

## CFA/VISHNO 2016

**Simulation en temps réel de l'impédance d'entrée  
mesurée ou calculée des instruments à vent**P.-A. Taillard<sup>a</sup>, F. Silva<sup>b</sup> et P. Guillemain<sup>c</sup><sup>a</sup>FNHW, Schola Cantorum Basiliensis, Cerisier 16a, 2300 La Chaux-De-Fonds, Suisse<sup>b</sup>LMA UPR CNRS 7051, 4 impasse Nikola Tesla, CS40006, 13453 Marseille, France<sup>c</sup>Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, 4 impasse Nikola Tesla, CS 40006, 13453

Marseille, France

taillard@hispeed.ch



LE MANS

La synthèse sonore en temps réel des instruments à vent par modèles physiques demande d'approximer une mesure ou un calcul de l'impédance d'entrée à l'aide d'une batterie de filtres digitaux à relativement bas coût de calcul. Dans l'idéal, la détermination des paramètres des filtres devrait être rapide, sans que cela ne préteigne la qualité de l'approximation dans toute la bande passante utile du filtre, tout en étant robuste en présence de mesures bruitées. De plus, le filtre doit impérativement avoir un comportement passif à toute fréquence, y compris au-delà de la dernière fréquence mesurée. Il apparaît que l'analyse de Prony, ainsi que la méthode LSCE (Least Squares Complex Exponentials) qui en est dérivée, permet d'obtenir une batterie de filtres respectant toutes ces exigences, moyennant quelques aménagements. Les fréquences modales complexes sont approximées dans le domaine temporel, alors que les coefficients modaux complexes sont ajustés par moindres carrés dans le domaine spectral. On introduit des points fictifs au-delà de la dernière fréquence mesurée, de manière que l'approximation par les moindres carrés converge vers une solution assurant la passivité du filtre à toute fréquence. Une méthode de reconstruction de l'impédance d'entrée en basse fréquence complète cette étude. La méthode est validée à l'aide de mesures d'impédance de clarinette, de saxophone et de trompette. Pour la clarinette, par exemple, on peut simuler tous les doigtsés avec un filtre numérique ne demandant pas plus de 80 multiplications par pas de temps, pour une fréquence de coupure de 4 kHz et une fréquence d'échantillonnage de 44.1 kHz.

## 1 Introduction

La simulation en temps réel du son produit par un instrument à vent en situation de jeu repose sur une modélisation physique de l'excitateur, du résonateur ainsi que du rayonnement [1]. Chacun de ces éléments doit être implémenté de manière suffisamment simple pour satisfaire aux exigences du calcul en temps réel. La présente étude traite uniquement du cas de l'implémentation du résonateur, à partir d'une impédance d'entrée mesurée ou calculée, en proposant un algorithme suffisamment robuste, rapide, précis et fiable permettant d'obtenir une paramétrisation du résonateur adaptée à la synthèse temps réel.

Cette approche est désignée par le terme "estimation modale", dans le sens qu'il s'agit d'approximer une impédance d'entrée à l'intérieur d'une bande de fréquence à l'aide d'un (petit) nombre de modes donné. On la distingue de la décomposition modale, pratiquée sur une expression analytique d'une fonction mathématique dont on recherche les singularités et les résidus associés. Le théorème des résidus justifie la décomposition de cette fonction comme une somme infinie d'éléments simples [2]. Cette approche ne sera pas examinée ici, comme elle ne se prête en principe pas à la décomposition d'une impédance mesurée, mais uniquement à celle d'une impédance analytique. En effet, le cas de l'impédance mesurée est plus difficile à traiter, en raison du caractère lacunaire et bruité des mesures, qui demande de reconstituer l'impédance en basse fréquence et d'extrapoler un comportement en haute fréquence, tout en respectant certaines caractéristiques du résonateur, comme la passivité, dans les bandes de fréquence où l'impédance n'est pas connue.

Nous avons constaté que l'antique analyse de Prony (Gaspard Riche de Prony, 1795) et la méthode LSCE (Least Squares Complex Exponentials) qui en est dérivée [3], [4], [5], [6] permettent de satisfaire à ces exigences, moyennant quelques aménagements détaillés ci-dessous.

Ce document présente brièvement ces deux méthodes d'estimation modale et leur transposition dans le domaine numérique (section 2), puis rappelle quelques notions d'acoustique linéaire (section 3). Le cas de

l'estimation modale d'une impédance d'entrée est ensuite examiné (section 4), suivi d'un exemple d'application à une mesure réalisée sur une clarinette (section 5).

## 2 Méthodes d'estimation modale

### 2.1 Analyse de Prony

Cette méthode permet d'obtenir une estimation modale à partir la réponse impulsionnelle  $h(t)$  d'une fonction de transfert générique  $H(s)$  (par exemple une impédance d'entrée), sous la forme d'une somme pondérée d'exponentielles complexes :

$$h(t) = \text{Heaviside}(t) \sum_{m=0}^{M-1} c_m e^{s_m t} \quad (1)$$

La fonction de transfert  $H(s)$  correspondante s'écrit dans le domaine de Laplace :

$$H(s) = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{c_m}{s - s_m} \quad (2)$$

Lorsqu'on connaît les  $M$  fréquences modales complexes  $s_m$  ainsi que les coefficients modaux correspondants  $c_m$ , il est aisé de calculer la fonction  $h(t)$  pour n'importe quelle valeur du temps  $t$ . Si les  $(s_m, c_m)$  sont réels ou viennent par paires complexes conjuguées, alors  $H$  respecte la symétrie hermitienne et  $h(t)$  est une fonction réelle. Le but de l'analyse de Prony est d'inverser le problème : étant donné le pas d'échantillonnage  $T$  (respectant le théorème d'échantillonnage de Nyquist-Shannon, dans le sens qu'on admet qu'il n'existe aucun  $s_m$  supérieur à la fréquence de Nyquist) et  $2N = 2M$  échantillons  $h_n = h(nT)$ , trouver les valeurs de  $s_m$  et de  $c_m$ .

Posons  $x_m = \exp(s_m T)$  et notons que l'Eq. (1) peut s'écrire :  $h_n = \sum_{m=0}^{M-1} c_m x_m^n$ . L'identification avec le modèle avec exponentielles de l'Eq.(1) présuppose que la fonction de transfert soit considérée comme auto-régressive, c'est-à-dire qu'il existe des coefficients  $\beta_k$  tels que :

$$h_n = - \sum_{k=0}^{M-1} \beta_k h_{n-M+k} \quad (3)$$

Ces coefficients sont reliés aux pôles  $s_m$  par le fait que les  $x_m = \exp(s_m T)$  sont les racines du polynôme formé par les  $\beta_k$  :

$$\sum_{k=0}^M \beta_k x^k = \prod_{m=0}^{M-1} (x - x_m) = 0 \quad (4)$$

La détermination des  $\beta_k$  permet donc l'identification des pôles  $s_m$ . Elle se fait en constituant le système d'équations (3), pour  $n$  de 0 à  $N - 1$ , ce qui peut s'exprimer à l'aide d'une matrice  $A_{n,m} = h_{n+m}$  et d'un vecteur  $h'_n = h_{M+n}$ , (pour  $0 \leq m < M$  et  $0 \leq n < N$ ) :  $\mathbf{h}' = -\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\beta}$ . Résolvons pour  $\boldsymbol{\beta}$  (en admettant que  $\mathbf{A}$  soit inversible) :

$$\boldsymbol{\beta} = -\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{h}' \quad (5)$$

Les  $x_m$  s'obtiennent en résolvant numériquement l'Eq. (4). Les éventuelles racines  $|x_m| > 1$  sont éliminées, considérant qu'il s'agit d'artefacts mathématiques : les seules solutions physiquement acceptables sont des exponentielles décroissantes. Notons que suivant le nombre de modes demandé, la précision arithmétique requise pour le calcul des racines peut être importante (typiquement 20 à 50 chiffres significatifs, pour  $60 < M < 100$ ).

Ecrivons l'Eq. (1) à l'aide d'une matrice  $B_{n,m} = x_m^n$ , (pour  $0 \leq m < M$  et  $0 \leq n < N$ ) :  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{h}$ . On peut résoudre pour  $\mathbf{c}$ , puisque  $\mathbf{B}$  est inversible s'il n'y a pas de racines multiples (matrice de Vandermonde) :

$$\mathbf{c} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{h} \quad (6)$$

## 2.2 Méthode LSCE (Least squares complex exponentials)

La méthode de Prony peut être adaptée au cas de mesures bruitées. On diminue la sensibilité au bruit en considérant un nombre d'équations  $N$  plus grand que le nombre d'inconnues  $M$ . Les matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont alors rectangulaires et les Eq. (5) et (6) sont surdéterminés. Elles peuvent être résolues au sens des moindres carrés par la méthode du pseudo inverse. La méthode prend alors le nom de LSCE.

## 2.3 Transposition dans le domaine numérique

Les paramètres modaux doivent permettre la synthèse sonore avec un pas d'échantillonnage  $T_e$  potentiellement différent de celui utilisé pour les données de mesure (cf. Sec. 4.3). Il faut alors convertir les racines  $x_m$  à cette nouvelle fréquence de travail : on introduit les coefficients  $x'_m = x_m^{T_e/T}$  et la fonction de transfert  $H$  est approchée dans le domaine en  $z$  par

$$\hat{H}(z) = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{c'_m}{1 - x'_m z^{-1}} \quad (7)$$

de manière à optimiser la réponse impulsionnelle échantillonnée à  $T_e$ .

Il est possible que certaines racines soient réelles négatives, ce qui correspond à des pôles  $s_m$  oscillant à la fréquence  $1/(2T)$ . Lors du rééchantillonnage, ces

racines  $x_m$  sont remplacées par des paires  $x'_{m\pm}$  de racines complexes conjuguées (et  $M$  est incrémenté).

D'autre part, il n'est pas nécessaire d'évaluer les coefficients modaux  $c_m$  de l'Eq. (1), mais uniquement les coefficients  $c'_m$  de l'Eq. (7), optimisés pour la version numérique. On résout alors, au sens des moindres carrés, le système

$$\mathbf{B}' \cdot \mathbf{c}' = \mathbf{H} \quad (8)$$

qui traduit l'ajustement du comportement spectral des filtres numériques (donné par  $\mathbf{B}'$ )

$$B'_{n,m} = \frac{T_e}{1 - x'_m e^{-i\omega_n T_e}}$$

avec celui de la fonction de transfert  $H_n = H(s = i\omega_n)$  aux fréquences de mesure  $\omega_n = 2\pi n / ((2N - 1)T)$  (pour  $-N < n < N$  et  $0 \leq m < M$ ).

Notons que cette manière d'évaluer les coefficients  $c_m$  atténue le phénomène de ripple et que la formulation  $\hat{H}(z)$  permet de réaliser une implémentation temps réel très efficace, à l'aide d'une batterie de filtres (voir par exemple [2] §3.2 ou [7], p. 221).

## 3 Impédance d'entrée et coefficient de réflexion

En acoustique linéaire, la relation entre le débit  $U(\omega)$  et la pression  $P(\omega)$  à l'entrée d'un conduit acoustique est donnée par l'impédance d'entrée  $Z_{in}(\omega)$  :

$$P(\omega) = Z_{in}(\omega) U(\omega) \quad (9)$$

Dans la suite de ce document, nous considérons que  $Z_{in}$  a été adimensionné par l'impédance caractéristique  $Z_c = \rho c / S$  à l'entrée du conduit, où  $\rho$  est la masse volumique de l'air,  $c$  est la vitesse du son dans l'air et  $S$  est la section à l'entrée du conduit. Le coefficient de réflexion  $R(\omega)$  est défini comme suit :

$$R(\omega) = \frac{Z_{in}(\omega) - 1}{Z_{in}(\omega) + 1} \quad (10)$$

Notons la relation inverse :

$$Z_{in}(\omega) = \frac{R(\omega) + 1}{1 - R(\omega)} \quad (11)$$

Notons aussi que  $Z_{in}(-\omega) = Z_{in}^*(\omega)$  et  $R(-\omega) = R^*(\omega)$ , sans quoi la réponse impulsionnelle ne serait pas réelle.

La plupart des instruments à vent se caractérisent par  $Z_{in}(\omega \rightarrow \infty) = 1$  (donc  $R(\omega \rightarrow \infty) = 0$ ) et  $Z_{in}(\omega \rightarrow 0) \simeq 0$  (donc  $R(\omega \rightarrow 0) \simeq -1$ ). La passivité du résonateur implique que  $|R(\omega)| \leq 1, \forall \omega$ . En d'autres termes, le résonateur est dissipatif à toute fréquence. Ces propriétés autorisent une extrapolation des mesures, tout en respectant certaines caractéristiques physiques des conduits acoustiques.

Nous désignons par "bande mesurée" la bande de fréquence à l'intérieur de laquelle les pics d'impédance ont été mesurés et qu'on cherche à approximer de la manière la plus fidèle possible. La "bande ignorée" désigne la bande de fréquence au-delà de la dernière mesure effectuée, à l'intérieur de laquelle

l'approximation est forcément très grossière. Nous nous fixons comme unique objectif de garantir la passivité de la réponse dans cette bande. On désigne par "bande reconstituée" la bande de fréquence comprise entre 0 et la première fréquence pour laquelle on dispose de mesures d'impédance crédibles.

## 4 Estimation modale de l'impédance d'entrée par la méthode LSCE

Quatre aménagements sont nécessaires pour rendre la méthode LSCE apte à effectuer une estimation modale d'une impédance mesurée :

1. Il faut reconstituer l'impédance en basse fréquence d'une manière suffisamment plausible pour ne pas introduire de modes fictifs en basse fréquence.
2. Il faut préserver la robustesse de la méthode par rapport au bruit de mesure, sans perte notable de précision, tout en réduisant le temps de calcul.
3. Il faut trouver comment concilier l'analyse de Prony réalisée sur des signaux temporels construits à partir de mesures réalisées dans le domaine spectral, en contrôlant le phénomène de ripple lié à cette transformation.
4. Il faut garantir la passivité de l'estimation modale dans la bande ignorée.

Ces aspects sont examinés plus en détail dans les paragraphes ci-dessous.

### 4.1 Reconstituer l'impédance en basse fréquence

La plupart des ponts d'impédance ne permettent pas une mesure fiable en basse fréquence. On doit reconstituer de manière plausible le "pied" du premier pic d'impédance sans introduire de modes fictifs ni perturber la précision de la méthode, qui est relativement sensible à la manière dont est opérée cette reconstitution. Nous proposons d'effectuer cette dernière sur la base du coefficient de réflexion  $R$ , qui a un comportement asymptotique plus régulier que  $Z_{in}$ .

La méthode retenue est la suivante :

1. Calculer  $R$  à partir de  $Z_{in}$  à l'aide de l'Eq. (10).
2. Sélectionner les mesures à partir desquelles on tente une extrapolation (typiquement entre 100 et 280 Hz). Éliminer au besoin les données comportant un bruit trop important.
3. Effectuer un fit de  $|R|$  à l'aide d'un polynôme ne comportant que des termes d'ordre pair (typiquement du  $10^{ème}$  degré),  $q_{pair}(\omega) \simeq |R(\omega)|$ . Le coefficient d'ordre 0 est fixé à 1 (ou proche de 1), de manière à assurer que  $|R| \leq 1$  autour de la fréquence 0. Le polynôme pair garantit la symétrie du module entre les fréquences positives et négatives (puisque  $R(-\omega) = R^*(\omega)$ ).

4. Calculer  $\arg(R)$  et éliminer les sauts de  $2\pi$ , de manière à obtenir une fonction continue de  $\omega$ . On fitte cette fonction à l'aide d'un polynôme impair,  $q_{impair}(\omega) \simeq \arg(R) - \pi$ . Le polynôme impair garantit l'antisymétrie de l'argument entre les fréquences positives et négatives.
5. Les valeurs manquantes sont approximées à l'aide de :  $R_{approx}(\omega) = q_{pair}(\omega) \exp(i(q_{impair}(\omega) + \pi))$

### 4.2 Rééchantillonnage des données spectrales de référence

Les mesures d'impédance comportent typiquement un grand nombre de valeurs. Si on applique la méthode LSCE à un tel volume de données, la taille des matrices devient telle que le temps de calcul devient important et requiert l'utilisation d'une arithmétique de haute précision. Il convient d'effectuer au préalable un rééchantillonnage, de manière à réduire le bruit, tout en réduisant la taille des matrices. Ceci s'effectue de préférence sur le coefficient de réflexion, qui présente des variations moins brusques que l'impédance d'entrée. On effectue un fit polynomial par tronçons du coefficient de réflexion, puis le rééchantillonnage s'effectue avec un pas fréquentiel adapté à la nature de l'impédance mesurée (typiquement 1 Hz pour une clarinette). Finalement, on revient à  $Z_{in}$  à partir de  $R$  à l'aide de l'Eq. (11).

### 4.3 Concilier les aspects temporels et spectraux

La méthode LSCE se base sur la réponse impulsionnelle échantillonnée de la fonction de transfert à évaluer. On peut obtenir celle-ci à partir d'une transformée de Fourier discrète inverse de  $Z_{in}$ , mais il est bien connu que ceci génère des ripples plus ou moins importants suivant la valeur de la partie imaginaire de l'impédance à la troncature [8]. Nous avons constaté par l'expérience qu'il n'est pas nécessaire de prendre de précautions particulières en effectuant cette transformée. Les ripples ne gênent pas le calcul des racines du polynôme à l'aide de l'Eq. (4). Par contre, il est crucial de résoudre l'Eq. (6) dans le domaine spectral pour s'en prémunir, *c.f.* Eq. (8).

### 4.4 Garantir la passivité

Généralement, la fréquence d'échantillonnage utilisée pour les simulations est bien supérieure à la dernière fréquence où l'impédance a été mesurée. Si on ne prend pas de précautions, l'approximation par les moindres carrés peut conduire à une solution qui ne respecte pas la passivité dans la bande ignorée. En général, deux expédients sont nécessaires pour obtenir une réponse passive à toute fréquence : i) on ajoute une racine supplémentaire ayant la valeur  $x_m = 0$  (ce qui revient à introduire un Dirac dans l'estimation modale) et ii) on donne quelques valeurs fictives convenablement choisies dans la bande ignorée. Pour la plupart des instruments à vents, ces valeurs fictives sont ajoutées aux alentours de  $\omega_n \simeq \pm 2\pi/(2T_e)$  et tendent vers l'impédance caractéristique. En d'autres

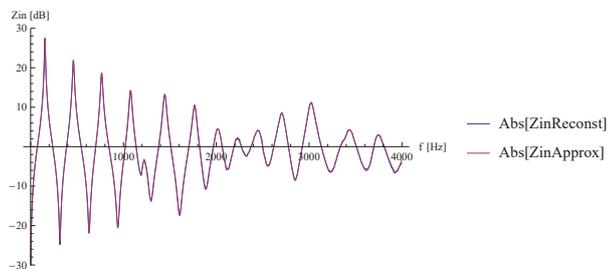


FIGURE 1 – Comparaison entre le module de la mesure  $Z_{in}$  reconstruite en basse fréquence (de 0 à 80 Hz), après rééchantillonnage (bleu) et l'estimation modale correspondante (grenat)

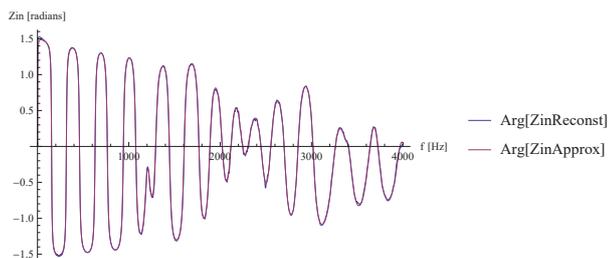


FIGURE 2 – Comparaison entre l'argument de la mesure de  $Z_{in}$  reconstruite en basse fréquence (de 0 à 80 Hz), après rééchantillonnage (bleu) et l'estimation modale correspondante (grenat)

termes, on inclut dans l'Eq. (8) quelques points ayant la valeur  $H_n = 1$  (puisque nous avons adimensionné l'impédance), de manière à faire tendre l'estimation modale vers cette valeur autour de ces fréquences.

Le seul cas s'étant avéré plus délicat à résoudre a été rencontré pour les instruments de la famille des cuivres, mesurés avec l'embouchure : la cuvette de l'embouchure provoque une réflexion des ondes presque sans amortissement, même à relativement haute fréquence. Dans ces conditions, avec un coefficient de réflexion dont le module avoisine 1 pour la dernière fréquence mesurée, il est plus difficile d'extrapoler un comportement en haute fréquence respectant la passivité. Nous avons cependant toujours réussi à trouver des points fictifs adéquats et n'avons rencontré aucun cas où cette technique ait échoué.

## 5 Application à la clarinette

Illustrons la méthode à partir de la mesure de l'impédance d'entrée du doigté Sol2 d'une clarinette Böhm de marque Buffet Crampon, modèle Prestige. Nous avons imposé la recherche d'une estimation basée sur 20 modes ( $M = 40$ ). Dans ce cas, la précision machine (15 digits) s'avère suffisante pour des calculs jusqu'à 30 modes environ.

Les aménagements proposés autorisent une estimation modale précise de l'impédance mesurée. On peut le constater sur les Fig. 1 et 2 qui illustrent le module et l'argument de  $Z_{in}$  mesuré (reconstitués en basse fréquence, après rééchantillonnage) et son estimation modale. Les erreurs sur le module et

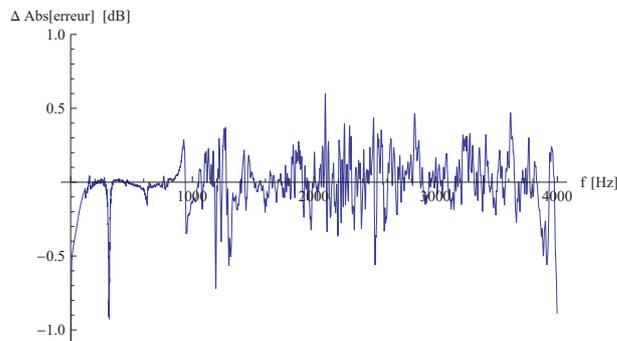


FIGURE 3 – Erreur sur le module de  $Z_{in}$ , entre la mesure rééchantillonnée (80 à 4000 Hz) et l'estimation modale

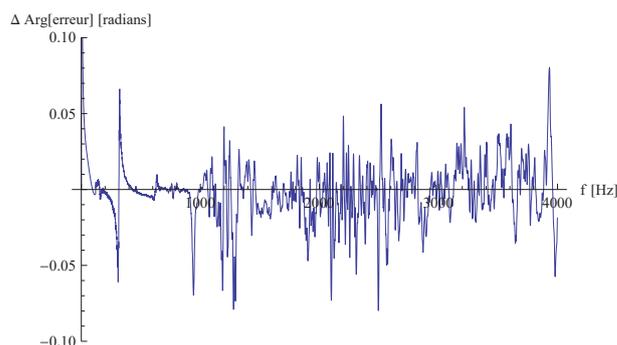


FIGURE 4 – Erreur sur l'argument de  $Z_{in}$ , entre la mesure rééchantillonnée (80 à 4000 Hz) et l'estimation modale

l'argument sont représentées sur les Fig. 3 et 4. On constate que dans toute la bande mesurée, l'erreur sur  $Z_{in}$  adimensionné est inférieure à 1 dB pour le module et à 0.01 radians pour l'argument. Cette estimation modale respecte la passivité sur toute la bande de fréquence simulée (non illustré).

## 6 Conclusion

La méthode proposée permet d'obtenir une estimation modale rapide, précise, robuste et fiable à partir d'une impédance d'entrée mesurée. Elle a été appliquée avec succès à des impédances mesurées pour les instruments suivants : clarinettes modernes et historiques, saxophone, trompette et cor. Les estimations modales, une fois implémentées dans un synthétiseur, permettent de prédire de manière très satisfaisante certaines caractéristiques des instruments (du moins pour la clarinette), dont la fréquence de jeu, la facilité d'émission et certaines caractéristiques de timbre. La reconstitution basse fréquence et les propriétés conférées à la bande ignorée de manière à garantir la passivité ne semblent pas impacter notablement ces caractéristiques de jeu.

## Remerciements

Cette étude a été réalisé dans le cadre du projet ANR Cagima. Nous sommes redevables à Jean

Kergomard, Christophe Vergez et Joël Bensoam pour leurs judicieuses remarques. Nous remercions la He-Arc ingénierie, à Neuchâtel, Suisse, pour les facilités accordées.

## Références

- [1] Philippe Guillemain, Jean Kergomard, and Thierry Voinier. Real-time synthesis of clarinet-like instruments using digital impedance models. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 118(1) :483–494, 2005.
- [2] Philippe Guillemain and Fabrice Silva. De l'utilisation de la décomposition modale pour la synthèse sonore temps réel : écueils et solutions. In *10ème Congrès Français d'Acoustique*, pages CD–ROM, 2010.
- [3] George H James III, Thomas G Carne, and James P Lauffer. The natural excitation technique (next) for modal parameter extraction from operating wind turbines. Technical report, Sandia National Labs., Albuquerque, NM (United States), 1993.
- [4] Prasenjit Mohanty and Daniel J Rixen. Operational modal analysis in the presence of harmonic excitation. *Journal of sound and vibration*, 270(1) :93–109, 2004.
- [5] P Mohanty and DJ Rixen. Identifying mode shapes and modal frequencies by operational modal analysis in the presence of harmonic excitation. *Experimental mechanics*, 45(3) :213–220, 2005.
- [6] B Chomette and JL Le Carrou. Operational modal analysis applied to the concert harp. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 56 :81–91, 2015.
- [7] Kunt Murat. Traitement numérique des signaux. *PPUR, EPFL*, 1984.
- [8] B Gazengel, J Gilbert, and N Amir. Time domain simulation of single-reed wind instruments.from the measured input impedance to the synthesis signal. where are the traps? *Acta Acustica*, 3 :445–472, 1995.