

CFA/VISHNO 2016

Propriétés dynamiques d'un métamatériau auxétique obtenu par perforations hiérarchiques

K. Billon^a, M. Ouisse^a, E. Sadoulet-Reboul^a, M. Collet^b et F. Scarpa^c

^aDépartement mécanique appliquée, Institut FEMTO-ST, 24 rue de l'Épitaphe, 25000 Besançon, France

^bLTDS, Ecole centrale de Lyon, 36 Av. Guy de Collongue, 69134 Ecully, France

^cAdvanced Composites Centre for Innovation and Science (ACCIS), University Walk, BS8 1TR Bristol, UK
kevin.billon@femto-st.fr



LE MANS

Les travaux présentés sont consacrés à la compréhension des phénomènes ondulatoires se produisant dans un métamatériau comprenant des perforations rectangulaires, hiérarchiques et auxétiques. Les matériaux auxétiques sont des matériaux avec un coefficient de poisson négatif et qui possèdent la spécificité de s'élargir lors d'un test de traction uniaxial. Le métamatériau consiste en une plaque formée d'un enchaînement de perforations rectangulaires horizontales et verticales dans les 2 directions du plan de la plaque. La cellule élémentaire de ce réseau périodique est ainsi formée (niveau 1), les niveaux hiérarchiques suivants sont composés d'une répétition de ce motif à une échelle inférieure et ainsi de suite pour avoir un effet fractal. Une étude des ondes se propageant dans le réseau ainsi constitué est réalisée à l'aide des outils de calcul de valeurs propres implémentés dans le logiciel Comsol. L'analyse des diagrammes de dispersion obtenus montre que la largeur de bandes interdites cumulée augmente avec le niveau hiérarchique. L'influence des paramètres géométriques de la cellule sur la dispersion et les propriétés mécaniques de la structure sont investiguées en utilisant une méthode d'homogénéisation. Les résultats sont adimensionnalisés, normalisés par la fréquence du premier mode d'une plaque de mêmes dimensions en incluant la porosité, induite par les perforations dans les propriétés mécaniques. Les paramètres géométriques retenus pour caractériser la structure sont l'espacement entre deux perforations, le ratio caractéristique des dimensions de la perforation et le niveau hiérarchique. Le tracé des déformées de la structure montre que l'effet auxétique est lié à la rotation des quatre carrés rigides de la cellule élémentaire. Cette rotation est facilitée par la hiérarchie, ce qui conduit à une réduction de la rigidité. Cependant une amplification du phénomène auxétique du métamatériau est alors observée. La diminution de l'espacement entre deux perforations conduit à une augmentation de la largeur de bandes interdites cumulée et une diminution de la rigidité. Le ratio caractéristique des dimensions de la perforation affecte peu la rigidité. La hiérarchie permet de passer d'un matériau isotrope au niveau 0 à orthotrope pour les niveaux suivants. De plus, l'effet auxétique est amplifié avec la diminution de l'espacement entre deux perforations.

1 Introduction

Un milieu périodique est un matériau ou une structure possédant une périodicité spatiale. L'étude des structures périodiques a une longue histoire dans le domaine de la vibroacoustique. Le sujet intéresse les chercheurs de diverses branches de la physique depuis de nombreuses années, l'objectif étant de concevoir des structures possédant des propriétés que les structures conventionnelles ne possèdent pas.

Les lecteurs intéressés par les origines, les travaux en cours et les perspectives sur le sujet pourront se référer à l'article de synthèse [7] ainsi que la discussion [10] qui couvrent les aspects les plus importants de ce sujet.

Les performances dynamiques des matériaux structurés à l'échelle macroscopique est de premier intérêt pour de nombreuses applications d'ingénierie, avec une augmentation du nombre de papiers que ce soit pour les dispositifs passifs [14] ou actifs [4, 2, 6, 18].

Les structures hiérarchiques sont composées d'éléments structuraux qui sont eux-mêmes structurés [11, 1, 17, 9]. Les matériaux auxétiques sont des matériaux possédant un coefficient de Poisson négatif. Pour les matériaux conventionnels, lors d'un essai de traction uniaxiale, une réduction des dimensions perpendiculaires au chargement est observée, dans le cas des matériaux auxétiques une augmentation de ces dimensions est obtenue [12].

Une analyse de la dispersion d'une plaque avec des perforations rectangulaires, hiérarchiques et auxétiques sont décrits dans ce papier. Une étude paramétrique sur la géométrie de ces perforations rectangulaires est effectuée en utilisant une technique numérique d'homogénéisation par éléments finis afin de comprendre le comportement macroscopique du milieu structuré.

Cette approche est valable pour des réponses statiques et basses fréquences sur la structure d'intérêt. Ensuite, pour une plage de fréquences plus élevée, une analyse de dispersion du système est étudiée, permettant de décrire les caractéristiques de propagation d'ondes dans la structure hiérarchique.

2 Géométrie du réseau perforé, auxétique et hiérarchique

La figure 1 présente les dimensions de la cellule élémentaire du réseau périodique carré avec perforations rectangulaires. La symétrie de la géométrie dans le plan xy permet de définir l'ensemble de la géométrie de la cellule unitaire en utilisant seulement 2 paramètres : le rapport $AR = a/b$ (dimension de la perforation centrale) et l'espacement entre 2 perforations successives S [16].

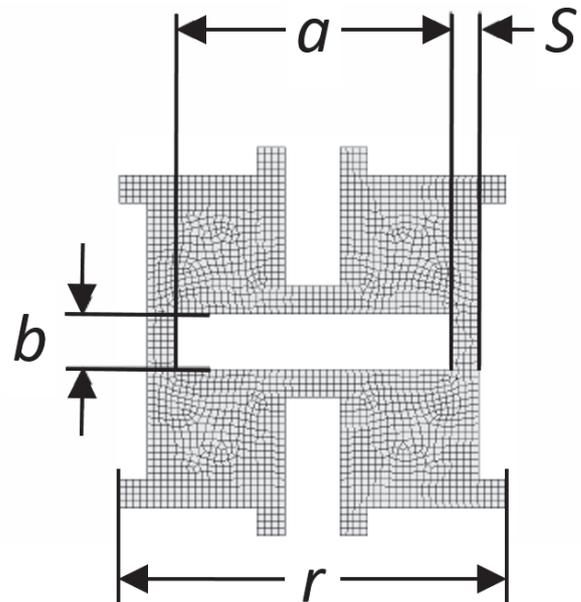


FIGURE 1 – Paramètres géométriques de la cellule élémentaire (niveau 1).

Le niveau 1 [16] est pris comme référence et celui-ci est comparé avec les niveaux hiérarchiques 2 et 3. Les structures hiérarchiques sont composées d'éléments structuraux qui sont eux-mêmes structurés. Au niveau 1, 4 carrés rigides

sont présents dans la cellule élémentaire. Les niveaux hiérarchiques suivants sont composés d'une répétition de ce motif à une échelle inférieure dans chaque carré et ainsi de suite pour avoir un effet fractal.

L'analyse paramétrique est menée en utilisant 3 paramètres : le rapport caractéristique de la taille de la perforation centrale (AR), l'espacement intercellulaire (S) et le niveau de la hiérarchie. La figure 2 montre comment évolue la géométrie pour une augmentation de l'espacement intercellulaire à chaque niveau hiérarchique. Les vides sont plus importants lors que le paramètre S est faible, une augmentation de la porosité est observée quand le niveau hiérarchique croit.

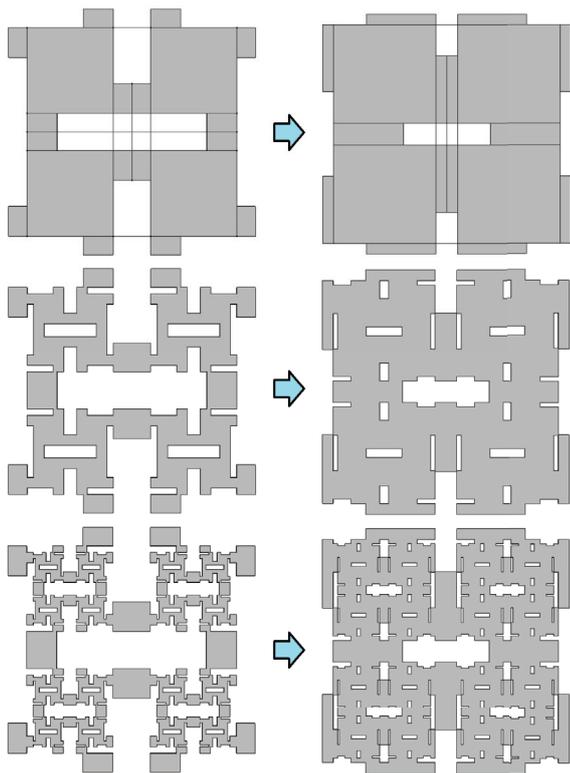


FIGURE 2 – Perforations rectangulaires, hiérarchiques, auxétiques aux niveaux 1, 2 et 3 avec $AR = 4$ variant de $S = 0.2$ à $S = 0.8$.

3 Propriétés mécaniques dans la plan

L'homogénéisation est effectuée avec un code éléments finis commercial. La cellule élémentaire, représentée dans la figure 1, est maillée en utilisant des éléments PLANE82 (8 nœuds avec 2 degrés de liberté par nœud).

Le tenseur de rigidité homogénéisé \bar{C} de la structure est donnée par

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Les paramètres matériaux peuvent être identifiés à partir de la matrice de souplesse \bar{S} liée au tenseur de rigidité \bar{C} , dans le cas des matériaux orthotropes en déformation plane on a

$$\bar{S} = \bar{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{12} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

3 expériences virtuelles sont utilisées pour déterminer les 2 modules de Young (E_1, E_2), les 2 coefficients de Poisson (ν_{12}, ν_{21}) et le module de cisaillement (G_{12}). La force de réaction et le déplacement sont alors calculés en utilisant un modèle éléments finis. Par exemple, dans l'essai de traction virtuel suivant x , la force de réaction est utilisée pour calculer le module élastique effectif $E_1 = \sigma_1/\varepsilon_1$ et le déplacement est utilisé pour calculer le coefficient de Poisson de [13] $\nu_{12} = -\varepsilon_2/\varepsilon_1$.

Les résultats sont normalisés par rapport au premier mode de flexion d'une plaque possédant les mêmes dimensions incluant la porosité induite par les perforations rectangulaires. La rigidité et la densité sont calculées de la manière suivante : $E' = E \times \phi^2$ et $\rho' = \rho \times \phi$ avec la porosité $\phi = V_{void}/V_{tot}$. L'évolution de la porosité pour différentes valeurs de l'espacement intercellulaire S aux niveaux 1, 2 et 3 est donnée dans la figure 3. Les fréquences utilisées pour normaliser les résultats sont présentées dans la figure 4. La bande de fréquences d'intérêt normalisée est de 0 à 5.

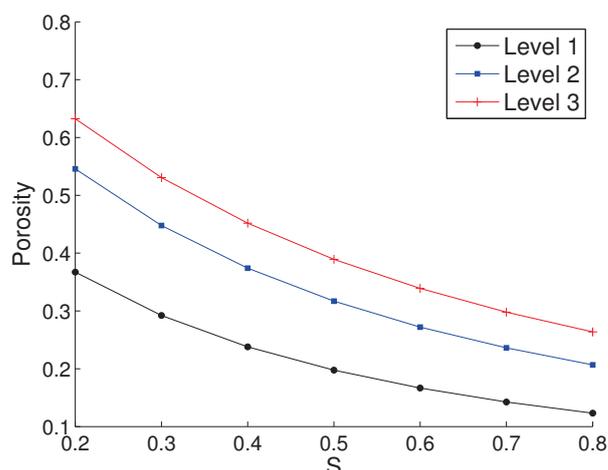


FIGURE 3 – Porosité équivalente pour différentes valeurs de S aux niveaux 1, 2 et 3.

Les paramètres matériaux homogénéisés peuvent être identifiés en utilisant l'homogénéisation. La structure est considérée comme un matériau orthotrope en déformation plane avec 5 paramètres mécaniques, les modules de Young dans les directions x et y (E_1 et E_2), les coefficients de Poisson (ν_{12} et ν_{21}) et le module de cisaillement (G_{12}).

Les figures 5 et 6 montrent l'évolution des propriétés mécaniques adimensionnées de la structure homogénéisée. Des déformées particulières correspondant à des points singuliers sont également mis en valeur dans ces figures. Comme on le voit sur la figure 6, l'effet Poisson est lié à la rotation des carrés rigides. Cet effet augmente avec le niveau hiérarchique supérieur, la rotation est favorisée.

En augmentant l'espacement intercellulaire (S), une augmentation de la rigidité effective en x (figure 5) est observée, la même tendance est visualisée dans la direction y . Cette particularité permet une augmentation de la rotation des carrés rigides et donc induit une augmentation du comportement. Aux niveaux 1, la structure est isotrope,

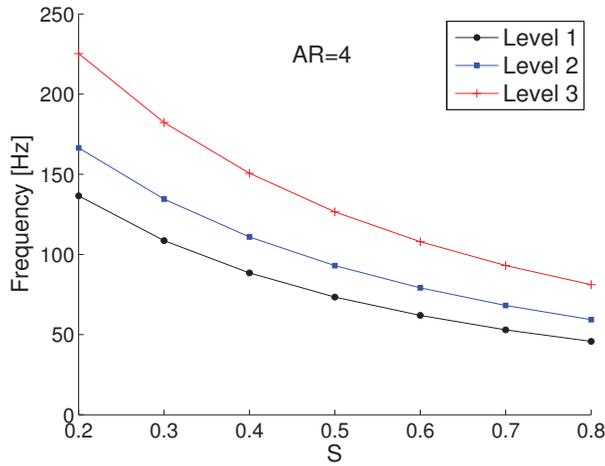


FIGURE 4 – Fréquences du premier mode de flexion d'une plaque possédant les mêmes dimensions incluant la porosité pour différentes valeurs de S aux niveaux 1, 2 et 3 utilisées pour normaliser.

avec l'augmentation du paramètre S , le coefficient de Poisson tend à devenir positif. Le rapport de rigidité entre chaque niveau dans les directions x et y diminue lorsque l'espacement intercellulaire augmente. Au niveau 2 et 3, des sauts dans les propriétés mécaniques sont observés en raison de la transition contact / non contact des sous unités 5. La hiérarchie permet de passer d'une structure isotrope à orthotrope, les niveaux hiérarchiques 2 et 3 sont toujours auxétiques (figure 6).

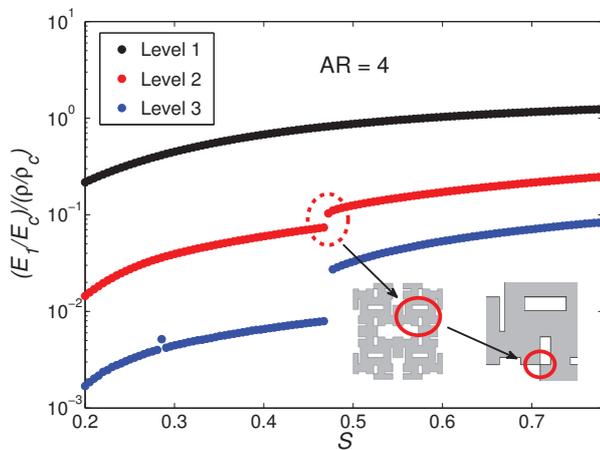


FIGURE 5 – Variation du module de Young E_1 par rapport à l'espacement entre 2 cellules S aux niveaux 1, 2 et 3 avec le paramètre AR égal à 4.

4 Propagation d'ondes

La méthode de Floquet-Bloch est une méthode couramment utilisée pour la détermination de diagrammes de dispersion de structures périodiques. La loi de comportement du matériau est supposée linéaire, élastique et isotrope. Les conditions de périodicité sont définies sur les bords du domaine par $u_R = e^{-jk_x r} u_L$ et $v_R = e^{-jk_y r} v_L$ où u_R (resp v_R) est le déplacement du bord de droite et u_L (resp. v_L) est le

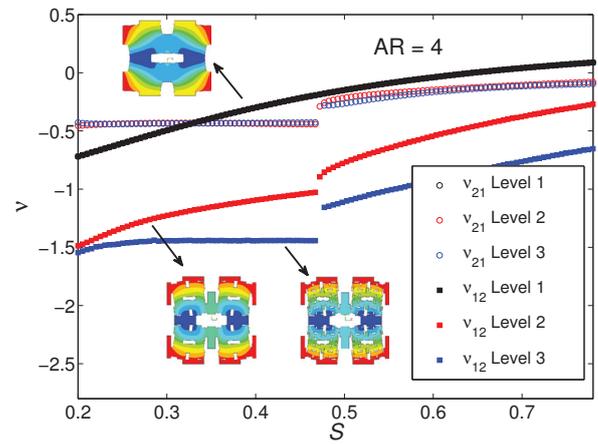


FIGURE 6 – Variation des coefficients de Poisson ν_{12} et ν_{21} par rapport à l'espacement entre 2 cellules S aux niveaux 1, 2 et 3 avec le paramètre AR égal à 4.

déplacement du bord de gauche dans la direction x (resp. y), k_x et k_y sont respectivement les nombres d'ondes dans les directions x et y [3].

L'équilibre dynamique du système est régi par le problème aux dérivées partielles

$$\rho \omega^2 u + \nabla \sigma = 0, \quad \sigma = C : \varepsilon, \quad (3)$$

où $u \in \mathbb{R}^3$ est le déplacement, σ est le tenseur des contraintes, C est le tenseur d'élasticité, ε est le tenseur des déformations, ρ est la masse volumique du matériau considéré et ω est la pulsation. Une étude paramétrique aux valeurs propres est menée utilisant le solveur Pardiso [15] avec deux paramètres à savoir les nombres d'ondes $k_x \in [0 \pi/r]$ et $k_y \in [0 \pi/r]$. La représentation de la dispersion uniquement sur le contour de la zone de Brillouin est suffisant pour l'observation des bandes interdites pour des systèmes réguliers [8]. Il convient de noter que cette méthode est largement utilisée dans la littérature, mais aucune preuve formelle de sa validité est donnée, et donc les résultats obtenus doivent être examinés attentivement [5].

Les résultats de l'analyse nous fournissent des diagrammes de dispersion qui sont déterminés pour les différents niveaux de hiérarchie et pour différents espaces intercellulaires (S). Le diagramme de bande fournit uniquement des informations sur le contour de la zone de Brillouin permettant d'identifier les bandes interdites. Seules les directions spécifiques (0° , 45° et 90°) sont étudiés.

Les bandes interdites ont observées pour un couple de valeurs spécifiques de AR et S (figure 7). Ces bandes interdites sont appelées bandes interdites omnidirectionnelles, car quelle que soit la direction de la propagation de l'onde cette onde ne peut pas se propager. Et il y a aussi des bandes interdites directionnelles, par exemple pour une bande de fréquences donnée les ondes sont capables de se propager uniquement dans une direction privilégiée. Dans notre cas, un intérêt particulier est donné aux bandes interdites omnidirectionnelles. L'augmentation de la densité modale avec la hiérarchie est vraie quelle que soit la valeur du paramètre S . Cette augmentation induit une augmentation du nombre de bandes interdites omnidirectionnelles. La figure 8 offre une vue synthétique des bandes interdites

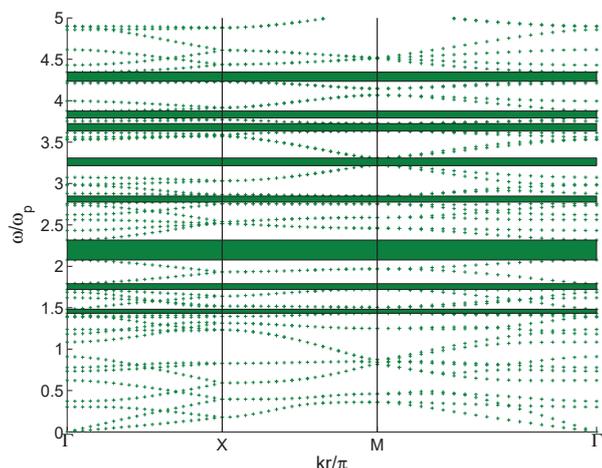


FIGURE 7 – Relation de dispersion dans l'espace des nombres d'ondes du réseau avec $AR = 4$, $S = 0.3$ pour le niveau 2. Les rectangles colorés représentent les bandes interdites omnidirectionnelles.

omnidirectionnelles pour les différentes configurations géométriques.

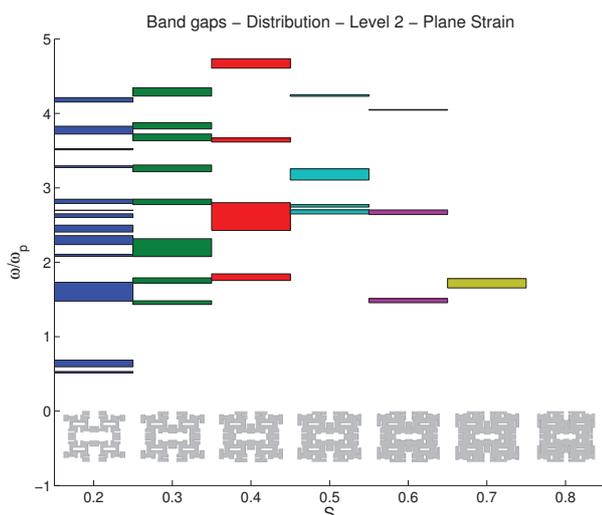


FIGURE 8 – Distribution des bandes interdites par rapport au paramètre S pour le niveau 2.

5 Conclusion

Les structures périodiques, auxétiques et hiérarchiques sont intéressantes pour la propagation des ondes, car elles peuvent présenter des bandes interdites complètes et partielles de manière à ce que les ondes associées ne peuvent se propager à travers le réseau. La détermination des courbes de dispersion est donc nécessaire dans le but de concevoir des structures spécifiques à de l'absorption vibratoire. Il est d'abord observé que la largeur totale de bandes interdites omnidirectionnelles augmente avec la hiérarchie. Lors de la diminution de l'espacement intercellulaire, la largeur totale de bandes interdites omnidirectionnelles augmente et la rigidité dans les directions x et y diminue, ce qui permet une augmentation des rotations des carrés rigides, donc un

comportement auxétique plus affirmé. La hiérarchie permet de passer d'une structure isotrope à orthotrope, les niveaux hiérarchiques 2 et 3 sont toujours auxétiques.

Remerciements

Ce travail est financé par l'Agence Nationale de la Recherche (ANR-12-JS09-008-COVIA) et réalisé en partenariat avec le Labex ACTION (ANR-11-LABX-0001-01). Les auteurs remercient également le soutien du projet FP7-AAT-2012-RTD-L0-341509 MorphElle pour avoir fourni une partie des outils de simulation utilisés dans ce travail.

Références

- [1] S. Castiñeira-Ibáñez, C. Rubio, J. Redondo, and J.V. Sánchez-Pérez. Quantitative characterization of bandgap properties of sets of isolated acoustic scatterers arranged using fractal geometries. *Applied Physics Express*, 7(4) :042201, 2014.
- [2] M. Collet, M. Ouisse, M. Ichchou, and R. Ohayon. Semi-active optimization of 2d wave's dispersion into shunted piezocomposite systems for controlling acoustic interaction. In *ASME 2011 Conference on Smart Materials, Adaptive Structures and Intelligent Systems*, pages 79–87. American Society of Mechanical Engineers, 2011.
- [3] M. Collet, M. Ouisse, M. Ruzzene, and M.M. Ichchou. Floquet–bloch decomposition for the computation of dispersion of two-dimensional periodic, damped mechanical systems. *International Journal of Solids and Structures*, 48(20) :2837–2848, 2011.
- [4] M. Collet, M. Ouisse, and F. Tateo. Adaptive metacomposites for vibroacoustic control applications. *Sensors Journal, IEEE*, 14(7) :2145–2152, 2014.
- [5] R.V. Craster, T. Antonakakis, M. Makwana, and S. Guenneau. Dangers of using the edges of the brillouin zone. *Physical Review B*, 86(11) :115130, 2012.
- [6] Z.G. Huang and C.F. Su. Band gaps of a two-dimensional periodic graphenelike structure. *Journal of Vibration and Acoustics*, 135(4) :041002, 2013.
- [7] M.I. Hussein, M.J. Leamy, and M. Ruzzene. Dynamics of phononic materials and structures : Historical origins, recent progress, and future outlook. *Applied Mechanics Reviews*, 66(4) :040802, 2014.
- [8] J.D. Joannopoulos, S.G. Johnson, J.N. Winn, and R.D. Meade. *Photonic crystals : molding the flow of light*. Princeton university press, 2011.
- [9] Q.J. Lim, P. Wang, S.J.A. Koh, E.H. Khoo, and K. Bertoldi. Wave propagation in fractal-inspired self-similar beam lattices. *Applied Physics Letters*, 107(22) :221911, 2015.

- [10] B.R. Mace. Discussion of 'Dynamics of phononic materials and structures : Historical origins, recent progress, and future outlook '(M.I. Hussein, M.J. Leamy and M. Ruzzene, *Applied Mechanics Reviews*, 66(4) :040802, 2014). *Applied Mechanics Reviews*, 66(4) :045502, 2014.
- [11] R.C. Norris, J.S. Hamel, and P. Nadeau. Phononic band gap crystals with periodic fractal inclusions : Theoretical study using numerical analysis. *Journal of Applied Physics*, 103(10) :104908, 2008.
- [12] M. Ruzzene and F. Scarpa. Directional and band-gap behavior of periodic auxetic lattices. *physica status solidi (b)*, 242(3) :665–680, 2005.
- [13] V. Salit and T. Weller. On the feasibility of introducing auxetic behavior into thin-walled structures. *Acta Materialia*, 57(1) :125–135, 2009.
- [14] F. Scarpa, M. Ouisse, M. Collet, and K. Saito. Kirigami auxetic pyramidal core : mechanical properties and wave propagation analysis in damped lattice. *Journal of Vibration and Acoustics*, 135(4) :041001, 2013.
- [15] O. Schenk and K. Gärtner. Solving unsymmetric sparse systems of linear equations with pardiso. *Future Generation Computer Systems*, 20(3) :475–487, 2004.
- [16] A. Slann, W. White, F. Scarpa, K. Boda, and I. Farrow. Cellular plates with auxetic rectangular perforations. *Physica status solidi (b)*, 252(7) :1533–1539, 2015.
- [17] Y. Tang, G. Lin, L. Han, S. Qiu, S. Yang, and J. Yin. Design of hierarchically cut hinges for highly stretchable and reconfigurable metamaterials with enhanced strength. *Advanced Materials*, 27(44) :7181–7190, 2015.
- [18] F. Tateo, M. Collet, M. Ouisse, M.N. Ichchou, K.A. Cunefare, and P. Abbe. Experimental characterization of a bi-dimensional array of negative capacitance piezo-patches for vibroacoustic control. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, page 1045389X14536006, 2014.