduit avec modes contraint et modes internes ; un modèle réduit avec mode de branche et modes internes. Pour évaluer la qualité des modèles réduits, les valeurs de fréquences sont comparées entre les modèles réduits et le modèle complet dans le Tableau 3. Les erreurs

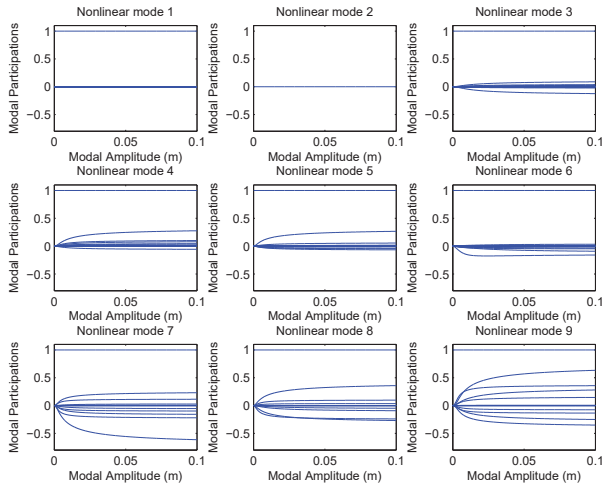


FIGURE 5 – Participations modales des modes linéaires dans chaque mode non-linéaire

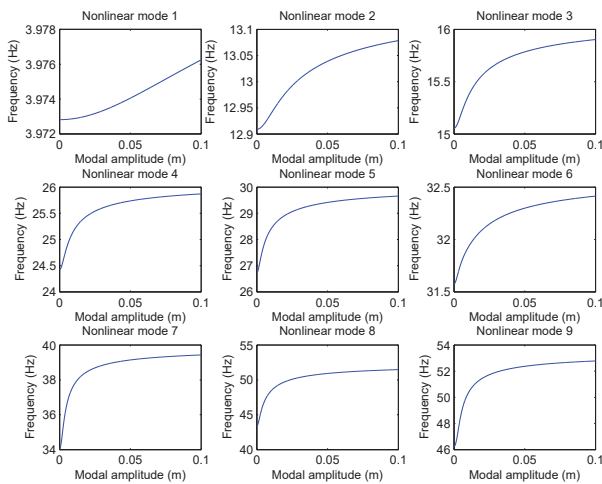


FIGURE 6 – Fréquences propres des modes non-linéaires vis-à-vis de l'amplitude modale

relatives sont inférieures à 0,3 %. Les valeurs de MAC pour comparer les formes modales réduites et les formes modales complètes sont aussi calculées. Elles s'avèrent supérieures à 0,95. Ces deux critères ont pour objectif de surveiller la qualité de notre modèle réduit (avec un coefficient de réduction égal à 2).

Les bases sont également pertinentes pour le problème non-linéaire décrit dans cette étude. Les réponses forcées obtenues avec les modèles réduits non-linéaires sont comparées à celles obtenues par une intégration temporelle de type Runge-Kutta (Figs.7,8). Les résultats concordent assez bien, ce qui est une preuve de validation de la stratégie.

L'autre intérêt de cette méthode concerne l'introduction d'un aspect modal en utilisant les modes contraints et les modes internes. La Fig. 9 trace l'évolution des composants

TABLEAU 3 – Comparison of normal modes frequency of the full FE model and the reduced model

Mode	1	2	3	4	5	6	7	8	9
FE	3.97	12.9	15.1	24.4	26.7	31.5	34.0	43.4	46.2
$T_{CF}$	3.97	12.9	15.1	24.4	26.8	31.6	34.1	43.5	46.4
$T_{BF}$	3.97	12.9	15.1	24.4	26.8	31.6	34.2	43.6	46.5

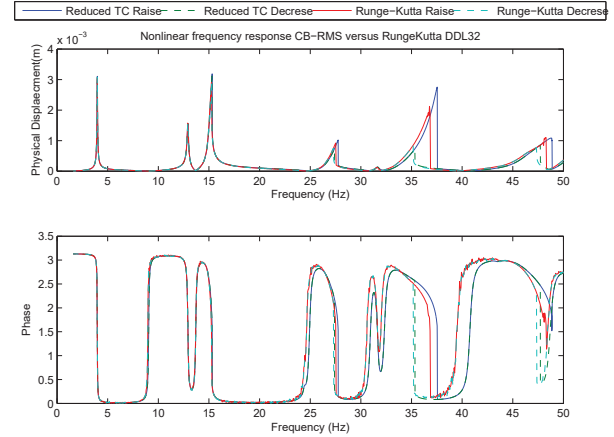


FIGURE 7 – Comparaison des réponses forcées obtenues par la méthode NLMS réduit en employant les modes contraints, obtenues par la méthode NLMS en employant le modèle FE complet, et obtenues par la méthode Runge-Kutta

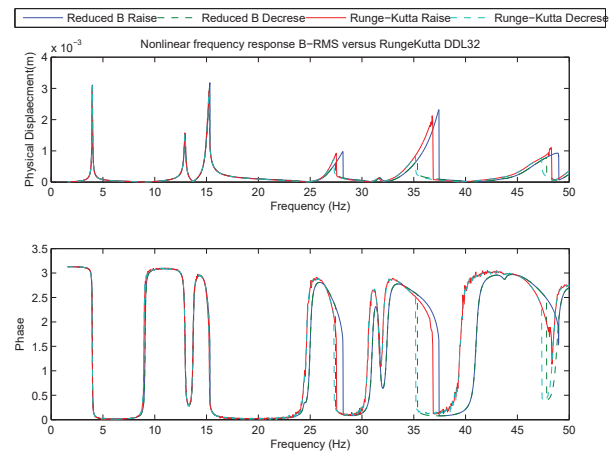


FIGURE 8 – Comparaison des réponses forcées obtenues par la méthode NLMS réduit en employant les modes de branche et obtenues par la méthode Runge-Kutta

de la forme modale non-linéaire réduite en fonction de l'amplitude modale. Cette figure distingue les participations modales des modes linéaires : les modes contraints (en bleu), et les modes internes (en rouge). Cela donne un autre moyen d'identifier les modes linéaires responsables du comportement non-linéaire. Sur la Fig. 9, on observe que les modes contraints jouent un rôle plus important dans le comportement non-linéaire du système que les modes internes. Ceci est raisonnable car les non-linéarités se localisent le long de l'interface.

L'effet de la troncature sur les modes internes et les modes de branches est aussi abordé, comme illustré dans les Figs.10 et 11. On observe que les réponses sont plus sensibles au nombre de modes de branches retenus qu'à celui des modes internes. Ce qui peut être expliqué par le fait que les non-linéarités se localisent sur l'interface, et qu'en plus, les modes de branches représentent le comportement global du système.

Le Tableau 4 compare le nombre de modes retenus dans trois modèles : le modèle complet, le modèle réduit avec la technique Craig & Bampton, et le modèle réduit avec

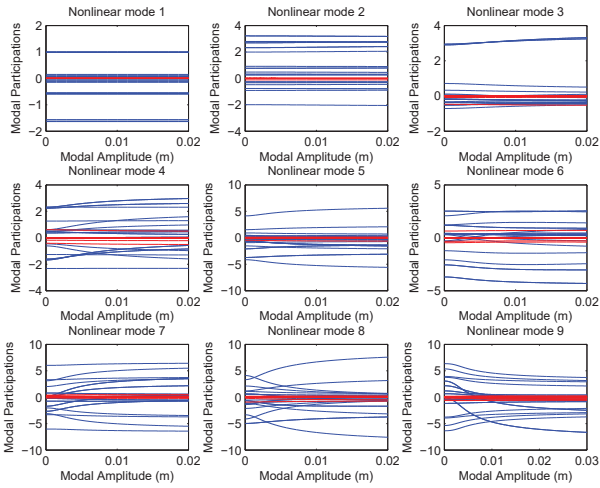


FIGURE 9 – Variation des composants modaux components dans les modes non-linéaires réduits obtenus par la méthode NLMS employant les modes contraints vis à vis de l'amplitude modale

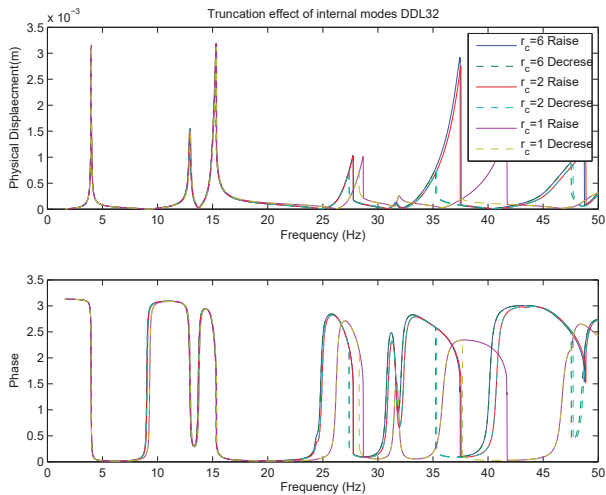


FIGURE 10 – Effect of truncation of internal modes on the quality of the reduced model

les modes de branche. Les modèles proposés permettent à réduire de 50 à 70 % le nombre de variables intervenant dans le calcul numérique itératif. Cependant les erreurs entre les réponses forcées obtenues par ces trois méthodes sont assez faibles. On peut donc conclure que la méthode proposée est efficace et permet de réduire de façon non négligeable le temps de calcul dans le processus d'analyse du comportement non-linéaire du modèle.

## 4 Conclusion

Cette étude propose une approche simple et efficace pour analyser le comportement non-linéaire et les réponses forcées du système non-linéaire. Le principe de cette stratégie est d'intégrer à la fois le concept de mode non-linéaire isolé, la synthèse des réponses forcées ainsi que les techniques de réduction.

Dans un premier temps, un modèle réduit, mais capable de représenter le comportement dynamique du système a été développé. Les modes non-linéaires sont calculés et les paramètres modaux non-linéaires sont extraits et interpolés

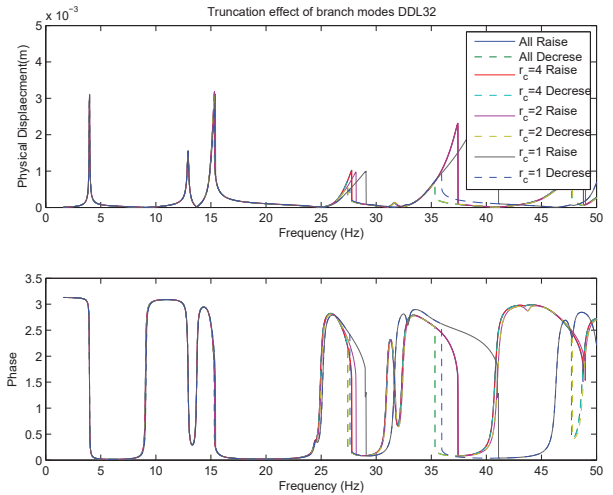


FIGURE 11 – Effect of truncation of branch modes on the quality of the reduced model

en fonction de l'amplitude modale. Le calcul de ces modes non-linéaires s'appuie sur des calculs numériques itératifs et peut donc s'avérer coûteux. Cependant, ce processus n'est effectué qu'une seule fois, et spécialement en utilisant une base de réduction et peut ensuite être employé pour tous les types d'excitations. Ces paramètres modaux présentent des informations riches et servent dans le processus de synthèse des réponses forcées. Dans un second temps, la synthèse des réponses forcées permet d'estimer rapidement la performance dynamique du système. Cette synthèse est basée sur la superposition des réponses forcées des modes non-linéaires isolés, et nécessite les paramètres modaux interpolés en fonction de l'amplitude modale issue de l'étape précédente.

De plus, les comparaisons des réponses forcées obtenues par la stratégie proposée par rapport à celles obtenues par la méthode d'intégration temporelle de Runge-Kutta, prouvent que la stratégie est efficace.

## Remerciements

Les auteurs remercient le China Scholarship Council pour son soutien financier dans le cadre de son programme bourse Groupe écoles Centrale PhD. Ces travaux se sont déroulés dans le contexte de l'OpenLab PSA « VAT@Lyon ».

## Références

- [1] Etienne Balmes. Structural dynamics toolbox. Technical report, 1997.
- [2] Sébastien Besset and L. Jézéquel. Vibroacoustical Analysis Based on a Multimodal Strategy : Triple Modal Synthesis. *Journal of Vibration and Acoustics*, 130(3) :031009, 2008.
- [3] Gibert Claude. *Analyse modale nonlineaire experimentale*. PhD thesis, Ecole centrale de Lyon, 2001.

- [4] R. R. Craig. Coupling of substructures for dynamic analyses : an overview. *AIAA Journal*, 6(7) :1313–1319, 1966.
- [5] Herlien D. Setio. *Extension aux Cas Non-linéaires et Dissipatifs*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 1990.
- [6] X.R. Huang, L. Jézéquel, Sébastien Besset, and L. Lin. Optimization of the dynamic behavior of vehicle structures by means of passive interface controls. *Journal of vibration and control*, 28(5) :896–902, 2016.
- [7] W.C. Hurty. Vibrations of structural systems by component mode synthesis. *ASCE Journal of the Engineering Dynamics Division*, 1 :581–601, 1960.
- [8] L. Jezequel and C. Lamarque. Analysis of non-linear dynamical systems by the normal form theory. *Journal of Sound and Vibration*, 149(3) :429–459, 1991.
- [9] D. Jiang, C. Pierre, and S. W. Shaw. Nonlinear normal modes for vibratory systems under harmonic excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 288(4-5) :791–812, 2005.
- [10] Malte Krack, Lars Panning-Von Scheidt, and Jörg Wallaschek. A method for nonlinear modal analysis and synthesis : Application to harmonically forced and self-excited mechanical systems. *Journal of Sound and Vibration*, 332(25) :6798–6814, 2013.
- [11] Fritz Adrian LülF, Duc-Minh Tran, and Roger Ohayon. Reduced bases for nonlinear structural dynamic systems : A comparative study. *Journal of Sound and Vibration*, 332(15) :3897–3921, jul 2013.
- [12] Richard H. MacNeal. A hybrid method of component mode synthesis. *Computers & Structures*, 1 :581–601, 1971.
- [13] R.M. ROSENBERG. The Normal Modes of Nonlinear n-Degree-of-Freedom Systems. *ASME*, 1962.
- [14] W. Szemplinska-Stupnicka. The resonant vibration of homogeneous non-linear systems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 15(4-5) :407–415, 1980.