

CFA/VISHNO 2016

**Un dispositif de mesure des caractéristiques géométriques
et mécaniques de becs de clavecin**

A. Givois^a, A. Paté^a, J.-L. Le Carrou^a, S. Leconte^b et S. Vaiedelich^b

^aSorbonne Universités, UPMC Univ Paris 06, CNRS, LAM / d'Alembert, 4 place
Jussieu, 75005 Paris, France

^bLaboratoire de Recherche et Restauration du Musée de la musique, 221, avenue Jean
Jaurès, 75019 Paris, France
arthur.givois@gmail.com



LE MANS

Afin d'être pleinement utilisable dans un contexte musical, un clavecin doit être préalablement « harmonisé » par le facteur ou par le musicien lui-même. Une étape primordiale de l'harmonisation consiste à sélectionner les matériaux et à ajuster la géométrie des « becs », structures pinçant les cordes et actionnées par le système touche/sautereau. Les conditions initiales de vibration de la corde, à l'origine du son produit, sont affectées par le réglage des becs qui dépend du goût et du savoir-faire du claveciniste et du facteur. Nous présentons un dispositif à la fois portable, rapide et non-invasif, permettant de mesurer les caractéristiques géométriques (longueur et section) et mécaniques (module de Young) de becs de clavecins. Les dimensions sont estimées par des traitements d'images à partir de photographies, tandis que le module de Young est obtenu par recalage de la fréquence du premier mode de flexion entre des mesures vibratoires et un modèle de poutre à section variable. L'estimation de ces paramètres contribue à l'investigation des instruments de musique du patrimoine appartenant à la collection du musée de la musique.

1 Introduction

Le fonctionnement mécanique du clavecin repose sur le pincement de la corde par une structure appelée bec, ou plectre, fabriquée originellement avec de la plume d'oiseau ou du cuir et le plus souvent aujourd'hui en Delrin (polyoxyméthylène). Le processus de pincement s'effectue lors d'une phase d'interaction entre les deux systèmes, au cours de laquelle le bec — venant au contact de la corde comme le montre la figure 1 — subit une déformation de flexion tandis que la corde est éloignée de sa position initiale.

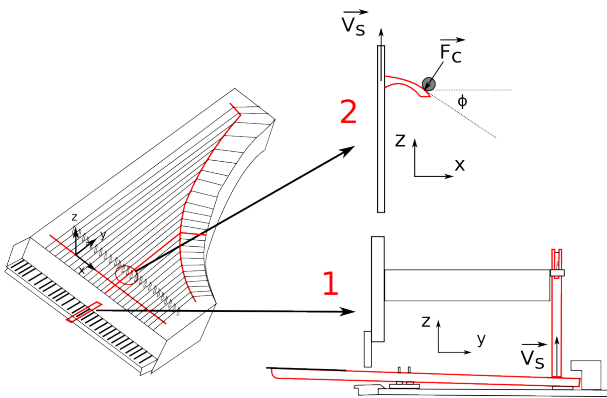


FIGURE 1 – Représentation schématique du clavecin (gauche), du système touche-sautereau (1) et du système sautereau-bec (2). Les grandeurs V_s , ϕ , F_c désignent respectivement la vitesse du sautereau, l'angle de déflexion du bec au point de contact avec la corde et la force exercée par la corde sur le bec.

L'étude de l'interaction entre le bec et la corde a fait l'objet de plusieurs travaux [1, 2, 3], parfois illustrés par des résultats expérimentaux [4, 5]. Si le bec est le plus souvent modélisé comme une poutre encastrée-libre à section constante avec un matériau isotrope, il a été montré que la prise en compte des variations de section a des conséquences sur la déformation du bec et les conditions initiales de vibration de la corde [6]. Dans ces modèles les caractéristiques mécaniques et notamment la valeur du module de Young du matériau composant le bec sont des paramètres ajustés de façon empirique par rapport aux données expérimentales.

L'étude expérimentale du clavecin implique donc de réaliser des mesures de profil et du module de Young des becs. Les sections peuvent être caractérisées par des photographies [6] après une procédure d'extraction des contours, ou à l'aide de méthodes optiques permettant

de restituer le profil d'un objet en trois dimensions [7]. La résolution du problème inverse conduisant à l'identification des paramètres mécaniques d'une structure est une problématique courante en sciences des matériaux [8, 9] : les méthodes de résolution peuvent s'appuyer sur des tests statiques en traction ou flexion [10, 11], et plus souvent sur des mesures vibratoires. L'identification des constantes élastiques repose dans ce dernier cas sur le recalage des paramètres élastiques à l'entrée d'un modèle analytique [12, 13] ou de type éléments finis [14, 15] pour obtenir la meilleure correspondance entre résultats numériques et expérimentaux. Le recalage peut s'effectuer de manière itérative à partir des seules fréquences de résonance [16, 17] et également des déformées opérationnelles obtenues à l'aide de méthodes optiques [13, 18]. Dans le cadre de la théorie des poutres isotropes à section constante, la connaissance théorique du comportement de la structure permet d'estimer les valeurs du module de Young complexe [19, 20].

Le champ des méthodes de mesures pour l'investigation des becs de clavecins est limité par les perspectives d'application sur des instruments du patrimoine dont la localisation et l'usage sont réglementés. Cette étude propose ainsi un protocole portable, fiable et non-invasif de mesure de paramètres mécaniques et géométriques de becs de clavecin. La rapidité est également recherchée dans l'optique de comprendre la diversité des réglages effectués sur l'ensemble de la tessiture de l'instrument. Puisque les procédures de résolution de problèmes inverses s'appuient sur une connaissance précise du comportement mécanique de la structure avec une géométrie supposée connue, un modèle de poutre à section variable est d'abord présenté pour définir un cadre théorique. Un dispositif expérimental pour les mesures de profil et fréquences de résonance des becs fait l'objet d'une seconde section. Enfin, des premiers résultats issus de ce protocole appliqué à quatre becs en Delrin de différentes formes, déjà comparés au cours de précédents travaux [21, 6], sont exposés et discutés.

2 Cadre théorique

Les petites dimensions du bec imposent de travailler en hautes fréquences. Ainsi seule la fréquence du premier mode de vibration de flexion du bec est considérée dans cette étude, celle-ci se trouvant dans un intervalle allant de 3,5 à 6,5 kHz d'après une première estimation d'une poutre à section constante équivalente. Dans un premier temps est effectuée une revue bibliographique des modèles de poutres à section variable. Une méthode numérique permettant l'estimation des premières fréquences propres d'une telle

poutre avec des conditions aux limites encastree-libre est ensuite présentée. Une procédure de recalage peut alors être mise en œuvre à partir des résultats issus de ce modèle.

2.1 Modèle de poutre à section variable : hypothèses générales et état de l'art

L'estimation des fréquences des premiers modes de flexion de poutre est un problème classique en vibration. Les modèles s'appuient le plus généralement sur les hypothèses suivantes :

- les sections restent droites et perpendiculaires à la fibre neutre (hypothèse d'Euler-Bernoulli),
- les déformations dues aux vibrations de flexion sont supposées faibles par rapport aux dimensions du bec,
- l'amortissement de la structure est négligé,
- le matériau composant le bec est homogène et isotrope. En particulier, le module de Young est réel et constant en tout point de la structure et à toutes les fréquences.
- Les sections présentent une forme rectangulaire, le profil peut être défini par une largeur et une épaisseur en tout point de la fibre neutre.

Une dernière hypothèse concerne l'évolution de largeur et d'épaisseur de la poutre : les méthodes analytiques directes restreignent ces variations à des fonctions continues linéaires [22, 23] ou polynomiales [24, 25] sur l'ensemble de la structure, dont les expressions sont choisies de façon à pouvoir résoudre analytiquement l'équation du mouvement. Dans le cas de fonctions polynomiales les fréquences propres sont approchées par la méthode de Rayleigh-Ritz. Avec le développement de nouvelles méthodes numériques, les dimensions de la section peuvent être choisies arbitrairement en approchant la forme de l'objet par assemblage de tronçons de poutres de sections constantes [26, 27, 28]. Le modèle que nous utilisons ici [29] prend en compte des variations continues de largeur et d'épaisseur.

2.2 Présentation du modèle retenu

La particularité de ce modèle est de transformer l'équation du mouvement en équation intégrale de Fredholm qui peut être résolue numériquement [30]. Le formalisme mathématique gouvernant ce modèle est brièvement exposé. Dans un premier temps est rappelée l'équation des vibrations libres d'une poutre de longueur L dans le cadre des hypothèses listées en 2.1 :

$$E \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[I(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

où E désigne le module de Young, x la coordonnée suivant l'axe principal, $I(x)$ le moment quadratique suivant l'axe de flexion, w le déplacement suivant l'axe z , ρ la masse volumique, $A(x)$ la section et t le temps. La recherche de solutions harmoniques amène à écrire la fonction de déplacement de la fibre neutre sous la forme $w(x, t) = W(x)e^{j\omega t}$. En posant les variables

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad k = \omega^2 L^4, \quad (2)$$

l'équation du mouvement devient

$$E \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[I(\xi) \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \right] - k [\rho A(\xi) W(\xi)] = 0, \quad 0 \leq \xi \leq 1. \quad (3)$$

Ce modèle [29] applique quatre intégrations successives à l'équation 3, il résulte donc :

$$EI(\xi)W(\xi) + E \int_0^1 \left[I''(s)(\xi - s) - 2I'(s) - k \frac{\rho A(s)}{6} (\xi - s)^3 \right] \dots = \frac{C_1}{6} \xi^3 + \frac{C_2}{2} \xi^2 + C_3 \xi + C_4, \quad (4)$$

où les C_i dépendent des conditions aux limites. Dans le cas d'une poutre encastree-libre et après calculs, la relation 4 prend la forme d'une équation intégrale de Fredholm.

$$EI(\xi)W(\xi) + \int_0^1 K_1(\xi, s)W(s)dx + k \int_0^1 K_2(\xi, s)W(s)dx = 0, \quad (5)$$

avec

$$K_1(\xi, s) = \begin{cases} EI''(s)(\xi - s) - 2EI'(s) & \text{si } 0 \leq s \leq \xi \\ 0 & \text{si } \xi \leq s \leq 1. \end{cases} \quad (6)$$

$$K_2(\xi, s) = \begin{cases} \frac{\rho A(s)}{6} s^2 (s - 3\xi) & \text{si } 0 \leq s \leq \xi \\ \frac{\rho A(s)}{6} \xi^3 (\xi - 3s) & \text{si } \xi \leq s \leq 1. \end{cases} \quad (7)$$

La résolution numérique de l'équation 5 est rendue possible par le développement de la déformée modale en série entière $W(\xi) = \sum_{n=0}^N c_n \xi^n$ pour un certain nombre de modes N . Celle-ci devient alors un problème aux valeurs et vecteurs propres :

$$\sum_{n=0}^N (d_{mn} + K_{1mn} + kK_{2mn})c_n = 0, \quad m = 0, 1, \dots, N \quad (8)$$

avec

$$d_{mn} = \int_0^1 \xi^{m+n} D(\xi) d\xi \quad \text{et} \quad (9)$$

$$K_{jmn} = \int_0^1 \int_0^1 K_j(\xi, s) \xi^m s^n ds d\xi, \quad (10)$$

avec $j = 1, 2$.

Les valeurs propres k obtenues permettent directement d'estimer les fréquences propres avec la relation 2.

2.3 Procédure de recalage pour l'identification du module de Young

Puisque seule une constante élastique est recherchée, le recalage peut être effectué sans méthode itérative.

Une première fréquence théorique f_{th1} est calculée à l'aide du modèle présenté précédemment avec une constante $E_1 = 2,9$ GPa fixée à une valeur standard du module de Young instantané du delrin [31]. En notant $\Omega_1 = 2\pi f_{th1} L^2 \sqrt{\frac{\rho A_0}{E_1}}$ la pulsation normalisée, et $E_2 = E_1 + \Delta E_1$ la valeur recalée du module de Young, la seconde estimation de la fréquence du 1^{er} mode vaut théoriquement

$$f_{th2} = \frac{1}{2\pi} \frac{\Omega_2}{L^2} \sqrt{\frac{(E_1 + \Delta E)I_0}{\rho A_0}}. \quad (11)$$

En remplaçant la valeur de Ω_2 par une valeur correspondant à la fréquence propre déterminée expérimentalement f_{expe} , le recalage à effectuer pour identifier le module de Young vaut :

$$\Delta E = E_1 \left(\frac{f_{expe}^2}{f_{th1}^2} - 1 \right). \quad (12)$$

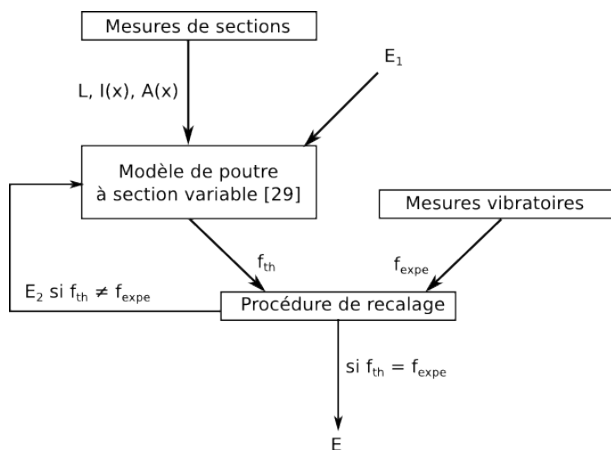


FIGURE 2 – Démarche adoptée pour l'identification du module de Young.

Comme le montre le schéma 2, cette procédure exploite deux résultats expérimentaux : d'une part le modèle utilisé s'appuie sur la connaissance du profil du bec et des variations de sections – dont dépendent les données $I(x)$ et $A(x)$ – pour estimer la première fréquence théorique f_{th1} . Afin d'éviter les erreurs numériques liées aux discontinuités de la dérivée seconde de l'inertie, les fonctions d'épaisseur et de largeur sont approchées à partir des points extraits des contours par des régressions d'ordre supérieur à 2. D'autre part l'estimation de la première fréquence de résonance du bec f_{expe} nécessite de mettre en place un protocole de mesures vibratoires.

3 Dispositif expérimental

3.1 Mesure des sections des becs

Le profil des sections est mesuré à partir de photographies. L'usage d'une méthode optique pour la reconstitution du profil de l'objet en trois dimensions est actuellement étudié : en raison des petites dimensions de l'objet (typiquement $4 \times 1,5 \times 0,5 \text{ mm}^3$), la photogrammétrie et la triangulation laser sont deux techniques pouvant potentiellement répondre aux besoins de l'étude. Les profils sont caractérisés par des photographies de face et de profil du bec suivant le protocole présenté figure 3. Un appareil photo *Nikon D800* équipé d'un objectif 60mm 1 : 2.8D permet la capture d'images du bec. Celui-ci est rattaché avec le sautereau à un système de rotation posé, lui-même posé sur un support fixe. L'intérêt de ce système est de pouvoir capturer des images du plectre sans modifier la distance focale d et de faire l'hypothèse que le repère de l'appareil est identique à celui de la scène photographiée. L'installation est éclairée par une paire d'ampoules à LED émettant une lumière blanche de forte intensité pour accentuer le contraste entre le bec et l'écran noir placé à l'arrière du dispositif.

Comme l'illustre la figure 4, l'extraction de contour est déterminée aisément avec une forte intensité lumineuse à partir des photographies obtenues, avec une procédure de traitement d'image comprenant un filtrage de Sobel.

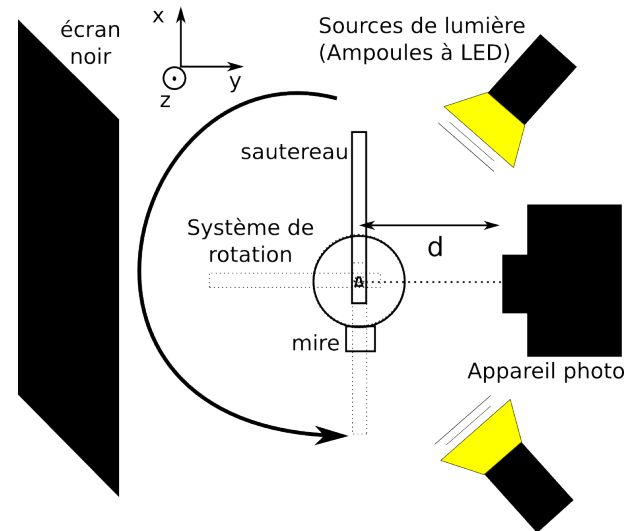


FIGURE 3 – Présentation vue du dessus du protocole expérimental pour la capture d'image des becs. On réalise trois photographies du bec : les positions correspondantes du sautereau sont en traits pleins ou pointillés.

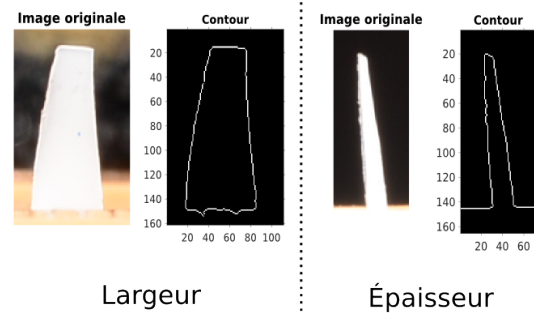


FIGURE 4 – Contours extraits des traitements d'images réalisées sur le bec 1 de l'étude. La largeur et l'épaisseur en pixels sont déduites des distances entre les points à gauche et à droite du contour.

3.2 Estimation du module de Young

En raison de ses petites dimensions, l'impédance mécanique du plectre est assez faible pour que ses vibrations puissent être observées avec un bon rapport signal/bruit lorsque l'excitation est acoustique. Le modèle de haut-parleur *Monacor SP-60/8* a été choisi en raison de ses caractéristiques électriques et mécaniques qui permettent de rayonner une variation de pression suffisamment élevée aux fréquences voulues. Le signal d'excitation est un balayage sinus évoluant de façon logarithmique pour limiter les phénomènes de distorsion du haut-parleur [32], d'une durée de 5 secondes et couvrant une bande de fréquence entre 2 et 8 KHz, encadrant ainsi les estimations préliminaires issues d'un modèle de poutre équivalente à section constante. La pression acoustique rayonnée par le haut-parleur à environ 3 cm est mesurée dans un premier temps avec un microphone *Bruel&Kjaer 4961*. L'échantillon est ensuite placé à la même distance, orienté de façon à ce que l'axe du haut-parleur soit parallèle à l'axe de déformation de flexion comme le montre la figure 5. Les vibrations du plectre sont mesurées avec un vibromètre laser *Polytec PDV 100*.

Les mesures effectuées font apparaître pour les quatre becs un unique mode de vibration comme on le voit sur

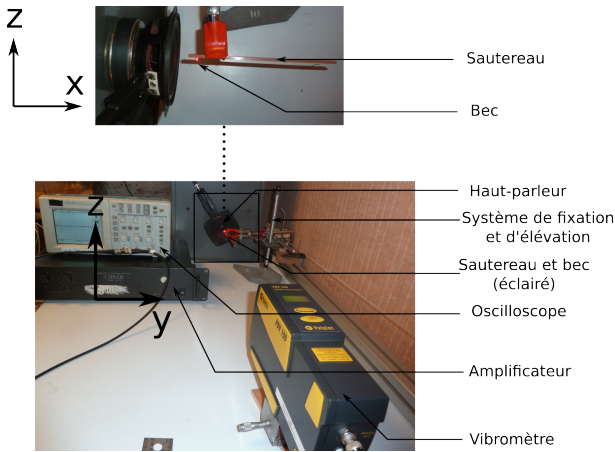


FIGURE 5 – Présentation du protocole expérimental.

les amplitudes des fonctions de transfert de la figure 6. La fréquence de ce premier mode est calculé avec la méthode à haute résolution ESPRIT [33] appliquée à la réponse impulsionnelle associée à cette fonction de transfert. Le principe de cette méthode est de décomposer un signal temporel sur une base de sinusoides amorties d'après le formalisme de l'*Exponential Sinusoidal Model* (ESM), et d'en identifier les paramètres.

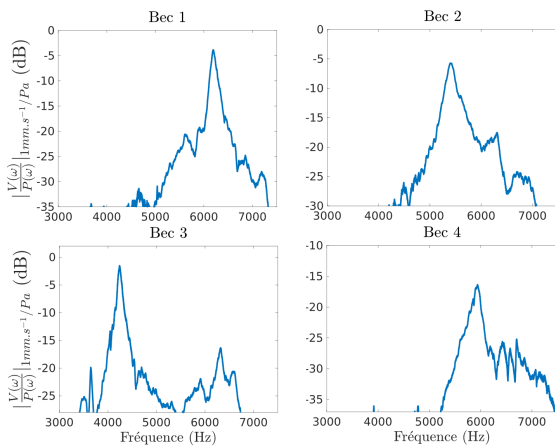


FIGURE 6 – Fonctions de réponse en fréquence des quatre becs étudiés.

La réponse impulsionnelle est obtenue avec le calcul de la transformée de Fourier inverse de la fonction de transfert, et a été filtrée par un filtre passe-bande à réponse impulsionnelle finie dans la gamme de fréquences d'excitation. La procédure a été appliquée plusieurs fois pour chaque bec, permettant ainsi de vérifier la répétabilité de la mesure et d'estimer les incertitudes de la fréquence du premier mode de flexion. Le mesurande vaut en effet $F_{expe} = f_{expe} + ku_c(f_{expe})$ où k est un entier, ici égal à 2 pour correspondre à un intervalle de confiance à 95%. L'incertitude-type $u_c(f_{expe})$ est déterminée à partir de l'estimation des fréquences de résonance réalisées sur dix mesures de réponse vibratoire des becs avec la méthode ESPRIT. Le tableau 1 confirme que la fréquence du premier mode de flexion varie beaucoup entre des becs de différentes géométries taillés dans un même matériau.

TABLEAU 1 – Fréquences du premier mode de flexion des quatre becs (Hz).

Bec 1	Bec 2	Bec 3	Bec 4
6195,06 ± 1,56	5424,42 ± 1,54	4240,89 ± 1,68	5938,0 ± 2,80

4 Premiers résultats

Les mesures de section (figure 7) montrent des différences plus significatives dans l'épaisseur que dans la largeur. La différenciation qui s'opère visuellement entre les paires de becs 1-4 et 2-3 avec les variations d'épaisseur se retrouve dans les fréquences du premier mode de flexion, mettant ainsi en évidence le fait que les deux grandeurs sont liées.

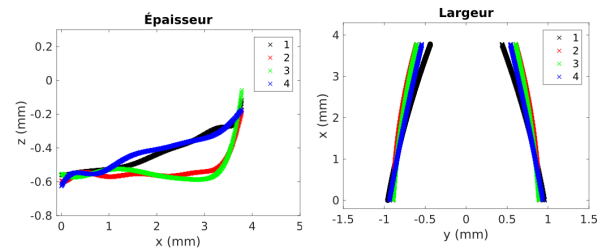


FIGURE 7 – Mesures de section des quatre becs.

TABLEAU 2 – Modules de Young des quatre becs (MPa).

Bec 1	Bec 2	Bec 3	Bec 4
578	629	580	645

Avec une erreur relative de 11.6%, les estimations du module de Young présentées dans le tableau 2 varient suffisamment peu pour confirmer que les quatre becs sont issus du même matériau. En revanche, les valeurs estimées sont très inférieures aux valeurs standard du module de Young instantané du Delrin. Les effets du vieillissement ou de la détérioration du matériau ne permettent pas d'interpréter de telles différences de valeurs estimées, les becs ayant été taillés il y a deux ans, et les valeurs identifiées étant presque cinq fois moins élevées qu'une valeur standard. Ce fait peut être expliqué par les propriétés visco-élastiques particulières du Delrin, qui est en effet sujet à des phénomènes de fluage dans de grandes proportions, sa déformation pouvant fortement diminuer au cours du temps sous l'effet d'une contrainte [34] : les valeurs du module de Young estimées à l'échelle des fréquences d'excitation peuvent être différentes de celles à prendre en compte à l'échelle des durées de l'interaction entre la corde et le bec.

5 Conclusion

Le protocole mis en place permet de caractériser le comportement dynamique de la structure sur la plage de fréquences étudiée, condensé en une information qui correspond à la fréquence du premier mode de flexion du bec. Une estimation du module de Young dans cette bande de fréquences est déduite de la procédure de recalage. Cette valeur a pu être déterminée à partir des mesures de section des becs et d'un modèle de poutre à section variable. La comparaison avec une valeur standard montre que le matériau se comporte différemment en fonction de la durée

d'observation. La prise en compte de ce phénomène est susceptible d'améliorer la compréhension de l'interaction entre la corde et le bec. Ainsi la variation des déformations du matériau à l'échelle des durées de l'interaction fera l'objet de prochains travaux. Un nouveau problème consiste à étudier dans quelle mesure cette variation peut être quantifiée.

Remerciements

Ce travail, inclus dans le projet FaReMi – fAire paRIer les instruMents du PatrImoine –, a bénéficié d'une aide de l'État gérée par l'Agence Nationale de la Recherche au titre de l'Idex Sorbonne Universités dans le cadre du programme « Investissements d'avenir » (référence ANR-11-IDEX-0004-02).

Références

- [1] D. H. Griffel. *The dynamics of plucking*. Journal of Sound and Vibration **175**(3), 289–297 (1994).
- [2] C. J. Perng, J. O. Smith, T. D. Rossing. *Physical model of the harpsichord plectrum-string interaction*. Thèse de Doctorat, Stanford University (2012).
- [3] C. Sloane. *The effects of plectrum parameters on harpsichord sound*. Journal of Sound and Vibration **125**(1), 185–186 (1988).
- [4] N. Giordano, J. P. Winans. *Plucked strings and the harpsichord*. Journal of Sound and Vibration **224**(3), 455–473 (1999).
- [5] S. Carral, M. Paset. *The influence of plectrum thickness on the radiated sound of the guitar*. In Proceedings of Acoustics'08, Paris, France (2008).
- [6] A. Roy, *Développement d'une plate-forme robotisée pour l'étude des instruments de musique à cordes pincées*. Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie (2015).
- [7] F. Chen, G. Brown M. Song. *Overview of three-dimensional shape measurement using optical methods*. Optical Engineering **9**(1), 10–22 (2000).
- [8] M. Bonnet, A. Constantinescu. *Inverse problems in elasticity*. Inverse problems **21**(2), R1–R50 (2005).
- [9] S. Avril, M. Bonnet, A. S. Bretelle, M. Grediac, F. Hild, P. Ienny, F. Pierron. *Overview of identification methods of mechanical parameters based on full-field measurements*. Experimental Mechanics, **48**(4), 381–402 (2008).
- [10] D. Lecompte, A. Smits, H. Sol, J. Vantomme, D. Van Hemelrijck. *Mixed numerical-experimental technique for orthotropic parameter identification using biaxial tensile tests on cruciform specimens*. International Journal of Solids and Structures **44**(5), 1643–1656 (2005).
- [11] J. Molimard, R. Le Riche, A. Vautrin, J. R. Lee. *Identification of the four orthotropic plate stiffnesses using a single open-hole tensile test*. Experimental Mechanics **45**(5), 404–411, (2005).
- [12] M. Grédiac, P. A. Paris. *Direct identification of elastic constants of anisotropic plates by modal analysis : theoretical and numerical aspects*. Journal of Sound and Vibration **195**(3), 401–415 (1996).
- [13] J. Cugnoni, T. Gmur, A. Schorderet. *Inverse method based on modal analysis for characterizing the constitutive properties of thick composite plates*. Computers and Structures **85**, 1310–1320 (2007).
- [14] J. Kuttonkeuler, (1999). *A finite element based modal method for determination of plate stiffnesses considering uncertainties*. Journal of composite materials **33**(8), 695–711.
- [15] P. Ladeveze, M. Reynier. *A localization method of stiffness errors for the adjustment of FE models*. Proceedings FE Modeling and Analysis in Vibrations Analysis Techniques and Applications, 355–361, (1989).
- [16] D. Larsson. *Using modal analysis for estimation of anisotropic material constants*. Journal of engineering mechanics **123**(3), 222–229 (1997).
- [17] M. P. Martínez, P. Poletti, L. G. Espert. *Vibration testing for the evaluation of the effects of moisture content on the in-plane elastic constants of wood used in musical instruments*. In Vibration and Structural Acoustics Analysis (pp. 21–57), Springer Netherlands, (2011).
- [18] M. Grédiac, N. Fournier, P. A. Paris, Y. Surrel. *Direct identification of elastic constants of anisotropic plates by modal analysis : experimental results*. Journal of Sound and Vibration **210**(5), 643–659 (1998).
- [19] R. Caracciolo, A. Gasparetto, M. Giovagnoni. *Measurement of the isotropic dynamic Young's modulus in a seismically excited cantilever beam using a laser sensor*. Journal of Sound and Vibration **231**(5), 1339–1353 (2000).
- [20] R. Pintelon, P. Guillaume, S. Vanlanduit, K. De Belder, Y. Rolain. *Identification of Young's modulus from broadband modal analysis experiments*. Mechanical systems and signal processing **18**(4), 699–726, (2004).
- [21] D. Chadefaux, J. L. Le Carrou, S. Le Conte, M. Castellengo. *Analysis of the harpsichord plectrum-string interaction*. In Proceedings of the Stockholm Music Acoustics Conference, 155–160 (2013).
- [22] J. A. Hoffmann, T. Wertheimer. *Cantilever beam vibration*. Journal of sound and vibration **229**(5), 1269–1276, (2000).
- [23] H. H. Mabie, C. B. Rogers. *Transverse vibrations of double-tapered cantilever beams*. The Journal of the Acoustical Society of America **51**(5B), 1771–1774, (1972).

- [24] S. Abrate. *Vibration of non-uniform rods and beams*. Journal of sound and vibration **185**(4), 703–716 (1995).
- [25] D. Zhou, Y. K. Cheung. *The free vibration of a type of tapered beams*. Computer methods in applied mechanics and engineering **188**(1), 203–216 (2000).
- [26] J. L. Le Carrou, F. Gautier, N. Dauchez, J. Gilbert. *Modelling of sympathetic string vibrations*. Acta Acustica united with Acustica **91**(2), 277–288, (2005).
- [27] M. A. De Rosa, M. Lippiello. *Natural vibration frequencies of tapered beams*. Engineering Transactions **57**(1), 45–66, (2009).
- [28] K. V. Singh, G. Li, S. S. Pang. *Free vibration and physical parameter identification of non-uniform composite beams*. Composite structures **74**(1), 37–50, (2006).
- [29] Y. Huang, X. F. Li. *A new approach for free vibration of axially functionally graded beams with non-uniform cross-section*. Journal of Sound and Vibration **329**(11), 2291–2303 (2010).
- [30] G. B. Arfken, H. J. Weber. *Mathematical Methods for Physicists, Sixth Edition*, Chapitre 16, pp. 1005–1011. Elsevier Academic Press (2003).
- [31] www2.dupont.com/Plastics/en_US/assets/downloads/design/DELDGe.pdf
- [32] A. Farina. *Simultaneous measurement of impulse response and distortion with a swept-sine technique*. In Audio Engineering Society Convention 108, Audio Engineering Society (2000).
- [33] R. Roy, T. Kailath. *ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques*. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing **37**(7), 984–995, (1989).
- [34] J. D. Ferry *Viscoelastic Property of Polymers*. John Wiley & Sons, New York (1970).