

CFA/VISHNO 2016

Homogénéisation périodique de structures composites à résonances internesP. Fossat^a, C. Boutin^a et M. Ichchou^b^aLGCB - UMR CNRS 5513 - CeLyA, Ecole Nationale des Travaux Publics de l'Etat,
Rue Maurice Audin, 69518 Vaulx-En-Velin Cedex, France, Metropolitan^bLTDS UMR 5513, 36 av Guy de Collongues, 69134 Ecully, France
pascal.fossat@entpe.fr

LE MANS

Le comportement dynamique d'une plaque raidie par des poutres régulièrement espacées est étudié pour identifier les situations de résonance interne et leurs effets. Le comportement d'une cellule unitaire constituée d'une poutre couplée à une plaque est étudié par homogénéisation suivant une analyse asymptotique multi-échelle. L'analyse dimensionnelle fournit les paramètres géométriques et mécaniques favorables à la résonance interne. Un modèle analytique en flexion cylindrique en situation de résonance interne est d'abord obtenu à partir des équations de l'élasticité linéaire appliquées à une cellule, puis étendu en flexion globale. La résolution du problème dans le domaine fréquentiel mène aux équations de dispersion et permet d'identifier sous forme analytique les bandes interdites associées à la structure.

1 Introduction

Cet article traite du comportement dynamique d'une plaque raidie périodique. En supposant la taille de la cellule constitutive petite devant la longueur d'onde, le comportement macroscopique est déterminé par la méthode d'homogénéisation asymptotique dans un milieu périodique continu [1, 2]. La partie 2 introduit l'analyse dimensionnelle d'une cellule dont les constituants peuvent présenter de forts contrastes géométriques et mécaniques. Cet aspect autorise des cinématiques enrichies [3, 4, 5] et en particulier la situation de résonance interne (coexistence de dynamiques globale et locale), pour laquelle une condition nécessaire est établie. La partie 3 présente la méthode d'homogénéisation asymptotique basée sur un paramètre d'échelle $\epsilon \ll 1$, le point clé étant la séparation d'échelles. Les développements sont effectués dans le cadre de petites déformations et d'un comportement linéaire élastique isotrope. D'abord, le passage 3D→1D est utilisé pour construire un modèle de poutre (système porteur) avec un effort au contact de la plaque inconnu. Dans un second temps, le modèle de plaque (système résonant) permet de déterminer l'effort à l'interface. La partie 4 détaille ensuite le couplage plaque/poutre en introduisant des contrastes compatibles avec la résonance interne. Enfin, la partie 5 donne le modèle global ainsi que les comportements vibratoires possibles. On montrera en particulier l'apparition d'une dynamique macroscopique pour laquelle le paramètre de masse effective introduit des bandes de fréquences interdites.

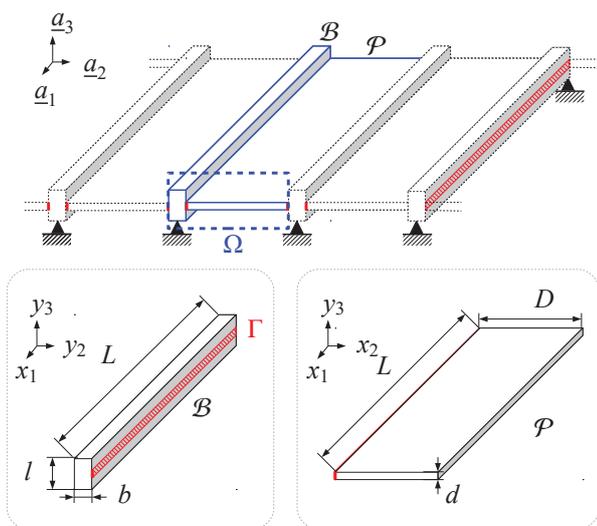


FIGURE 1 – Schéma de la plaque raidie et repères locaux associés à la poutre \mathcal{B} et à la plaque \mathcal{P}

En régime harmonique à la pulsation ω , les champs sont de la forme $\exp(i\omega t)$. Par linéarité, le terme $\exp(i\omega t)$ se simplifie dans les calculs.

2 Résonance interne

La Figure 1 illustre la structure étudiée. La poutre \mathcal{B} a pour dimensions L, l, b et pour propriétés mécaniques un module d'Young E_b , une masse volumique ρ_b , et un coefficient de Poisson ν_b . La plaque \mathcal{P} a pour dimensions L, d, D et pour propriétés mécaniques E_p, ρ_p, ν_p . L'analyse dimensionnelle fournit les paramètres géométriques et mécaniques favorables à la résonance interne :

- en considérant l'équation dynamique d'une poutre \mathcal{B} en flexion : $E_b I_b \partial_x^4 U = -\rho_b S_b \omega_b^2 U$, avec U le déplacement transverse, $I_b = b l^3 / 12$ le moment d'inertie de la poutre autour de l'axe x_2 , $S_b = b l$ la section de la poutre, et $\Lambda_b = \rho_b l b$ sa masse linéique, la résonance est obtenue pour des pulsations telles que :

$$O(\omega_b^2) = O\left(\frac{(E D)_b}{\Lambda_b L^4}\right)$$

- de même, en considérant l'équation dynamique unidimensionnelle d'une plaque \mathcal{P} en flexion : $D \partial_x^4 w = -\rho_p S_p \omega_p^2 w$, avec w le déplacement hors-plan, $D = E_p I_p = E_p b^3 / (12(1 - \nu^2))$, $I_p = d^3 / 12$ le moment d'inertie de la plaque autour de l'axe x_1 , $S_p = d$ la section de la plaque, et $\lambda_p = \rho_p d$ sa masse surfacique, la résonance est atteinte pour des pulsations telles que :

$$O(\omega_p^2) = O\left(\frac{(E I)_p}{\lambda_p D^4}\right)$$

La situation de résonance interne est atteinte lorsque les deux systèmes résonnent à la même fréquence, soit $\omega_b = \omega_p$ d'où :

$$\frac{E_p \rho_b d^2}{E_b \rho_p l^2} = \left(\frac{D}{L}\right)^4 = O(\epsilon^4) \quad (1)$$

3 Homogénéisation asymptotique

La méthode d'homogénéisation est présentée pour la construction du modèle de poutre et du modèle de plaque. L'accent est mis sur le modèle de poutre car la logique de résolution pour la plaque est tout à fait similaire.

3.1 Modèle de poutre

Le critère d'élanement de la poutre est satisfait pour $\epsilon = l/L \ll 1$. Introduisons la variable macroscopique x_1 suivant la direction axiale, et les deux variables microscopiques $y_\alpha = \epsilon^{-1} x_\alpha$, avec $\alpha = 2, 3$ suivant les directions dans le plan de la section. Le repère associé aux coordonnées (x_1, y_2, y_3) est $(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)$. Il est orienté suivant les axes principaux d'inertie

et son origine coïncide avec le centre de masse de la section. L'opérateur gradient $\underline{\nabla}$ appliqué à une fonction ψ s'exprime pour $\psi(x_1, y_\alpha)$:

$$\underline{\nabla}\psi = (\partial_{x_1}\underline{a}_1 + \epsilon^{-1}\partial_{y_\alpha}\underline{a}_\alpha)\psi(x_1, y_\alpha)$$

La poutre est considérée droite et homogène. Les phénomènes varient dans l'axe selon L et dans la section selon l . Les forces tangentielles sont négligeables sur le contour $\partial S - \Gamma$. La normale du contour de la poutre est $\underline{n} = n_\alpha\underline{a}_\alpha$, en conséquence :

$$\sigma_{1\alpha}n_\alpha = 0/\partial S \quad \text{où} \quad \sigma_{1\alpha} = \mu(\partial_{x_\alpha}\tilde{u}_1 + \partial_{x_1}\tilde{u}_\alpha)$$

Sachant que $\partial_{x_\alpha}\tilde{u}_1 = O(\tilde{u}_1/l)$ et $\partial_{x_1}\tilde{u}_\alpha = O(\tilde{u}_\alpha/L)$, l'annulation de la contrainte tangentielle $\sigma_{1\alpha}$ sur ∂S impose, pour les composantes de $\tilde{u} = \tilde{u}_1\underline{a}_1 + \tilde{u}_\alpha\underline{a}_\alpha$:

$$O\left(\frac{\tilde{u}_1}{l}\right) = O\left(\frac{\tilde{u}_\alpha}{L}\right) \quad \text{donc} \quad O(\tilde{u}_1) = \epsilon O(\tilde{u}_\alpha)$$

Cette relation traduit le fait que les déplacements axiaux sont d'un ordre inférieur (en terme de puissance de ϵ) par rapport aux déplacements transverses.

Par commodité, les déplacements sont donc normalisés en écrivant $\tilde{u}_1 = \epsilon u_1$ de sorte que $O(u_1) = O(u_\alpha)$, soit des composantes plan et hors plan du même ordre :

$$\tilde{u} = \epsilon u_1\underline{a}_1 + u_\alpha\underline{a}_\alpha \quad (2)$$

Les tenseurs de déformation \underline{e} et de contrainte $\underline{\sigma}$ de la forme $\underline{A} = A_{ij}(\underline{a}_i \otimes \underline{a}_j + \underline{a}_j \otimes \underline{a}_i)/2$ se décomposent en trois tenseurs réduits qui s'écrivent :

$$\underline{A} = A_N\underline{a}_1 \otimes \underline{a}_1 + (\underline{A}_T \otimes \underline{a}_1 + \underline{a}_1 \otimes \underline{A}_T) + \underline{A}_S$$

où $A_N = A_{11}$ est la contrainte ou déformation axiale (scalaire), $\underline{A}_T = A_{1\alpha}\underline{a}_\alpha$ sont les contraintes ou déformations hors plan de la section (vecteur), $\underline{A}_S = A_{\alpha\beta}(\underline{a}_\alpha \otimes \underline{a}_\beta + \underline{a}_\beta \otimes \underline{a}_\alpha)$ sont les contraintes ou déformations dans le plan de la section (tenseur).

La loi constitutive d'un matériau élastique linéaire isotrope reliant le tenseur des contraintes à celui des déformations est $\underline{\sigma} = \lambda \text{tr}(\underline{e}) + 2\mu\underline{e}$, et en posant $\underline{I}_S = \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$ le tenseur identité dans le plan de la section, les termes des tenseurs réduits de contrainte s'écrivent :

$$\sigma_N = \lambda(\text{tr}(\underline{e}_S) + e_N) + 2\mu e_N$$

$$\sigma_T = 2\mu e_T$$

$$\sigma_S = \lambda(\text{tr}(\underline{e}_S) + e_N)\underline{I}_S + 2\mu e_S$$

La poutre est traitée en dynamique en introduisant la force volumique b (dynamique transverse) ainsi que la force de contact f . L'équilibre local

$$\underline{\text{div}}_y(\underline{\sigma}) = b \quad \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \begin{cases} 0/(\partial S - \Gamma) \\ f/\Gamma \end{cases}$$

exprimé sous la forme à deux échelles dans le repère (x_1, y_2, y_3) se décompose selon un équilibre scalaire dans l'axe (suivant \underline{a}_1) :

$$\frac{\partial \sigma_N}{\partial x_1} + \epsilon^{-1} \underline{\text{div}}_y(\underline{\sigma}_T) = 0 \quad \underline{\sigma}_T \cdot \underline{n} = \begin{cases} 0/(\partial S - \Gamma) \\ f/\Gamma \end{cases}$$

et un équilibre vectoriel dans le plan de la section (suivant $(\underline{a}_2, \underline{a}_3)$) :

$$\frac{\partial \sigma_T}{\partial x_1} + \epsilon^{-1} \underline{\text{div}}_y(\underline{\sigma}_S) = -\rho\omega^2 u_\alpha^{(0)} \quad \underline{\sigma}_S \cdot \underline{n} = \begin{cases} 0/(\partial S - \Gamma) \\ f/\Gamma \end{cases}$$

Les termes b et f en accord avec la séparation d'échelles apparaissent comme des termes sources dans les bilans macroscopiques, si bien que les trois premiers problèmes exprimant les équilibres locaux sont identiques au cas statique.

Les équilibres globaux des forces et des moments agissant sur la section émergent à partir de deux formulations variationnelles portant sur $\underline{\sigma}_T$ d'une part et $\underline{\sigma}_S$ d'autre part, obtenues en intégrant sur S_b les équilibres scalaires et vectoriels respectivement. Il apparaît $N\underline{a}_1$ l'effort normal $N = \int_{S_b} \sigma_N ds = 0$ sur \underline{a}_1 et $T_\alpha\underline{a}_\alpha$ l'effort tranchant $\underline{T} = \int_{S_b} \underline{\sigma}_T ds = \underline{0}$ sur $(\underline{a}_2, \underline{a}_3)$. Sont aussi établies trois équations d'équilibre pour les moments : deux équations avec $\underline{M} = M_\alpha\underline{a}_\alpha = \int_{S_b} y_\alpha \sigma_N ds$ les moments de flexion autour de y_2 et y_3 , et $\partial_{x_1} M_1 = \partial_{x_1} \int_{S_b} y \wedge \underline{\sigma}_T ds$, le moment de torsion autour de x_1 . Les équilibres globaux d'effort normal, d'effort tranchant, de moment de torsion, et de moment fléchissant s'écrivent dans la direction \underline{a}_1 : $\frac{dN}{dx_1} = 0$; $\frac{dM_1}{dx_1} = 0$, et dans le plan $(\underline{a}_2, \underline{a}_3)$: $\frac{d\underline{T}}{dx_1} = -\rho\omega^2 u_\alpha^{(0)}$; $\frac{dM_\alpha}{dx_1} - \epsilon^{-1} \underline{T} = f$. Il faut maintenant déterminer les lois de comportement pour accéder à la description globale de la poutre.

L'objectif est de préciser le comportement asymptotique de la poutre lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. Les puissances du paramètre ϵ servent de base de décomposition des champs du problème (déplacements, contraintes, déformations). Ces développements asymptotiques en puissance de ϵ doivent respecter la cinématique de poutre Eq. (2). De ce fait, les équations d'équilibre et les conditions limites contiennent uniquement de puissances paires ou impaires de ϵ . Il suffit donc développer les u_i en puissances paires de ϵ :

$$\tilde{u} = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^{2i} (\epsilon u_1^{2i+1} \underline{a}_1 + u_\alpha^{2i} \underline{a}_\alpha)$$

soit

$$\tilde{u}_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^{2i+1} u_1^{2i+1} \quad \tilde{u}_\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^{2i} u_\alpha^{2i} \quad (3)$$

En conséquence, les tenseurs réduits de déformations et de contraintes dans l'axe et dans le plan de la section (respectivement tangentielles) sont développés suivant les puissances impaires (respectivement paires) de ϵ :

$$\begin{aligned} e_N &= \epsilon^1 e_N^{(1)} + \epsilon^3 e_N^{(3)} + \dots & \sigma_N &= \epsilon^{-1} \sigma_N^{(-1)} + \epsilon \sigma_N^{(1)} + \dots \\ e_T &= \epsilon^0 e_T^{(0)} + \epsilon^2 e_T^{(2)} + \dots & \sigma_T &= \epsilon^0 \sigma_T^{(0)} + \epsilon^2 \sigma_T^{(2)} + \dots \\ e_S &= \epsilon^{-1} e_S^{(-1)} + \epsilon^1 e_S^{(1)} + \dots & \sigma_S &= \epsilon^{-1} \sigma_S^{(-1)} + \epsilon^1 \sigma_S^{(1)} + \dots \end{aligned}$$

Ces développements Eq. (3) sont introduits dans l'équation d'équilibre dans l'axe et dans l'équation d'équilibre dans le plan de la section. Ce problème $P^\epsilon, \epsilon \rightarrow 0$ se décompose en i problèmes de la forme $\sum_i \epsilon^i P^i = 0, \forall \epsilon \ll 1$, ce qui implique de résoudre successivement des problèmes de la forme $P^i = 0$. La résolution n'est pas détaillée ici. En appelant U le déplacement transverse de la poutre suivant y_3 , les équations finales pour l'élément poutre \mathcal{B} sont :

$$\begin{cases} \partial_{x_1} T_3 + \int_{\Gamma} \sigma_{S23}^{(3)} = -\rho_b \omega^2 \int_S U(x_1) \\ \partial_{x_1} M_3 + \int_{\Gamma} y_3 \sigma_{T12}^{(2)} - T_3 = 0 \\ M_3 = -E_b I_b \frac{d^2 U(x_1)}{dx_1^2} \end{cases} \quad (4)$$

Par commodité, le modèle de poutre obtenu Eq. (4) est condensé dans un opérateur poutre $\mathcal{O}_b(U)$ donné Eq. (5).

$$\mathcal{O}_b(U) = -\rho_b \omega^2 U \quad (5)$$

Ce modèle laisse pour inconnues les contraintes d'interaction exercées par la plaque sur la poutre et montre ainsi que les effets de la plaque se rapportent sur les contraintes $\sigma_{S23}^{(3)}$, qui intervient sous forme directe, et $\sigma_{T12}^{(2)}$, qui intervient par son moment.

L'état de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}^B$ dans la poutre montre que les tenseurs réduits sont d'ordres différents. En considérant le déplacement normalisé Eq. (2), il vient que les tenseurs réduits σ_N et σ_S sont impairs tandis que les développements de σ_T sont pairs. L'Eq. (6) indique seulement les termes qui participent à l'interaction : (le signe // symbolise la composante symétrique, les (.) indiquent les composantes non nulles.)

$$\underline{\underline{\sigma}}^B \equiv \begin{bmatrix} O(\epsilon) & O(\epsilon^2) \\ O(\epsilon^2) & O(\epsilon^3) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \cdot & \epsilon^2 \sigma_{T12}^{(2)} \cdot \\ // & \cdot \\ \cdot & \epsilon^3 \sigma_{S32}^{(3)} \cdot \end{bmatrix} \quad (6)$$

3.2 Modèle de plaque

Le critère d'élanement de la plaque est satisfait pour $\epsilon = d/D \ll 1$. Dans ce cas, les deux variables macroscopiques $x_\alpha = \epsilon^{-1} y_\alpha$ avec $\alpha = 1, 2$ suivant les directions dans le plan, et la variable microscopique $y_3 = \epsilon^{-1} x_3$ suivant la direction hors-plan décrivent le système. Le repère associé aux coordonnées (x_1, x_2, y_3) est $(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)$. L'opérateur gradient $\underline{\nabla}$ appliqué à une fonction ψ s'exprime pour $\psi(x_\alpha, y_3)$:

$$\underline{\nabla} \psi = (\partial_{x_\alpha} \underline{a}_\alpha + \epsilon^{-1} \partial_{y_3} \underline{a}_3) \psi(x_\alpha, y_3)$$

La géométrie du problème de plaque fait apparaître que x_1 est une variable macroscopique commune de la plaque et de la poutre et que y_3 est une variable microscopique commune de la plaque et de la poutre. La variable suivant \underline{a}_2 est microscopique dans la poutre, mais macroscopique dans la plaque. Le problème est ici bidimensionnel alors qu'il était unidimensionnel pour la poutre. Le principe de construction du problème et la logique de résolution sont les mêmes, aussi les détails de calculs ne sont pas présentés.

En appelant w le déplacement hors-plan de la plaque suivant y_3 , les équations finales pour l'élément plaque \mathcal{P} sont :

$$\begin{cases} \text{div}_\alpha(\underline{T}) = -\rho_p \omega^2 w \\ \text{div}_\alpha(\underline{M}) + \underline{T} = 0 \\ \underline{M} = E_p I_p ((1 - \nu_p) \underline{a}_\alpha (\underline{\nabla}_\alpha w) + \nu_p \Delta_\alpha w \underline{I}_p) \end{cases} \quad (7)$$

Avec $E'_p = E_p / (1 - \nu_p^2)$, le module de rigidité corrigé correspondant à un état de déformations planes ($e_{11} = 0$). Par commodité, le modèle de plaque obtenu Eq. (7) est condensé dans un opérateur plaque $\mathcal{O}_p(w)$ donné Eq. (8).

$$\mathcal{O}_p(w) = -\rho_p \omega^2 w \quad (8)$$

L'état de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}^P$ dans la plaque permet d'identifier les composantes à équilibrer avec celles de la poutre.

$$\underline{\underline{\sigma}}^P \equiv \begin{bmatrix} O(\epsilon) & O(\epsilon^2) \\ O(\epsilon^2) & O(\epsilon^3) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \cdot & \epsilon \sigma_{p12}^{(1)} \cdot \\ // & \cdot \\ \cdot & \epsilon^2 \sigma_{i32}^{(2)} \cdot \end{bmatrix} \quad (9)$$

Il faut maintenant préciser le raccordement de contraintes d'une part, et de déplacements d'autre part, sur la jonction Γ .

4 Couplage avec contrastes

L'objectif est d'abord d'identifier les contrastes compatibles avec la résonance interne qui permettront ensuite de préciser les conditions limites que respecte la plaque.

4.1 Contrastes de paramètres

Il s'agit de connecter la poutre et la plaque en examinant leurs tenseurs de contraintes Eq. (6) et Eq. (9) respectivement en ajustant les ϵ en tenant compte de la condition de couplage Eq. (1). La construction du modèle de poutre a permis d'identifier les contraintes pilotantes à associer aux contraintes dans la plaque. Or, cet équilibrage terme à terme ne peut se faire que si les contraintes sont du même ordre. Les champs de contraintes avec leurs ordres sont explicités ci-après. (les zones blanches dans les tenseurs indiquent les composantes nulles.)

Etat de contraintes dans la poutre :

$$\underline{\underline{\sigma}}^B = E_b \left(\epsilon \sigma_N^{(1)} + \epsilon^2 \sigma_T^{(2)} + \epsilon^3 \sigma_S^{(3)} \right)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^B = E_b \left(\epsilon \sigma_N^{(1)} + \epsilon^2 \left[\begin{array}{c|c} \sigma_{T12}^{(2)} & \\ \cdot & // \end{array} \right] + \epsilon^3 \left[\begin{array}{c|c} \cdot & // \\ \cdot & \sigma_{S32}^{(3)} \cdot \end{array} \right] \right)$$

Etat de contraintes dans la plaque :

$$\underline{\underline{\sigma}}^P = E_p \left(\epsilon \sigma_p^{(1)} + \epsilon^2 \sigma_i^{(2)} + \epsilon^3 \sigma_n^{(3)} \right)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^P = E_p \left(\epsilon \left[\begin{array}{c|c} \cdot & \sigma_{p12}^{(1)} \\ // & \cdot \end{array} \right] + \epsilon^2 \left[\begin{array}{c|c} \cdot & \\ \cdot & \sigma_{i32}^{(2)} \end{array} \right] + \epsilon^3 \sigma_n^{(3)} \right)$$

La contrainte $\sigma_{T12}^{(2)}$ équilibre une contrainte plus grande sur une épaisseur ϵ plus petite, et de même pour la composante $\sigma_{S23}^{(3)}$:

$$\int_{\Gamma} \sigma_{T12}^{(2)} \Leftrightarrow \int_{-d/2}^{d/2} \sigma_{p12}^{(1)} \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma} \sigma_{S23}^{(3)} \Leftrightarrow \int_{-d/2}^{d/2} \sigma_{i32}^{(2)}$$

Sans prêter attention aux ordres de E_b et E_p , d'après l'état de contrainte dans le système, il est impossible d'équilibrer

les contraintes $\sigma_{T12}^{(2)}$ avec $\sigma_{p12}^{(1)}$ d'une part, et $\sigma_{S32}^{(3)}$ avec $\sigma_{i32}^{(2)}$ d'autre part car elles ne sont pas du même ordre. Cet écart d'ordre provient de la différence d'orientation géométrique entre la plaque et la poutre. Le calage asymptotique doit nécessairement équilibrer des contraintes du même ordre.

L'Eq. (1) donne une condition sur les contrastes de propriétés mécaniques. En posant $E_p = \epsilon E_b$, toutes les contraintes dans la plaque diminuent d'un ordre et l'équilibrage terme à terme peut se faire. D'une part, le fait de poser $E_p = \epsilon E_b$ est cohérent avec l'intuition selon laquelle la plaque devrait être plus souple que la poutre car, lors de la résolution asymptotique du problème de poutre, les efforts de plaque ont été ajoutés en supposant que la contrainte dans la plaque était suffisamment faible, mais cela venait implicitement du fait que E_p était supposé faible au regard de E_b (plaque souple). D'autre part, poser $E_p = \epsilon E_b$ implique que $\rho_b = \epsilon \rho_p$ pour respecter l'Eq. (1). La plaque est donc plus souple et plus pesante que la poutre, cet aspect est lui aussi cohérent avec l'idée de départ ; la plaque devrait être plus pesante pour accentuer les effets d'inertie.

La prise en compte des ordres dans les problèmes de plaque et de poutre conduit à exprimer que la poutre rigide impose son déplacement à la plaque.

4.2 Résonance de la plaque

L'écart des contraintes est tel que la plaque est soumise au déplacement de la poutre. Pour assurer la continuité des déplacements, le modèle de plaque Eq. (7) est complété par une condition de Dirichlet traduisant que la plaque est soumise, sur sa frontière, au déplacement imposé par la poutre, soit : (décomposition de Fourier)

$$w = U(x_1) = \sum_k U^k \exp(ikx_1) \quad / \Gamma$$

Ce déplacement imposé sur le bord génère une certaine géométrie modale sur la plaque. L'utilisation des conditions limites indique que la déformée ϕ_k de la plaque soumise au nombre d'onde k dans la poutre doit satisfaire :

$$\phi_k'''' + 2(1 + \nu_p)k^2 \phi_k'' + \phi_k(k^4 - k_f^4) = 0 \quad (10)$$

avec $k_f^4 = (\rho_p \omega^2)/(E_p' I_p)$ le nombre d'onde naturel de flexion interne à la plaque non contrainte. L'introduction d'une forme de solution ϕ_k de la forme $\exp(i\delta x)$ dans l'Eq. (10) permet de décomposer en nombre d'onde dans la plaque et d'obtenir l'équation caractéristique dont la somme S et le produit P des racines dépendent du paramètre physique k et d'un paramètre de champ d'onde k_f :

$$\delta_k^4 - S \delta_k^2 + P = 0 \quad \begin{cases} \delta_{k1}^2 \delta_{k2}^2 = k^4 - k_f^4 \\ \delta_{k1}^2 + \delta_{k2}^2 = -2(1 + \nu_p)k^2 \end{cases}$$

Un champ de solution $\phi(x_2) = C_1 \sin(\delta_1 x_2) + C_2 \cos(\delta_1 x_2) + C_3 \sinh(\delta_2 x_2) + C_4 \cosh(\delta_2 x_2)$ écrit avec des conditions limites de déplacements imposés et de rotations nulles aux extrémités mène à un système matriciel $A \times [C_1, C_2, C_3, C_4]' = [U, 0, U, 0]'$, et la condition $\det(A) = 0$ donne l'équation en fréquence associée :

$$2\delta_1 \delta_2 (1 - \cosh(\delta_2 D) \cos(\delta_1 D)) + \sinh(\delta_2 D) \sin(\delta_1 D) (\delta_2^2 - \delta_1^2) = 0 \quad (11)$$

soit avec nos paramètres :

$$\cos(\delta_1 D) = \frac{1}{\cosh(\delta_2 D)} + \tanh(\delta_2 D) \sin(\delta_1 D) \frac{(1 + \nu_p)k^2}{\sqrt{(k^4 - k_f^4)}} \quad (12)$$

Les équations (10) et (12) donnent accès à plusieurs comportements. Le cas de la flexion cylindrique se produit lorsque $k = 0$, il n'y a alors pas de distorsion interne à la plaque et les modes se développent uniquement suivant x_2 . Dans ce cas $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ et la relation fréquentielle Eq. (12) se réduit à celle d'une poutre encastree-encastree, soit $\cosh(\delta D) \cos(\delta D) = 1$. Dans le cas de la flexion globale, le terme central de l'Eq. (10) subsiste et il faut déterminer les couples (δ_1, δ_2) solution de l'Eq. (12). Le système s'apparente à un problème d'optimisation. Une situation intermédiaire est néanmoins atteinte en définissant une situation de flexion cylindrique perturbée accessible par une formulation incluant un correcteur. En posant $k = \tau k_f$ avec $\tau \ll 1$ et en faisant le passage à la limite $\delta_1 = k_f(1 + x)$ avec $x \ll 1$ de l'Eq. (12), une relation entre x et τ émerge

$$x = \frac{\sin(k_f D) \tanh(k_f D)}{\sin(k_f D) - \frac{\tanh(k_f D)}{\cosh(k_f D)}} \frac{2(1 - \nu_p)}{k_f D} \tau^2, \quad x = \beta \tau^2$$

avec β un paramètre adimensionnel. Il est donc possible de déterminer la séquence k_f^N avec ω_N pour une situation faiblement perturbée ($\tau \ll 1$) :

$$\delta^N = k_f^N (1 + \beta \tau^2) \quad \text{avec} \quad k = \tau k_f^N$$

Le terme $\beta \tau^2$ apparait comme un correcteur d'ordre 2 par rapport à τ . Le champ d'application de l'approche perturbée est déterminée par ce paramètre β et requiert que $k < k_f / \sqrt{\beta}$.

Comme la correction est d'ordre deux, il est possible, dans un premier temps, de retenir le cas de la flexion cylindrique, qui donne une bonne approximation de $\tau \ll 1$.

En situation de flexion cylindrique, le déplacement dans la plaque est :

$$w(x_1, x_2) = \int_k U^k \exp(ikx_1) \phi_k(x_2)$$

avec $\phi_k(x_2)$ solution de Eq. (10). Dans le cas de la flexion cylindrique, comme la fluctuation suivant x_1 est beaucoup plus lente que la fluctuation suivant x_2 , le problème est indépendant du x_1 et $U = cte$ dans l'expression :

$$\int_{x_2} w(x_1, x_2) = \int_k U^k \exp(ikx_1) \int_{x_2} \phi_k(x_2)$$

4.3 Modèle couplé

Ces deux étapes de couplage rendent possible la détermination des deux contraintes $\sigma_{T12}^{(2)}$ et $\sigma_{S23}^{(3)}$:

- en égalant la composante $\sigma_{T12}^{(2)}$ de la poutre avec la composante $\sigma_{p12}^{(1)}$ de la plaque, soit

$$\sigma_{T12}^{(2)} = -E_p' y_3 (1 - \nu_p) \delta_{x_1 x_2}^2 w$$

avec w le déplacement de la plaque tel que $w = \phi_k(x_2) \exp(ikx_1)$, il vient $\sigma_{T12}^{(2)} = -E_p' y_3 (1 - \nu_p) \partial_{x_2} \phi_k(x_2) ik w_k \exp(ikx_1)$ Comme la condition limite plaque/poutre sur l'interface Γ est un encastrement,

alors le déplacement est celui imposé par la poutre et la rotation est bloquée $w = \partial_{x_2} w = 0/\Gamma$. La dérivée première intervenant dans l'expression de $\sigma_{T12}^{(2)}$ est nulle, soit $\sigma_{T12}^{(2)} = 0$.

- d'après la périodicité des conditions limites et l'orientation des normales (sortantes, par convention), l'intégrale de la contrainte sur la jonction Γ s'exprime d'abord comme :

$$\int_{\Gamma} \sigma_{S23}^{(3)} \cdot \underline{n} = \left(\int_{\Gamma} \sigma_{S23}^{(3)}(b) - \int_{\Gamma} \sigma_{S23}^{(3)}(b+D) \right) \underline{a}_2$$

avec $T(b+D)\underline{a}_2 + T(b)(-\underline{a}_2) = \int_b^{b+D} divT$
puis, comme le modèle de plaque en flexion donne

$$\int_b^{b+D} divT = -\rho_p \omega^2 U(x_1) \int_b^{b+D} \phi_k(x_2)$$

alors :

$$\int_{\Gamma} \sigma_{S23}^{(3)} = -\rho_p \omega^2 \int_k U^k \exp(ikx_1) \int_b^{b+D} \phi_k(x_2)$$

La détermination de ces contraintes permet de conclure qu'il n'y a pas d'effet local de moment apporté par la plaque, mais un effet d'effort tranchant uniquement.

5 Modèle final

Les opérateurs Eq. (5) et Eq. (8) permettent d'écrire le modèle final sous forme symbolique

$$\begin{cases} \mathcal{O}_b(U) = -\omega^2 \left(\rho_b U + \rho_p \int w \right) \\ \mathcal{O}_p(w) = -\omega^2 \rho_p w \quad \text{avec} \quad w = U/\Gamma \end{cases} \quad (13)$$

et sous forme complète Eq. (14). Il s'agit d'un modèle de poutre dont la masse est adjointe à la masse effective de la plaque, et contenue dans un terme de masse effective $\rho^*(\omega)$ dépendant de la fréquence et incluant la contribution de la plaque :

$$\begin{cases} \partial_{x_1} T_3 = -\omega^2 \rho^*(\omega) U(x_1) \\ \partial_{x_1} M_3 - T_3 = 0 \\ M_3 = -E_b I_b \frac{d^2 U(x_1)}{dx_1^2} \end{cases} \quad (14)$$

avec une excitation le long de x_1 de la forme $U(x_1) = \exp(ikx_1)$, le nombre d'onde dans la poutre est $k^4 = -\omega^2 \rho^*(\omega)/E_b I_b$ avec :

$$\rho^*(\omega) = \rho_b + \rho_p^*(\omega) \quad \rho_p^*(\omega) = \rho_p \int_{x_2} \phi_k(x_2)$$

La modèle en flexion cylindrique s'obtient en considérant les déformées $\phi_{k=0}$ de la plaque en flexion cylindrique soit :

$$\rho^*(\omega) = \rho_b + \rho_p \int_{x_2} \phi_0(x_2)$$

et le terme de masse apparente adimensionnelle de la plaque $m^*(\omega)$ normalisé par sa masse réelle M_s s'écrit finalement :

$$\rho_p^*(\omega) = \frac{m^*(\omega)}{M_s} = \frac{1}{\lambda_p DL} \int_{x_2} \phi_0(x_2)$$

On utilise une pulsation adimensionnelle $\tilde{\omega} = \omega/\omega_1$ correspondant à la pulsation des vibrations de la structure normalisée par la première pulsation propre de flexion avec :

$$\omega_{fn} = (2n+1)^2 \left(\frac{\pi}{2D} \right)^2 \sqrt{\frac{E_p I_p}{\rho_p}} \quad \tilde{\omega} = \omega \left(\frac{2D}{3\pi} \right)^2 \sqrt{\frac{\rho_p}{E_p I_p}}$$

L'expression explicite de la masse apparente de la plaque est :

$$m^*(\tilde{\omega}) = \frac{2U \sinh(\delta D) [\cos(\delta D) - 1] + \sin(\delta D) [\cosh(\delta D) - 1]}{\delta \cos(\delta D) \cosh(\delta D) - 1}$$

avec $\delta D = \frac{3\pi}{2} \sqrt{\tilde{\omega}}$. L'annulation du dénominateur permet d'identifier les résonances aux abscisses :

$$\frac{3^2}{3^2} = 1, \frac{5^2}{3^2} = 2.77, \frac{7^2}{3^2} = 5.44, \frac{9^2}{3^2} = 9, \frac{11^2}{3^2} = 13.44$$

Les valeurs des paramètres géométriques et mécaniques retenues pour les figuret qui suivent sont : $\rho_b = 785.0$; $E_b = 9e9 + i\eta$; $L = 1$; $l = 0.1$; $b = 0.1$; $v_b = 0.33$; $\rho_p = 7850$; $E_p = 9e8 + i\eta$; $D = 0.1$; $d = 0.01$; $\nu_p = 0.33$.

La Figure 2 montre la masse apparente de la plaque et nombre d'onde k en fonction de la pulsation normalisée $\tilde{\omega}$.

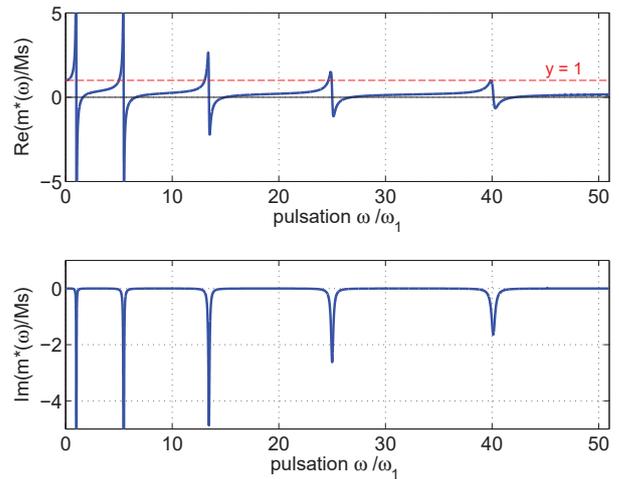


FIGURE 2 – Parties réelle et imaginaire de la masse apparente normalisée de la plaque avec amortissement matériel $\eta = 1\%$

Ce terme de masse vaut 1 lorsque $\tilde{\omega} \rightarrow 0$ ce qui est cohérent puisqu'en statique, la masse apparente correspond à la masse réelle. Cette fonction est globalement comprise entre 0 et 1 et la masse modale diminue lorsque $\tilde{\omega}$ augmente. Cela signifie que la structure paraît plus légère qu'elle ne l'est en réalité. Les fluctuations de cette fonction se situent uniquement au voisinage des modes impairs puisque l'intégrale des modes pairs sur la largeur de la plaque est nulle. La Figure 3 montre le nombre d'onde dans la poutre et les bandes interdites associées aux fluctuations du paramètre de masse effective.

Les Figures 4 et 5 montrent que l'augmentation de l'amortissement dans la structure s'accompagne d'une diminution notable des amplitudes et d'un élargissement des bandes interdites. L'amortissement est donc un paramètre déterminant pour des applications pratiques.

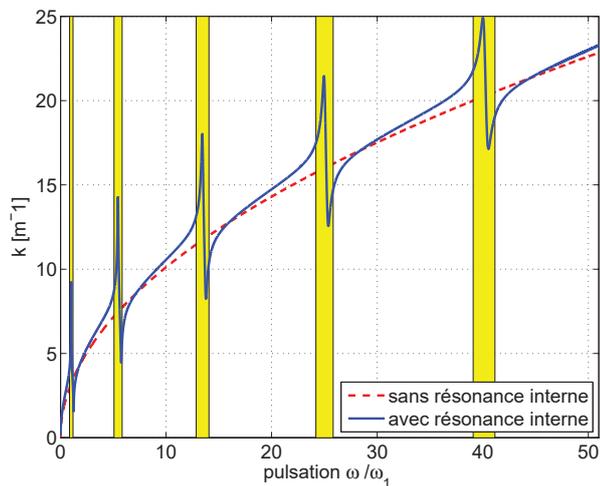


FIGURE 3 – Nombre d’onde dans la poutre avec et sans résonance interne avec amortissement matériel $\eta = 1\%$

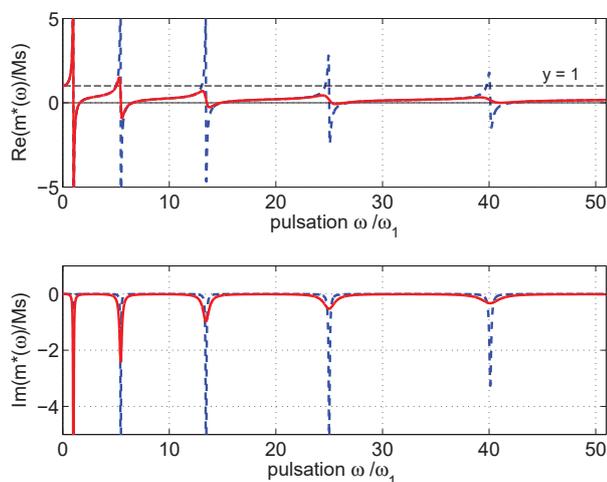


FIGURE 4 – Parties réelle et imaginaire de la masse apparente de la plaque normalisée, en flexion cylindrique avec amortissement matériel $\eta = 0.1\%$ (- -), et $\eta = 5\%$ (—)

6 Conclusion

La théorie de l’homogénéisation asymptotique appliquée à une structure composite élastique a permis de prévoir des comportements macroscopiques dans le cadre fixé de la résonance interne. L’approche asymptotique fournit un cadre théorique pour analyser le comportement d’une plaque raidie dont la cellule possède des contrastes géométriques et mécaniques. La formulation analytique définit explicitement le domaine de validité du modèle. L’exploitation du modèle analytique d’une cellule en flexion cylindrique en situation de résonance interne permet d’identifier de manière analytique les bandes interdites associées au système. L’extension de la méthode à une plaque bi-raidie est en cours. La validation numérique par une méthode propagative telle que la *Wave Finite Element Method* étudiée dans [6] sera un premier pas vers des aspects expérimentaux.

L’approche peut être utilisée pour le calcul de comportement réel de panneaux raidis industriels, mais aussi pour dimensionner des structures ayant un comportement spécifique à certaines fréquences.

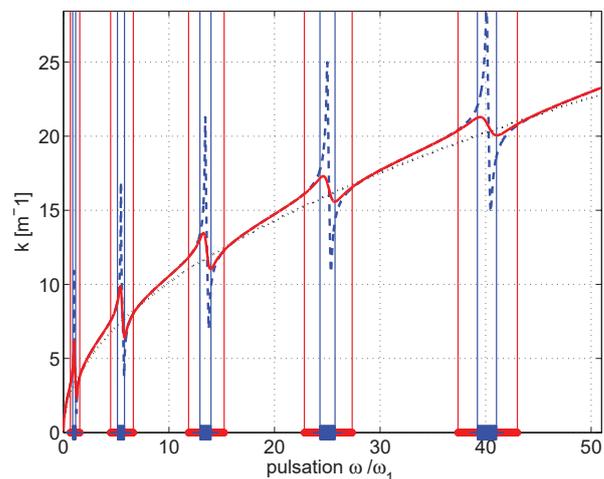


FIGURE 5 – Nombre d’onde dans la poutre sans résonance interne (\dots), et avec résonance interne avec amortissement matériel $\eta = 0.1\%$ (- -), et $\eta = 5\%$ (—)

Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein du LabEx CeLyA (Centre Lyonnais d’Acoustique, ANR-10-LABX-0060) de l’Université de Lyon, dans le cadre du programme ”Investissements d’Avenir” (ANR-11-IDEX-0007) de l’Etat Français, géré par l’Agence Nationale de la Recherche (ANR).

Références

- [1] E. Sanchez-Palencia, *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory (Lecture Notes in Physics Vol. 127)*, Springer-Verlag, Berlin, (1980).
- [2] A. Bensoussam, J.-L. Lions, G. Papanicolaou, *Asymptotic analysis for periodic structures, volume 5 of Studies in Mathematics and its Applications*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, (1978).
- [3] J.-L. Auriault, C. Boutin, Long wavelength inner-resonance cut-off frequencies in elastic composite materials. *International Journal of Solids and Structures*, **49(23–24)**, 3269 – 3281 (2012).
- [4] C. Chesnais, *Dynamique des milieux réticulés non contreventés : application au bâtiment*, Thèse, Ecole Nationale des Travaux Publics de l’Etat, (2010).
- [5] C. Chesnais, C. Boutin, S. Hans, Effects of the local resonance on the wave propagation in periodic frame structures : Generalized Newtonian mechanics. *J. Acoust. Soc. Am.* **132**, 2873 (2012).
- [6] C. Zhou, *Wave and modal approach for multi-scale analysis of periodic structures*, Thèse, Ecole Centrale de Lyon, (2014).