

## CFA/VISHNO 2016

**Approximation par ondes planes et son utilisation pour la  
méthode des éléments finis**E. Perrey-Debain<sup>a</sup>, M. Yang<sup>a</sup>, B. Nennig<sup>b</sup> et J.-D. Chazot<sup>a</sup><sup>a</sup>Sorbonne universités, Université de Technologie de Compiègne, Laboratoire Roberval,  
UMR CNRS 7337, CS 60319, 60203 Compiègne, France<sup>b</sup>SUPMECA, 3, rue Fernand Hainaut, 93407 Saint-Ouen, France  
emmanuel.perrey-debain@utc.fr

LE MANS

Il est connu que les méthodes de discrétisation conventionnelles telles que la méthode des éléments finis ou celle des éléments de frontière se trouvent très vite limitées pour traiter des problèmes à moyenne ou haute fréquence dû au coût informatique exorbitant que celles-ci occasionnent. Les années 90 ont vu l'émergence de nombreuses méthodes alternatives pour palier ces difficultés (méthodes itératives rapides, décomposition de domaine, parallélisation,...). Parmi ces développements, l'application de la PUFEM (Partition of Unity Finite Element Method) pour la résolution de l'équation de Helmholtz a montré des améliorations considérables puisque qu'elle permet d'obtenir des solutions numériques de très bonne qualité tout en maintenant des faibles niveaux de discrétisation. Dans cette méthode, l'espace fonctionnel est construit en multipliant les fonctions de forme classique pour les éléments finis par des fonctions oscillantes, solutions particulières du problème homogène. Ainsi, les ondes planes progressives sont des fonctions de choix pour l'équation de Helmholtz. Des études de convergence montrent que le nombre d'ondes planes augmente linéairement avec la fréquence pour des problèmes plans et quadratiquement en trois dimensions. On présente dans ce travail le développement de la méthode pour la simulation de champs de pression acoustique 3D en espace clos.

## 1 Introduction

Il existe de nombreux champs d'applications pour lesquels la résolution de problèmes ondulatoires est inévitable, on peut citer notamment les problèmes de réduction du bruit dans le domaine du transport terrestre et aérien, la vibration des structures, la diffraction des ondes électromagnétiques (signature radar), la diffraction des ondes dans les solides (exploration pétrolière, contrôle non destructif), la mécanique quantique, etc...

Il est bien connu que les méthodes de discrétisation conventionnelles telles que la méthode des éléments finis (FEM) ou celle des éléments de frontière (BEM) se trouvent très vite limitées pour traiter des problèmes à moyenne ou haute fréquence dû au coût informatique exorbitant que ceux-ci occasionnent. En effet, une description assez précise du problème requiert d'utiliser environ 10 degrés de liberté par longueur d'onde. Les années 90 ont vu l'émergence de nombreuses méthodes alternatives pour palier à ces difficultés. On peut citer les méthodes de décomposition de domaine pour le calcul parallèle, les méthodes itératives rapides (Fast Multipole Method, Adaptive Cross Approximations,...), les méthodes spectrales, les approximants de Padé pour l'analyse multifréquence, les méthodes de réduction modale. On trouvera des références utiles dans [1, 2, 3, 4]. Pour des fréquences suffisamment élevées, les méthodes énergétiques (Statistical Energy Analysis, Dynamic Energy Analysis...) ou les méthodes asymptotiques [5] (lancer de rayons, théorie géométrique de la diffraction, optique ou acoustique physique) sont privilégiées. Ces méthodes, bien qu'approximatives permettent néanmoins des prévisions réalistes pour un coût numérique raisonnable.

Il existe une autre classe de méthodes, appelées parfois méthodes de Trefftz, qui diffèrent des techniques de discrétisation classique par l'emploi de nouvelles bases de fonctions oscillantes, solutions particulières du problème homogène. L'exemple le plus fréquemment rencontré étant l'utilisation des ondes planes progressives pour l'équation de Helmholtz. Parmi ces développements, on peut citer la Partition of Unity Finite Element Method (PUFEM) [6, 7] la formulation ultra-faible (UWF) [8, 9] qui peut être vue comme faisant partie des méthodes de Galerkin discontinues [10], la Discontinuous Enrichment Method (DEM) [11], la Wave Based Method (WBM) [12] et la Variational Theory of Complex Rays (VTCR) [13]. Ces méthodes diffèrent essentiellement par le traitement des conditions de transmission entre les sous-domaines, les conditions aux

limites du domaine et le type de fonctions de forme utilisé.

## 2 Convergence de la base d'ondes planes pour l'équation de Helmholtz

La décomposition en ondes planes est très utilisée pour la synthèse des champs sonores (auralisation) [14] ainsi que dans les méthodes de résolution rapide par équations intégrales [15]. Cette décomposition provient de la discrétisation d'un champ d'onde régulier qu'on peut écrire sous la forme intégrale

$$\phi(x) = \int_{S^d} A(\xi) e^{ik\xi \cdot x} d\xi, \quad (1)$$

où les directions d'onde  $\xi$  parcourent la sphère unité  $S^d$  ( $d$  est la dimension du domaine) et  $k$  le nombre d'onde. L'exemple le plus connu d'une telle représentation est certainement l'intégrale de Bessel (eq. 9.1.21 dans [16]). La discrétisation de (1) aboutit à une somme finie de  $Q$  termes :

$$\phi(x) \approx \sum_{q=1}^Q A_q e^{ik\xi_q \cdot x}, \quad (2)$$

où les directions  $\xi_q$  sont des points d'intégrations sur la sphère et les  $A_q$  les coefficients d'onde associés. L'erreur d'approximation (ou de discrétisation) dépend essentiellement (i) du comportement du champ d'onde que l'on cherche à synthétiser (propagatif, évanescence ou quasi-singulier), (ii) du domaine (nécessairement borné) d'approximation et (iii) du choix des directions d'ondes.

Dans le cas d'un champ bidimensionnel, on montre qu'on peut approcher une onde plane arbitraire dans un disque de rayon  $a$  par  $Q$  ondes planes régulièrement réparties (voir Fig. 1) avec une erreur d'approximation en  $QJ_{Q/2}(ka)$  [17]. A haute fréquence ( $ka \gg 1$ ), le nombre d'onde plane doit être choisi de telle sorte que

$$Q = 2ka(1 + \delta), \quad (3)$$

où la fonction  $\delta$  dépend de  $ka$  et du niveau d'erreur souhaité. En pratique,  $\delta$  est une faible quantité ( $\delta \sim 10^{-1}$ ) pour garantir une approximation de bonne qualité. Dans la limite des hautes fréquences  $ka \rightarrow \infty$ , l'erreur d'approximation est nulle lorsque  $Q_\infty = eka$ . Notons que le critère (3) correspond également au nombre de termes qu'il faut conserver dans la série de Jacobi-Anger pour garantir une bonne approximation d'une onde plane dans le disque.

Pour approcher une onde circulaire normalisée  $\phi(x) = J_n(k|x|)/J_n(ka)e^{in\theta}$ , il faut que

$$Q > ka + n, \quad (4)$$

pour garantir une bonne approximation. Lorsque  $n > ka$ , l'onde est évanescence radialement et devient super-oscillante selon  $\theta$  et le nombre de degrés de liberté augmente nécessairement. Si  $n$  est trop grand, les coefficients  $A_q$  divergent et le système algébrique associé au problème devient mal conditionné. Ceci montre que si les coefficients sont calculés avec la précision machine standard (double précision), il devient très difficile de simuler des ondes fortement évanescences.

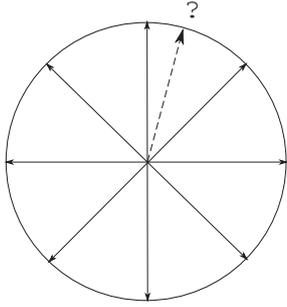


FIGURE 1 – Approximation d'une onde plane arbitraire dans  $\mathbb{R}^2$  par un système d'ondes planes régulièrement réparties.

L'analyse de convergence dans l'espace ( $d = 3$ ) est plus délicate car la discretisation d'une sphère n'est pas triviale et le choix des points d'intégration n'est pas unique [18]. On peut cependant reprendre certains principes évoqués dans le cas d'un champ bidimensionnel : le nombre de directions suffisant pour reconstruire une onde plane arbitraire dans un domaine sphérique de rayon  $a$  est directement lié au nombre de termes qu'il faut conserver dans la série de Gegenbauer

$$e^{ik\xi \cdot x} \approx 4\pi \sum_{\ell=0}^{L-1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} i^\ell j_\ell(k|x|) Y_\ell^{m*}(\xi) Y_\ell^m(\hat{x}) \quad (5)$$

(ici  $\hat{x} = x/|x|$ ) pour garantir une bonne approximation dans le domaine. Pour les hautes fréquences  $ka \gg 1$ , il est montré qu'il faut prendre [14] :

$$L = ka(1 + c(ka)^{-2/3}) \quad (6)$$

où  $c$  dépend essentiellement du niveau de précision souhaité. Ainsi le nombre de termes, donné par  $N = L^2$ , augmente quadratiquement avec la fréquence et on peut anticiper qu'une onde plane arbitraire (ou une somme finie d'ondes planes) peut être reconstruite avec

$$Q \approx (ka)^2(1 + \delta), \quad (\text{avec } \delta \sim (ka)^{-2/3}) \quad (7)$$

ondes planes régulièrement réparties sur la sphère unité. L'estimation (7) est optimale pour des champs propagatifs mais n'est pas adaptée si l'on veut simuler des champs fortement évanescents ou quasi-singulier (un monopole placé très près du domaine par exemple). Dans tous les cas, on peut néanmoins faire l'hypothèse que  $Q \sim (ka)^2$ . Pour garantir une distribution homogène des directions de propagation, on peut s'inspirer d'une méthode d'équilibrage électrostatique de  $Q$  charges identiques placées dans une cavité sphérique [19]. La Figure 3 illustre la répartition de  $Q = 30$  ondes planes suivant ce principe.

En résumé, le comportement asymptotique est  $Q \sim (ka)^{(d-1)}$  et le gain espéré par rapport aux éléments finis classiques dont la complexité varie au moins en  $(ka)^d$  s'avère significatif à haute fréquence.

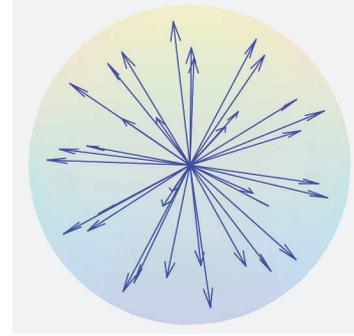


FIGURE 2 – Directions d'onde planes régulièrement réparties sur la sphère unité.

### 3 Les éléments finis enrichis en 3D

Le développement des éléments finis enrichis pour la propagation des ondes acoustiques et poroélastiques dans des domaines bidimensionnels a fait l'objet de publications récentes par les auteurs de cet article [20, 21]. Il s'agit ici d'étendre la méthode pour simuler des champs acoustiques dans des cavités 3D. On veut résoudre l'équation de Helmholtz

$$\Delta\phi + k^2\phi = 0 \quad (8)$$

dans un domaine bornée  $\Omega$  de frontière  $\Gamma = \partial\Omega$ . La forme variationnelle associée s'écrit

$$\delta\Pi = 0, \quad (9)$$

où  $\Pi$  est la fonctionnelle

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [(\nabla\phi)^2 - k^2\phi^2] d\Omega - \int_{\Gamma} \phi\Lambda d\Gamma \quad (10)$$

et  $\Lambda = \partial_n\phi$ . L'idée de la PUFEM consiste à enrichir la base polynomiale classique par des ondes planes propagative :

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^4 N_j \sum_{q=1}^{Q_j} A_{jq} \exp(ik\xi_{jq} \cdot x) \quad (11)$$

Ici, les fonctions  $N_j$  sont les fonctions de forme linéaires associées à un tétraèdre à 4 noeuds et les  $A_{jq}$  peuvent être interprétés comme les amplitudes des ondes planes. Notons qu'à chaque noeud  $j$ , on associe une base d'onde plane de directions  $\xi_{jq}$  (ces bases ne sont pas forcément identiques). La première étape consiste à faire un partitionnement du domaine  $\Omega = \bigcup_e \Omega_e$  ( $e$  désigne le numéro de l'élément) et, après substitution dans la forme variationnelle, les coefficients de la matrice PUFEM se calculent via

$$\begin{aligned} I &= -k^2(1 + \xi' \cdot \xi'') \int_{\Omega_e} N_j N_j \Phi d\Omega \\ &+ ik \left[ \xi' \cdot \int_{\Omega_e} \nabla N_j N_j' \Phi d\Omega + \xi'' \cdot \int_{\Omega_e} \nabla N_j' N_j \Phi d\Omega \right] \\ &+ \int_{\Omega_e} \nabla N_j' \cdot \nabla N_j \Phi d\Omega, \end{aligned} \quad (12)$$

où  $\Phi = \exp(ikd \cdot x)$  avec

$$\kappa = k|\xi' + \xi''|, \quad d = \frac{\xi' + \xi''}{|\xi' + \xi''|}.$$

Ici, les symboles ' and '' permettent d'identifier la fonction originale de la fonction test. Notons que les intégrales volumiques se simplifient dans le cas (étudié ici) où la transformation géométrique  $x = x(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$  est *linéaire* (voir Fig. 3). Par application du théorème de Green, cela entraîne que

$$\int_{\Omega_e} F \phi = - \int_{\partial\Omega_e} (\epsilon F d + \epsilon^2 \nabla F + \epsilon^3 \Delta F d) \cdot n \phi \quad (13)$$

où  $\epsilon = i/\kappa$  et  $F$  désigne une fonction quadratique par rapport aux variables locales  $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ . On peut itérer la procédure et réduire les intégrales de surfaces en intégrales simples, ces dernières étant calculées analytiquement.

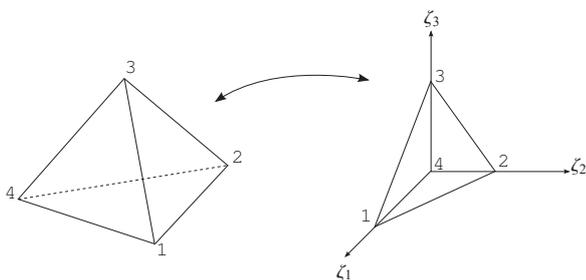


FIGURE 3 – Élément de type tétraèdre linéaire.

## 4 Tests de convergence

Le but de cette section est d'évaluer les performances numériques de la technique proposée en termes de précision et de complexité. Ici, l'idée est de tester la convergence de la méthode sans modifier le maillage de la PUFEM. En d'autres termes, nous effectuons un '*Q*-refinement' par opposition à un '*h*-refinement'. Grâce à de nombreux tests numériques, il a été observé que les propriétés de convergence dépendent principalement de 2 paramètres : la taille de l'élément  $h_j$  défini comme la longueur d'arête la plus grande attaché au noeud  $j$  et la fréquence adimensionnée  $kh_j$  (quantité que l'on peut interpréter comme le nombre de longueurs d'onde dans l'élément). Dans la suite, on peut supposer que le nombre d'ondes planes associé à chaque noeud doit varier quadratiquement de telle sorte que

$$Q_j = C(kh_j)^2. \quad (14)$$

Le coefficient  $C$  doit être vu comme une fonction de  $kh_j$  et doit être ajusté suivant la configuration étudiée et le niveau de précision souhaité. On se propose de décrire le comportement de  $C$  en choisissant un problème de propagation d'onde simple pour lequel une solution exacte est facilement disponible. Ainsi, nous considérons une onde plane incidente arbitraire se propageant dans un tétraèdre isocèle (longueur d'arêtes égales). La direction de l'onde plane incidente est toujours choisie de telle sorte qu'elle soit la plus éloignée possible des directions de la base d'ondes planes PUFEM. La Figure 4 montre le comportement de  $C$  en fonction de la fréquence. Les courbes concernant

le tétraèdre régulier sont obtenues pour deux niveaux de précision 0.1% et 1%. Un autre scénario similaire a été testé avec pour un cube régulier comprenant 24 éléments. Ici seule la courbe associée à 1% de précision d'erreur est affichée. Pour ce cas précis, il se trouve que le niveau de discrétisation est plus élevé pour atteindre une précision de 1% par rapport au cas d'un seul élément tétraédrique. Dans tous les cas, la précision du calcul est contrôlée par l'erreur quadratique sur la surface du domaine :

$$\varepsilon_2 = \frac{\|\phi^{ex} - \phi\|_{L_2(\Gamma)}}{\|\phi^{ex}\|_{L_2(\Gamma)}}. \quad (15)$$

Cette série de tests montrent que le coefficient  $C$  se situe généralement dans l'intervalle [0.1-0.7] tant que la fréquence est suffisamment élevée par rapport à la longueur de l'élément. On remarque que  $C$  se comporte asymptotiquement comme  $C \approx C_\infty + (kh_j)^{-\alpha}$ , ce qui est en accord avec l'analyse précédente.

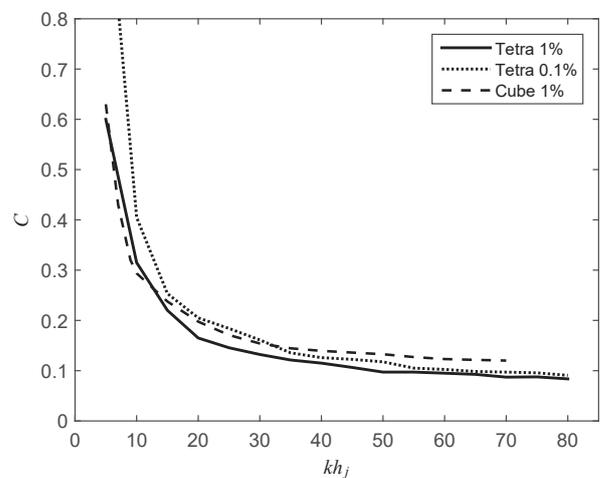


FIGURE 4 – Niveau de discrétisation requis en fonction de la fréquence adimensionnée et de la précision souhaitée.

Une deuxième série de tests concerne le cas d'un monopole placé en  $x_0$  dans une cavité cubique rigide, le champ vérifie

$$\Delta\phi + k^2\phi = \delta(x - x_0). \quad (16)$$

Ce problème admet une solution exacte sous la forme modale :

$$\phi^{ex} = \sum_m \frac{\psi_m(x)\psi_m(x_0)}{k^2 - k_m^2} \quad (17)$$

où  $(\psi_m, k_m)$  sont les modes de cavité (normalisés). Afin de s'affranchir de la singularité, on fait la décomposition suivante :  $\phi = \phi^I + \phi^S$  où  $\phi^I = \exp(ik|x - x_0|)/(4\pi|x - x_0|)$  est le champ incident et  $\phi^S$  est le champ diffracté (donc régulier) calculé par la PUFEM. La cavité cubique contient 24 éléments tétraédriques de taille  $h$  et on note  $Q$  le nombre d'ondes planes associé à chaque noeud du maillage. La convergence de la solution en fonction de  $Q$  est reportée sur la Figure 5. La stabilisation du niveau d'erreur provient de la troncature de la série modale (17). Dans cette étude, la fréquence adimensionnée est prise suffisamment haute (ici,  $kh = 30$ ) de telle sorte que le niveau de discrétisation soit optimal (voir Fig. 4). Dans cet exemple, on peut tirer profit du fait que la solution recherchée est purement réelle. La base d'onde planes étant nécessairement complexe, on peut

estimer le niveau d'erreur à partir de la partie imaginaire de la solution calculée. On propose ainsi, une estimation de l'erreur :

$$\tilde{\varepsilon}_2 = \frac{\|\Im(\phi)\|_{L_2(\Gamma)}}{\|\Re(\phi)\|_{L_2(\Gamma)}}, \quad (18)$$

ne nécessitant pas la solution analytique! (cette procédure n'est pas possible avec la FEM standard à matrices réelles). Les résultats de la Figure 5 montrent clairement la corrélation entre les deux définitions (15) et (18). La troisième courbe provient d'un calcul direct du champ total, présentant une singularité au voisinage de  $x_0$ , indiquant que la base d'onde plane ne peut pas simuler correctement des sources singulières (ou quasi-singulières).

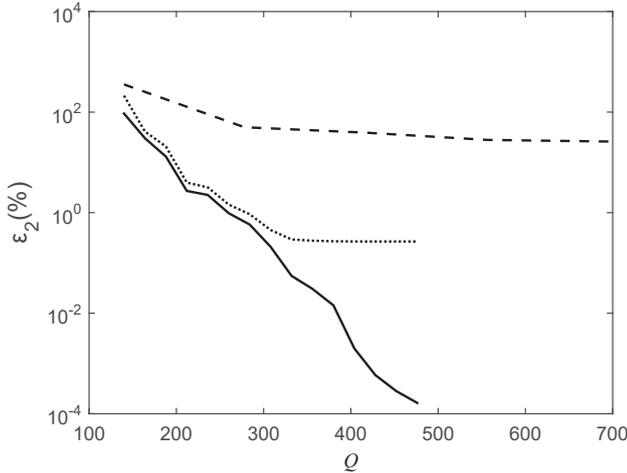


FIGURE 5 – Monopole placé près du centre d'une cavité cubique rigide ( $kh=30$ ). Critère d'erreur calculé à partir de (15) (trait pointillé), et (18) (trait plein).

## 5 Applications

On cherche ici à simuler le champ sonore dans une chambre réverbérante<sup>1</sup> dont la partie supérieure ('roof' comme indiqué sur la Figure 6) est traitée acoustiquement. On suppose que le traitement est localement réactif et on pose que

$$\partial_n \phi = ikY\phi, \quad (19)$$

où  $Y = 1/Z$  est l'admittance et  $Z$ , l'impédance de paroi rapportée à l'impédance caractéristique du milieu. La source est un monopole placé au milieu de la cavité au point  $x_0 = (0, 0, 0.5)$ .

Dans un premier temps, on considère le problème artificiel (non absorbant) où l'impédance est purement imaginaire :  $Z = 2i$ . La Figure 7 montre le champ acoustique obtenu dans la cavité à la fréquence  $f = 1620$  Hz. Ceci correspond à  $kh = 60$  où  $h \approx 2$ m est la longueur d'arête la plus grande. Le nombre d'ondes planes attachées aux noeuds est choisi de telle sorte que  $Q_j = 2C(kh_j)^2$  (c'est à dire deux fois plus que le cas 'optimal' (14)). Le nombre de total de degrés de liberté étant d'environ 12400, ce qui, rapporté à la longueur d'onde, correspond à 2.4 degrés de liberté par longueur d'onde. Dans le cas présent,  $\partial_n \phi$  et par conséquent le champ total sont à valeur réelles. On peut ainsi

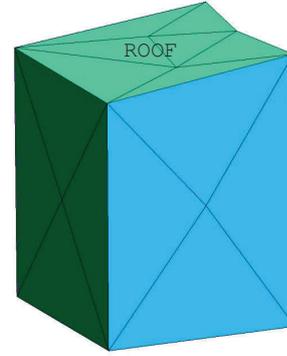


FIGURE 6 – Chambre réverbérante, maillé avec des éléments tétraédriques linéaires.

estimer l'erreur en utilisant (18) et on trouve que  $\tilde{\varepsilon}_2 \approx 1\%$ . On répète la même opération avec un traitement absorbant et  $Z = 2 + 2i$ . Le champ correspondant est illustré sur la Figure 8. On voit que le traitement diminue l'amplitude du champ sonore par un facteur 10.

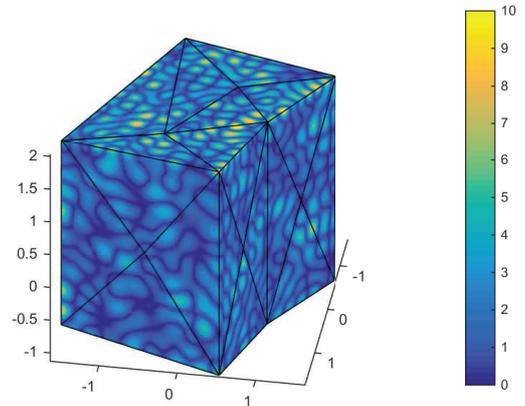


FIGURE 7 – Champ acoustique,  $|\phi|$ , à la fréquence  $f = 1620$  Hz (traitement acoustique avec  $Z = 2i$ ).

## 6 Conclusions

Les propriétés d'approximation d'un champ d'onde régulier par une somme d'ondes planes dont les directions de propagation sont uniformément réparties dans l'espace sont rappelées. On montre que, par rapport à une discrétisation en volume classique, l'approximation par ondes planes permet de gagner une dimension en espace comme les équations intégrales. Ces propriétés sont mises à profit dans la méthode des éléments finis enrichis à ondes planes. La méthode a été développée pour le calcul des champs acoustiques dans des cavités tridimensionnelles en présence (ou non) d'un traitement absorbant localement réactif en paroi. Les résultats sont en accord avec les prédictions théoriques. Dans le cas d'un champ purement réel, une estimation systématique de l'erreur est rendue possible à partir de la partie imaginaire de la solution calculée (eq. (18)).

1. Les dimensions sont celles de la chambre réverbérante de SUPMECA, St-Ouen

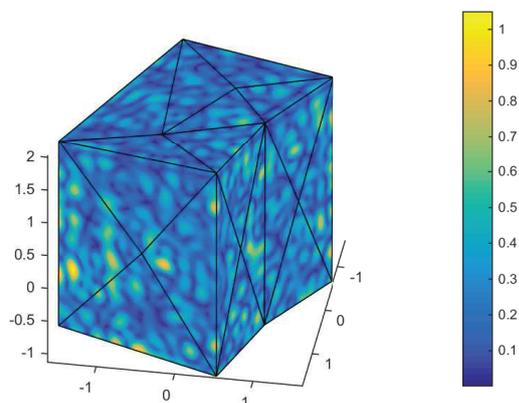


FIGURE 8 – Champ acoustique,  $|\phi|$ , à la fréquence  $f = 1620$  Hz (traitement acoustique avec  $Z = 2 + 2i$ ).

## Références

- [1] L. L. Thompson, A review of finite element methods for time-harmonic acoustics, *Journal of Acoustical Society of America* **119**(3), 1315–1330 (2006).
- [2] P. Bettess, Short-wave scattering : problems and techniques, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A* **362**, 421–443 (2004).
- [3] S. Marburg, B. Nolte, *Computational acoustics of noise propagation in fluids - finite and boundary element methods*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2008).
- [4] MID-FREQUENCY - CAE Methodologies for Mid-Frequency Analysis in Vibration and Acoustics, Katholieke Universiteit Leuven - Faculty of Engineering, (2012).
- [5] B. Engquist, O. Runborg, Computational high frequency wave propagation, *Acta Numerica*, 1–86, (2003).
- [6] J. M. Melenk, I. Babuška, The partition of unity finite element method. Basic theory and applications, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **139**, 289–314 (1996).
- [7] M. S. Mohamed, O. Laghrouche, A. El-Kacimi, Some numerical aspects of the PUFEM for efficient solution of 2D Helmholtz problems, *Computers and Structures* **88**, 1484–1491 (2010).
- [8] O. Cessenat, B. Després, Application of an ultraweak variational formulation of elliptic PDEs to the two-dimensional Helmholtz problem, *SIAM Journal on Numerical Analysis* **35**, 255–299 (1998).
- [9] T. Huttunen, P. Monk, J. P. Kaipio, Computational Aspects of the Ultra-Weak Variational Formulation, *Journal of Computational Physics* **182**, 27–46 (2002).
- [10] G. Gabard, Discontinuous Galerkin methods with plane waves for time-harmonic problems, *Journal of Computational Physics* **225**, 1961–1984 (2007).
- [11] C. Farhat, I. Harari, U. Hetmaniuk, A discontinuous Galerkin method with plane waves and Lagrange multipliers for the solution of Helmholtz problems in the mid-frequency regime, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **192**, 1389–1419 (2003).
- [12] W. Desmet, P. Sas, D. Vandepitte, An indirect Trefftz method for the steady-state dynamic analysis of coupled vibro-acoustic systems, *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences* **28**, 271–288 (2001).
- [13] H. Riou, P. Ladevèze, L. Kovalevsky, The Variational Theory of Complex Rays : An answer to the resolution of mid-frequency 3D engineering problems, *Journal of Sound and Vibration* **332**, 1947–1960 (2013).
- [14] R. Duraiswami, Z. Li, D. N. Zotkin, E. Grassi, N. A. Gumerov, Plane-wave decomposition analysis for spherical microphone arrays, IEEE Workshop on Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics, New Paltz, NY, (2005).
- [15] N. A. Gumerov, R. Duraiswami, *Fast multipole methods for the Helmholtz equation in three dimensions*, Elsevier, (2004).
- [16] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Vol. 55 of Appl. Math. Ser., 10th edition, National Bureau of Standards, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., (1972).
- [17] E. Perrey-Debain, Plane wave decomposition in the unit disc : convergence estimates and computational aspects, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **193**(1), 140–156 (2006).
- [18] I. H. Sloan, R. S. Womersley, Extremal systems of points and numerical integration on the sphere, *Adv. Comput. Math.* **21**, 107–125, (2004).
- [19] M. J. Peake, J. Trevelyan, G. Coates, The equal spacing of N points on a sphere with application to partition-of-unity wave diffraction problems, *Eng. Ana. Bound. Ele.* **40**, 114–122 (2014).
- [20] J.-D. Chazot, B. Nennig, E. Perrey-Debain, Performances of the Partition of Unity Finite Element Method for the two-dimensional analysis of interior sound field with absorbing materials, *Journal of Sound and Vibration* **332**, 1918–1929 (2013).
- [21] J.-D. Chazot, E. Perrey-Debain, B. Nennig, The Partition of Unity Finite Element Method for the numerical solution of waves in air and poroelastic media, *Journal of Acoustical Society of America* **135**, 724 (2014).