

CFA/VISHNO 2016

Modélisation analytique et contrôle numérique du comportement d'une micro-poutre vibrante chargée par une couche de fluide à l'arrièreA. Novak^a, P. Honzik^b, M. Bruneau^a et N. Joly^a^aLAUM, Université du Maine, Avenue Olivier Messiaen, 72085 Le Mans, France^bCTU in Prague, Faculty of Transportation Sciences, Department of Security Technologies and Engineering, Konviktská 20, 110 00 Praha 1, République tchèque
ant.novak@gmail.com

LE MANS

L'usage de systèmes dynamiques miniatures (MEMS), actifs (récepteurs ou émetteurs) ou passifs, pour de nouvelles applications (audition, méta-matériaux, biens de consommations, ...) ou pour la métrologie sous des conditions non-standard, apparaît à l'heure actuelle dans divers domaines de l'acoustique. Des caractérisations plus précises que celles disponibles aujourd'hui sont rendues nécessaires. Dans ce contexte, le travail présenté ici porte sur une approche analytique et numérique pour décrire le comportement d'un système comportant une micro-poutre de forme rectangulaire (poutre élastique plane) chargée à l'arrière par une petite cavité ou une fine couche de fluide, entourée de très fines fentes (qui évitent la conception complexe de suspensions, assurent l'équilibre des pressions statiques et contribuent à l'amortissement), et mise en vibration par un champ acoustique incident. La modélisation analytique prend en compte le fort couplage entre la poutre et le champ de pression acoustique à l'arrière, les processus de diffusion visqueux et thermiques dans les couches limites dans les fentes et la cavité arrière, le comportement modal du système, la non uniformité du champ acoustique à l'arrière de la poutre qui est modélisée en faisant usage du formalisme intégral, et finalement le couplage des champs acoustiques de part et d'autre de la poutre au travers des fentes. Une solution générale est proposée pour le mouvement de la poutre, conduisant à exprimer une sensibilité, une impédance d'entrée ou une fonction de transfert acoustique. Un calcul numérique (FEM) est mené en parallèle, qui permet de valider les résultats analytiques obtenus.

1 Introduction

Depuis plus d'une décennie, un intérêt croissant est porté sur la miniaturisation (MEMS) de systèmes dynamiques actifs (récepteurs ou émetteurs) ou passifs, pour de nouvelles applications (audition, méta-matériaux, biens de consommations, ...) ou pour la métrologie sous des conditions non-standard, apparaît à l'heure actuelle dans divers domaines de l'acoustique, par exemple [1]. Cette miniaturisation et ces nouvelles applications rendent nécessaire de prévoir des études analytiques, numériques et expérimentales plus approfondies que celles qui sont en usage à l'heure actuelle. Dans ce contexte, les études analytiques portent plus particulièrement sur des micro-structures (membranes ou plaques minces), circulaires ou cartésiennes, pour lesquelles certains travaux ont pour objet de conduire à la réalisation de maquettes ou prototypes [2, 3].

L'étude présentée ici porte sur la modélisation analytique et numérique du comportement d'une micro-poutre élastique plane 1-D rectangulaire encastrée à une extrémité de longueur très supérieure à sa largeur et dont l'épaisseur est inférieure voire très inférieure à la largeur [4, 5], lorsqu'elle est chargée par une cavité arrière ou une fine couche de fluide (ou les deux couplées l'une à l'autre), entourée de très fines fentes et mise en vibration par un champ acoustique incident (supposé uniforme sur la surface de la micro-poutre). Les fentes évitent les suspensions souples, assurent l'équilibre des pressions statiques et participent à l'amortissement du système.

La modélisation analytique tient compte notamment des processus de diffusion en parois liés à la viscosité et la conduction thermique du fluide, de la non-uniformité du champ à l'arrière de la micro-poutre, des différents couplages qui prennent place dans le système. La description analytique évite de reposer sur les couplages modaux classiques, Dirichlet (micro-poutre) / Neumann (lame de fluide arrière), en retenant une formulation intégrale et une fonction de Green adaptée pour la description du comportement du fluide [6]. L'approche numérique (FEM) [7, 8] apporte confirmation de la validité des résultats obtenus, en termes de champ de déplacement de la micro-poutre et d'impédance d'entrée, de champ acoustique arrière ou encore de fonction de transfert entre l'avant et l'arrière du système (quantités d'intérêt selon l'application envisagée).

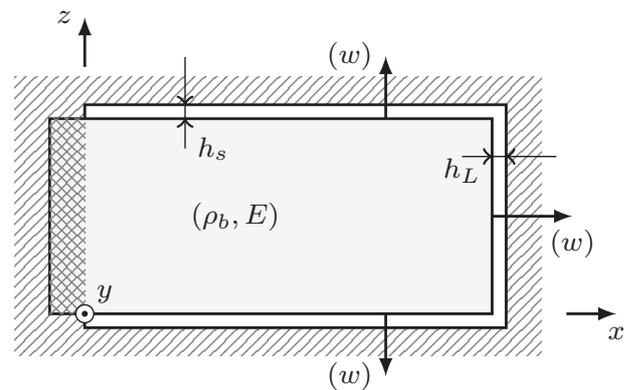


FIGURE 1 – Vue du dessus de la poutre plane rectangulaire et des fentes entre cette poutre et les parois.

2 Le mouvement de la micro-poutre

Le champ de déplacement de la micro-poutre $\eta(x)$ pour une excitation harmonique ($e^{i\omega t}$) est solution du système d'équations suivant :

$$\left[EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \mu_L \omega^2 \right] \eta(x) = b \left[p_{gap}(x) - p_{inc} \right] - 2 \frac{dF_{s,y}}{dx} - F_{L,y} \delta(x-L), \quad 0 < x < L, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0, \quad x = L, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad \text{and} \quad \eta = 0, \quad x = 0, \quad (3)$$

où μ_L est la masse linéique de la poutre, E son module d'Young et I le moment quadratique de section. Les quatre forces extérieures qui apparaissent dans le membre de droite de l'équation (1) sont respectivement celles dues aux pressions à l'arrière de la poutre et incidente, et les forces de viscosité appliquées par les fentes. Du fait que la force en frontière $x = L$ de la poutre est prise en compte dans le second membre de l'équation (1), la condition en frontière (2) est homogène. La condition en frontière (3) est la condition d'encastrement en $x = 0$.

La solution est exprimée sous forme d'un développement sur les modes propres $\psi_m(x)$ de la micro-poutre encastrée

$$\eta(x) = \sum_m \xi_m \psi_m(x), \quad (4)$$

où les fonctions propres sont données par une superposition de fonctions trigonométriques circulaires et hyperboliques dépendant des valeurs propres K_m solutions de l'équation transcendantale $\cos(K_m L) \cosh(K_m L) = -1$.

Du fait que trois des quatre facteurs qui apparaissent dans le membre de droite de l'équation (1) dépendent eux-même de ce champ vibratoire $\eta(x)$, in fine la solution du problème considéré (couplage du mouvement de la micro-poutre avec le champ acoustique à l'arrière) passe par l'inversion d'une équation matricielle de la forme

$$([\mathbb{I}] - [\mathbb{Q}])(\xi) = p_{inc}[\mathbb{P}], \quad (5)$$

où les matrices $[\mathbb{P}]$ et $[\mathbb{Q}]$ sont exprimées à partir des résultats présentés dans les deux paragraphes qui suivent et où la matrice colonne $[\xi]$ est l'inconnue (les amplitudes modales ξ_m de l'équation (4)), $[\mathbb{I}]$ étant la matrice unité.

3 La pression acoustique dans la cavité arrière

Le champ de pression acoustique à l'arrière de la micro-poutre est solution d'un système d'équations (équation de propagation et conditions en frontières) qui peuvent être écrites de la façon suivante :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \chi_0^2\right) p_{gap}(x) = -\frac{i\omega\rho_0}{F_{v,g}} q, \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} p_{gap}(0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} p_{gap}(L) = 0. \quad (7)$$

où χ_0 , qui prend la forme classique

$$\chi_0^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} \frac{\gamma - (\gamma - 1)F_{h,g}}{F_{v,g}}, \quad (8)$$

inclus les effets de couches limites thermiques et visqueuses $F_{h,g}$ et $F_{v,g}$, et où le débit volumique q est la somme de tous les débits entrant dans une tranche de fluide de dimension h_g, b, dx , Fig. 2), y compris ceux de frontière qui font intervenir une mesure de Dirac et qui n'apparaissent donc plus dans les conditions aux frontières (7). Transférant le débit de la poutre, proportionnel à la solution $p_{gap}(x)$, du second membre vers le premier membre de l'équation (6), l'équation de propagation prend alors une forme équivalente à l'équation (6) :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \chi^2\right) p_{gap}(x) = -U(x). \quad (9)$$

En retenant la fonction de Green sous forme de fonction analytique qui satisfait aux conditions en frontière (7) [9], le champ de pression cherché peut être exprimé par la convolution spatiale 1-D

$$p_{gap}(x) = \int_0^L G(x, x_0) U(x_0) dx_0. \quad (10)$$

A noter que le modèle retenue ici peut au besoin être adapté très simplement pour inclure un petit élément à l'arrière de la cavité décrit par son débit volumique (proportionnel à

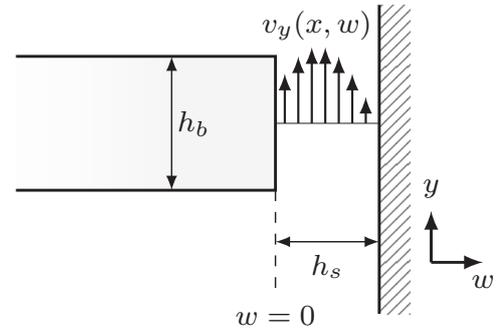


FIGURE 3 – Vue d'une fente périphérique entre la micro-poutre et la paroi.

la pression acoustique entrante), ce qui présente un intérêt pratique pour certaines applications.

La résolution du couple d'équation (4) et (10) qui relie entre eux le champ vibratoire de la micro-poutre et le champ de pression à l'arrière de la cavité, donne la solution recherchée par inversion de l'équation matricielle (5).

4 Retour sur le comportement des fentes

Les fentes latérales jouent un double rôle : elles exercent sur la poutre en vibration des forces de viscosité et sont responsables d'un débit entrant dans la cavité arrière. Les expressions de l'un et de l'autre impliquent le profil de vitesse du fluide qui répond au problème suivant (équation diffusion et conditions aux frontières suivant la coordonnée transversale y , Fig. 3) :

$$\frac{\partial^2 v_y(x, w)}{\partial w^2} + k_v^2 v_y(x, w) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (11)$$

$$\begin{cases} v_y(x, w) = 0, & w = h_s \\ v_y(x, w) = i\omega\eta(x), & w = 0, \end{cases} \quad (12)$$

$$k_v = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega \frac{\rho_0}{\mu}}. \quad (13)$$

A partir de la solution de ce problème, qui implique les fonctions trigonométriques usuelles, les débits sont obtenus directement et les forces qui en résultent sont exprimés en faisant usage des équations suivantes

$$dF_{s,y}(x) = \mu h_b dx \left(\frac{\partial v_y(x, w)}{\partial w} \right)_{w=0}, \quad (14)$$

$$F_{L,y} = \mu h_b b \left(\frac{\partial v_y(L, w)}{\partial w} \right)_{w=0}. \quad (15)$$

Ces forces dépendent de deux facteurs : le premier, proportionnel à l'écart entre pression incidente et pression arrière, est à l'origine du mouvement dans la fente tandis que le second, qui dépend de la vitesse de la micro-poutre, intervient dans la force agissant sur les bords de la poutre.

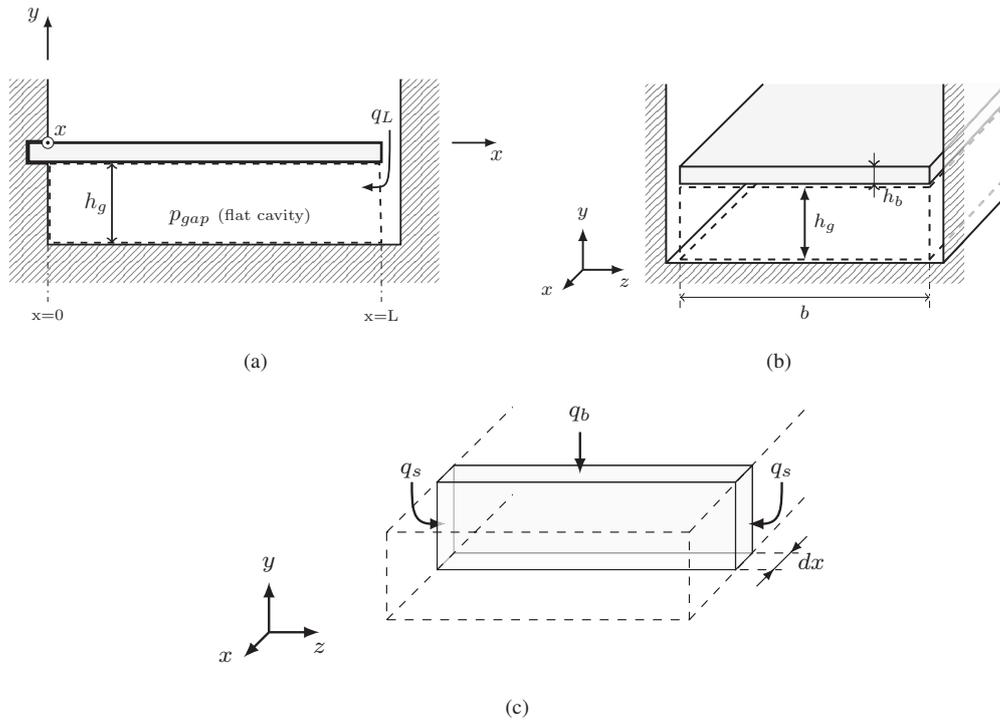


FIGURE 2 – Vue de la cavité arrière (a), la même vue en coupe (b), et vue d'un volume élémentaire dans cette cavité (longueur dx) (c).

5 Simulation numérique (FEM), résultats analytiques et numériques, discussions

La simulation numérique retenue, à trois dimensions, tient compte des phénomènes visqueux et thermiques dans les couches limites. Elle repose sur deux équations couplées pour les variables vitesse particulaire et écart instantané de température (qui permettent de remonter à la pression acoustique) [7, 8]. Les résultats de simulation sont obtenus pour une poutre de masse volumique 2329 kg/m^3 , de dimensions $L = 3 \text{ mm}$, $b = 1 \text{ mm}$, $h_b = 50 \text{ }\mu\text{m}$, pour une épaisseur de fluide $h_g = 150 \text{ }\mu\text{m}$, pour des fentes de dimensions $h_s = 30 \text{ }\mu\text{m}$ et $h_L = 30 \text{ }\mu\text{m}$, et en présence d'éléments acoustiques à la périphérie de la cavité arrière dont les impédances d'entrée sont à caractère élastique.

La Fig. 4 représente le module et la phase de la sensibilité, rapport de la valeur moyenne du champ de déplacement de la micro-poutre sur la pression incidente, en fonction de la fréquence dans l'intervalle (10^3 Hz , 10^5 Hz) pour neuf modes de poutre pris en considération (résultats analytiques en trait continu, résultats numériques en points séparés). Le bon accord est clair jusqu'à 50 kHz . Au-delà, parce que la longueur d'onde devient du même ordre de grandeur que la largeur de la poutre (modèle analytique) est en raison des limites du maillage (modèle numérique), il n'est plus possible d'accéder à un tel accord.

6 Conclusion

La précision avec laquelle les résultats analytiques et numériques peuvent être obtenus au terme de la modélisation retenue ici pour ce type de composants vibroacoustiques miniatures est cohérente avec les exigences des applications

auxquelles ils peuvent être dédiés, applications qui contraignent à une miniaturisation extrême et à une large bande de fréquence (au-delà de 50 kHz) et qui nécessitent une caractérisation très précise (théorique et expérimentale) dans des circonstances exigées par la métrologie fine. Le modèle analytique permet une interprétation des phénomènes propre à appréhender le rôle joué par les différents paramètres qui interviennent, quelque soit l'intervalle de fréquences utile, et par suite propre à orienter la conception pour un usage défini.

Remerciements

Ce projet bénéficie d'un financement de l'Université du Maine "Le Mans Acoustique" (LMAC). Les auteurs remercient le Dr. François Fohr du Centre de Transfert de Technologie du Mans (CTTM) pour nos discussions fructueuses.

Références

- [1] C. Guianvarc'h, R. M. Gavioso, G. Benedetto, L. Pitre, and M. Bruneau, "Characterization of condenser microphones under different environmental conditions for accurate speed of sound measurements with acoustic resonators," *Review of Scientific Instruments*, vol. 80, no. 7, p. 074901, 2009.
- [2] J. Czarny, T. Verdot, E. Redon, A. Walther, H. Lhermet, B. Desloges, K. Ege, P. Robert, and J.-L. Guyader, "Novel architecture of mems microphone that employs deflecting micro beams and piezoresistive nano gauges," in *12ème Congrès Français d'Acoustique, CFA2014*, 2014, pp. 189–195.

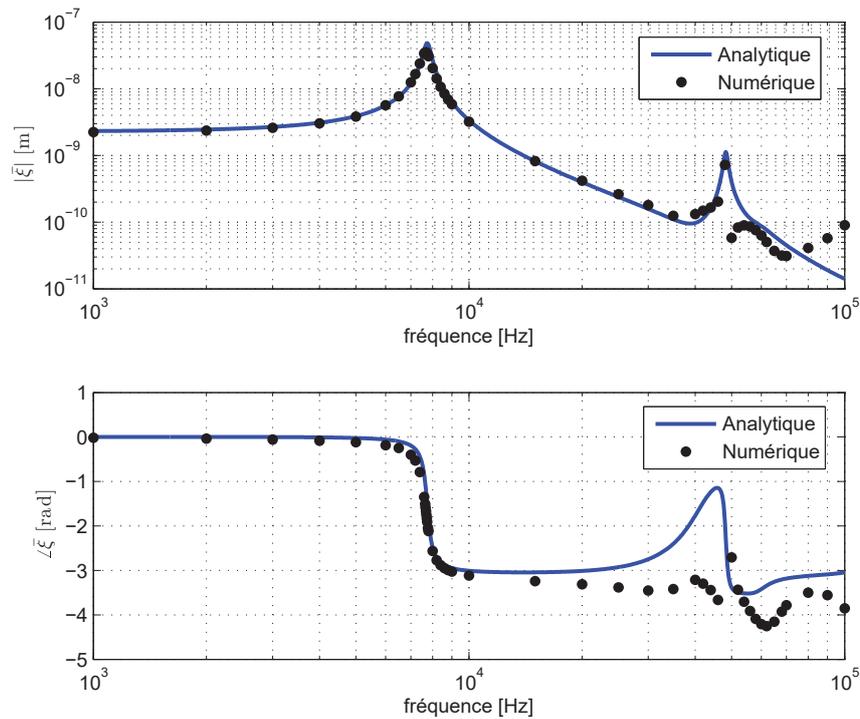


FIGURE 4 – Sensibilité vibratoire de la micro-poutre (module et phase) en fonction de la fréquence : résultats analytiques (ligne continue), résultats numériques (points séparés).

- [3] C. Guianvarc'h, T. Verdot, J. Czarny, E. Redon, K. Ege, J.-L. Guyader, A. Walther, and P. Robert, "New planar nano-gauge detection microphone : Analytical and numerical acoustic modeling," in *Proceedings of Meetings on Acoustics*, vol. 19, no. 1. Acoustical Society of America, 2013, p. 030040.
- [4] A. W. Leissa, *Vibration of plates*. AIP Press, 1993.
- [5] M. Kozie, "Analytical solutions of excited vibrations of a beam with application of distribution," *Acta Physica Polonica*, vol. 123, p. 10291033, 2013.
- [6] P. Honzík and M. Bruneau, "Acoustic fields in thin fluid layers between vibrating walls and rigid boundaries : integral method," *Acta Acustica united with Acustica*, vol. 101, no. 4, pp. 859–862, 2015.
- [7] N. Joly, "Finite element modeling of thermoviscous acoustics on adapted anisotropic meshes : Implementation of the particle velocity and temperature variation formulation," *Acta acustica united with acustica*, vol. 96, no. 1, pp. 102–114, 2010.
- [8] W. Kampinga, Y. Wijnant, and A. de Boer, "Performance of several viscothermal acoustic finite elements," *Acta acustica united with Acustica*, vol. 96, no. 1, pp. 115–124, 2010.
- [9] M. Bruneau, *Manuel d'acoustique fondamentale*. Hermes, 1998.