

CFA/VISHNO 2016

**Imagerie ultrasonore multiéléments en milieu dissipatif :
application au contrôle de tubes en polyéthylène haute
densité**S. Robert^a, E. Lopez Villaverde^a et C. Prada^b^aCEA,LIST, Centre de Saclay, bât. 565, PC 120, 91191 Gif-Sur-Yvette Cedex, France^bInstitut Langevin, UMR 7587 CNRS ESPCI PSL Research University, 1 rue Jussieu,
75238 Paris Cedex 05, France

sebastien.robert@cea.fr



LE MANS

Cette communication présente les récents travaux visant à améliorer l'imagerie ultrasonore au sein de tubes en polyéthylène haute densité (PEHD). Ce matériau est couramment utilisé dans les réseaux de transport d'eau potable, de gaz ou de fluides industriels, et des défauts critiques peuvent se former au niveau des soudures de tubes « bout-à-bout ». Les matériaux PEHD sont caractérisés par une atténuation viscoélastique importante qui dégrade significativement le contraste des images en fonction de la fréquence utilisée. Les images présentent alors un bruit incohérent (électronique) lié principalement à la chaîne d'acquisition des signaux. Pour améliorer la qualité des images, ce papier étudie différentes stratégies d'acquisition des signaux avec des capteurs piézoélectriques multiéléments : acquisition Full Matrix Capture (FMC), excitations codées en amplitude... Pour chaque acquisition, l'image correspondante est calculée en focalisant en réception les signaux élémentaires en tous points de la zone d'intérêt. Le contraste est ensuite mesuré sur les différentes images et justifié théoriquement. Enfin, la méthode de Décomposition de l'Opérateur de Retournement Temporel (DORT) est appliquée aux acquisitions pour filtrer un maximum de bruit.

1 Introduction

Ce papier présente une méthode de filtrage de bruit visant à améliorer l'imagerie ultrasonore Total Focusing Method (TFM) [1] dans des tubes en polyéthylène haute densité (PEHD). Ce matériau est de plus en plus répandu dans les réseaux de distribution d'eau, de gaz ou de fluides industriels. Les tubes PEHD peuvent présenter des défauts critiques notamment au niveau des soudures par fusion bout-à-bout. Le polyéthylène est homogène et isotrope, mais la difficulté de contrôle est liée à la forte atténuation visco-élastique pouvant dégrader significativement les images TFM. L'atténuation des échos engendre un bruit électronique sur les images dû à la chaîne d'acquisition des signaux.

Le filtrage de bruit électronique est basé sur la méthode de la Décomposition de l'Opérateur de Retournement Temporel (DORT). La méthode consiste à acquérir la matrice de réponses impulsionnelles inter-éléments $\mathbf{K}(t)$, aussi appelée Full Matrix Capture (FMC). Ensuite, on calcule la décomposition en valeurs singulières de la matrice de transfert $\hat{\mathbf{K}}(f)$, obtenue par transformée de Fourier de $\mathbf{K}(t)$. Cette décomposition permet de séparer le contenu spectral des défauts et celui associé au bruit. Une nouvelle matrice de transfert $\hat{\mathbf{K}}'(f)$ est constituée à partir des composantes fréquentielles des défauts. Par transformée de Fourier inverse, on obtient la matrice de réponses impulsionnelles filtrée $\mathbf{K}'(t)$ à laquelle on applique l'algorithme de focalisation TFM. L'image résultante est dépourvue de bruit et présente une résolution optimale en tous points de la région d'intérêt [2].

Dans ce papier, l'acquisition des signaux est obtenue à l'aide d'émissions codées en amplitude de Hadamard pour diminuer le niveau de bruit dû à l'atténuation [3]. En associant des émissions codées avec la méthode DORT, on démontre que le Rapport Signal sur Bruit (RSB) d'une image TFM dans le PEHD peut être augmenté de 40 dB par rapport à une acquisition FMC et sans procédé de filtrage.

Dans la section 2, les caractéristiques acoustiques du PEHD sont mesurées. Ensuite, dans la section 3, le principe de l'acquisition avec des émissions codées est décrit. Enfin, dans la section 4, la méthode DORT est appliquée aux données issues d'une acquisition codée pour filtrer un maximum de bruit.

2 Caractérisation du matériau PEHD

Les matériaux PEHD sont caractérisés par une atténuation significative et une vitesse de propagation

qui varie faiblement en fonction de la fréquence [4]. Cette section décrit l'expérience menée pour mesurer l'atténuation et la vitesse des ondes longitudinales dans le matériau (cf. Figure 1). Deux transducteurs ultrasonores (fréquence centrale 5 MHz, largeur de bande 60%) immergés dans l'eau sont positionnés en vis-à-vis, l'un fonctionne en mode émission et l'autre en mode réception. Une première mesure, notée $A_1(t)$, est réalisée sans échantillon. La deuxième mesure $A_2(t)$ est effectuée en introduisant un échantillon de PEHD d'épaisseur L_{ech} entre les deux transducteurs.

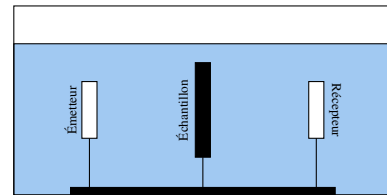


FIGURE 1 – Caractérisation d'une plaque PEHD en transmission.

La vitesse $c_{ech}(f)$ et le coefficient d'atténuation $\alpha_{ech}(f)$ de l'échantillon sont obtenus en comparant les phases et les amplitudes des spectres de $A_1(t)$ et $A_2(t)$. La vitesse est donnée par :

$$c_{ech}(f) = \frac{2\pi f L_{ech} c_{eau}(f)}{2\pi f L_{ech} + c_{eau}(f) \arg \left[\frac{\hat{A}_1(f)}{\hat{A}_2(f)} \right]}, \quad (1)$$

où $c_{eau}(f)$ est la vitesse de propagation dans l'eau ; $\hat{A}_1(f)$ et $\hat{A}_2(f)$ sont les transformées de Fourier de $A_1(t)$ et $A_2(t)$, respectivement. Le coefficient d'atténuation s'obtient par la formule suivante :

$$\alpha_{ech}(f) = \frac{\log T + \log |\hat{A}_1(f)| - \log |\hat{A}_2(f)|}{L_{ech}} + \alpha_{eau}(f), \quad (2)$$

où $\alpha_{eau}(f)$ est le coefficient d'atténuation de l'eau, et T est le coefficient de transmission défini en fonction des impédances acoustiques de l'eau Z_{eau} et de l'échantillon Z_{ech} :

$$T = \frac{4Z_{eau}Z_{ech}}{(Z_{eau} + Z_{ech})^2}. \quad (3)$$

La vitesse et l'atténuation des ondes longitudinales sont données sur la Figure 2. La courbe de dispersion $c_{ech}(f)$ [Figure 2(a)] montre que la vitesse est quasi constante autour de 2,39 mm/ μ s sur la bande fréquentielle [2 ; 5 MHz]. L'atténuation croît linéairement en fonction de la fréquence de 0,3 à 1 dB/mm [Figure 2(b)]. Ces courbes sont en bon accord avec la littérature [4]. Les ondes transversales peuvent être négligées en imagerie dans le PEHD car leur coefficient d'atténuation est au moins 10 fois plus important.

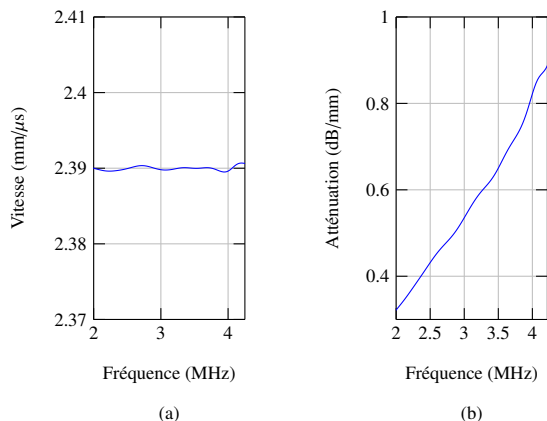


FIGURE 2 – Variations de la vitesse (a) et de l'atténuation (b) dans un matériau PEHD en fonction de la fréquence.

3 Imagerie TFM dans le PEHD

3.1 Dispositif expérimental

L'échantillon considéré ici est une portion d'un tube PEHD d'épaisseur 35 mm. On cherche à imager un défaut artificiel (trou latéral de 1 mm de diamètre) situé à 25 mm de profondeur à l'extérieur de la soudure. Comme illustré sur la Figure 3, un capteur multi-éléments linéaire (64 éléments; pitch 0,6 mm; fréquence centrale 5 MHz) est posé sur la surface de l'échantillon, et centré sur le défaut. Les acquisitions sont réalisées avec un système multi-voies MultiX de M2M.

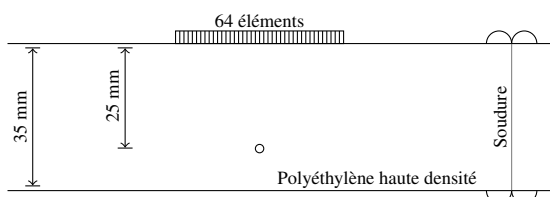


FIGURE 3 – Contrôle d'une éprouvette PEHD avec une sonde linéaire de 64 éléments.

3.2 Image TFM avec base d'émission canonique

La méthode TFM est un algorithme de focalisation en tous points appliquée à la matrice de réponses impulsionnelles inter-éléments $\mathbf{K}(t)$. Si le réseau de transducteurs est composé de N éléments, $\mathbf{K}(t)$ contient N^2 signaux, où une composante $K_{nm}(t)$ est la réponse impulsionnelle de l'élément n quand on excite l'élément m avec un signal impulsionnel.

Pour un point de l'image, on calcule et représente la somme des N^2 signaux analytiques, définis comme $S_{nm}(t) = K_{nm}(t) + j\mathcal{H}\{K_{nm}(t)\}$, où \mathcal{H} est l'opérateur de la transformée de Hilbert. Si l'on considère uniquement les trajets directs [5], la sommation cohérente de signaux s'écrit simplement :

$$I(\mathbf{r}) = \left| \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N S_{nm} [t_m(\mathbf{r}) + t_n(\mathbf{r})] \right|, \quad (4)$$

où \mathbf{r} est la position du point de focalisation. Le temps de vol direct de l'onde ultrasonore se propageant à une vitesse c

depuis l'élément m au point de focalisation est :

$$t_m(\mathbf{r}) = \frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_m\|}{c}. \quad (5)$$

L'image TFM présentée sur la Figure 4 a été calculée à partir de données expérimentales. La tension d'excitation des éléments et le gain analogique de pré-amplification des signaux ont été réglés à leur valeur maximale. Le niveau de bruit sur l'image est très important. Dans la suite, pour quantifier la qualité des images, on définira le RSB par :

$$\text{RSB}_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \left(\frac{\max I_{\text{def}}}{I_{b-\text{rms}}} \right), \quad (6)$$

où $\max I_{\text{def}}$ désigne l'intensité maximale de l'écho du défaut imagé, et $I_{b-\text{rms}}$ est la moyenne quadratique des amplitudes de bruit dans l'image. Sur l'image ci-dessous, le RSB est inférieur à 8 dB, ce qui n'est pas satisfaisant en termes de qualité de contrôle. Ce résultat s'explique par la faible amplitude des ondes transmises lors de l'acquisition de la matrice $\mathbf{K}(t)$ (une onde transmise avec un élément pour chaque tir) et de la forte atténuation à la fréquence centrale du capteur (1 dB/mm). On note que la distance aller-retour entre le capteur et le défaut correspond à 50 mm, ce qui correspond à une perte de 50 dB.

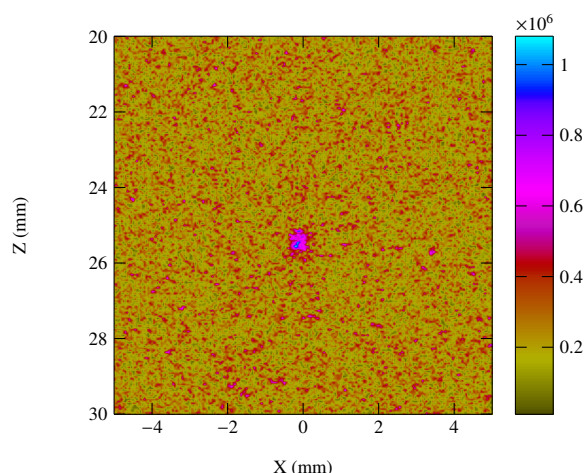


FIGURE 4 – Image TFM à 5 MHz avec un réseau linéaire de 64 éléments.

3.3 Image TFM avec une base d'émission de Hadamard

3.3.1 Principe du codage de Hadamard

Afin de diminuer le niveau de bruit, on considère la base d'émission de Hadamard où tous les éléments du capteur sont excités à chaque tir ultrasonore. Cette base est composée de N émissions avec N éléments, avec des lois d'amplitude différentes d'une émission à l'autre. Cette base est constituée des colonnes de la matrice de Hadamard qui est une matrice orthogonale composée de 1 et de -1 . La matrice de Hadamard de rang 2^k peut être construite de manière récursive :

$$\mathbf{H}_{2^k} = \mathbf{H}_2 \otimes \mathbf{H}_{2^{k-1}}, \quad (7)$$

où l'opérateur \otimes définit le produit de Kronecker, et les matrices de Hadamard \mathbf{H}_1 et \mathbf{H}_2 sont :

$$\mathbf{H}_1 = 1, \quad (8)$$

$$\mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Par simplicité, la matrice de Hadamard de rang N est notée \mathbf{H} . La relation entre $\mathbf{W}(t)$ et $\mathbf{K}(t)$ est :

$$\mathbf{W}(t) = \mathbf{K}(t)\mathbf{H}. \quad (10)$$

Comme $\mathbf{H}^{-1} = \frac{1}{N}\mathbf{H}$, la matrice de réponses impulsionnelles peut être déterminée à partir de $\mathbf{W}(t)$ en calculant le produit matriciel :

$$\mathbf{K}(t) = \frac{1}{N}\mathbf{W}(t)\mathbf{H}. \quad (11)$$

L'expression de la réponse impulsionnelle $K_{nm}(t)$ est donnée par :

$$K_{nm}(t) = \frac{1}{N} \sum_{p=1}^N W_{np}(t)H_{pm}. \quad (12)$$

Une fois effectuée cette opération de décodage, l'algorithme de focalisation en tous points [Éq. (4)] peut être appliqué aux N^2 signaux obtenus. En absence de bruit, l'image TFM avec des émissions codées de Hadamard est identique à celle obtenue avec la base canonique (acquisition FMC).

3.3.2 Réduction du bruit

La base de Hadamard ne modifie ni l'amplitude ni la forme des signaux contenus dans la matrice de réponses impulsionnelles $\mathbf{K}(t)$. Par contre, le niveau de bruit diminue puisque tous les éléments sont utilisés en émission lors de l'acquisition $\mathbf{W}(t)$. Pour le démontrer, on considère que le signal est perturbé par un bruit additif :

$$\tilde{W}_{nm}(t) = W_{nm}(t) + B_{nm}(t). \quad (13)$$

Le signal élémentaire $\tilde{K}_{nm}(t)$ obtenu selon l'Éq. (12) devient :

$$\tilde{K}_{nm}(t) = \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{p=1}^N W_{np}(t)H_{pm}}_{K_{nm}(t)} + \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{p=1}^N B_{np}(t)H_{pm}}_{B'_{nm}(t)} \quad (14)$$

Cette dernière relation met en évidence que le signal $\tilde{K}_{nm}(t)$ est équivalent à la réponse impulsionnelle $K_{nm}(t)$ perturbée par un bruit $B'_{nm}(t)$. Ce bruit est la combinaison linéaire de N composantes indépendantes de même statistique. Si $B_{nm}(t)$ est un bruit blanc d'écart type η_B , $B'_{nm}(t)$ est donc un bruit blanc d'écart type $\eta_{B'} = \frac{\eta_B}{\sqrt{N}}$. Le niveau de bruit présent dans $\tilde{K}_{nm}(t)$ est donc divisé par \sqrt{N} .

Les émissions codées diminuent significativement le bruit, mais elles ne sont pas compatibles avec la plupart des systèmes industriels où il n'est pas possible d'inverser le signal d'excitation d'une voie à l'autre. Pour contourner ce problème, on peut décomposer la matrice $\mathbf{W}(t)$ de la manière suivante :

$$\mathbf{W}(t) = \mathbf{W}^+(t) - \mathbf{W}^-(t), \quad (15)$$

où :

$$\mathbf{W}^+(t) = \mathbf{K}(t)\mathbf{H}^+, \quad (16)$$

$$\mathbf{W}^-(t) = \mathbf{K}(t)\mathbf{H}^-. \quad (17)$$

Les composantes H_{nm}^+ et H_{nm}^- des matrices \mathbf{H}^+ et \mathbf{H}^- sont :

$$H_{nm}^+ = \frac{1 + H_{nm}}{2}, \quad (18)$$

$$H_{nm}^- = \frac{1 - H_{nm}}{2}, \quad (19)$$

et prennent les valeurs 1 ou 0. Ce type d'émission est compatible avec la plupart des systèmes multi-voies standards. Pour constituer $\mathbf{W}(t)$, il faut procéder à deux acquisitions, $\mathbf{W}^+(t)$ et $\mathbf{W}^-(t)$, qu'il faut soustraire, puis décoder avant d'appliquer la méthode TFM.

Il est également possible de réaliser une seule acquisition $\mathbf{W}^+(t)$ pour obtenir $\mathbf{W}(t)$. Des Éqs. (18) et (19), on voit que $H_{nm}^- = 1 - H_{nm}^+$, ce qui mène à :

$$W_{nm}(t) = 2W_{nm}^+(t) - W_{n1}^+(t). \quad (20)$$

Le niveau de bruit dépend de la manière de constituer $\mathbf{W}(t)$. Si $\mathbf{W}(t)$ est construite à partir des deux acquisitions, $\mathbf{W}^+(t)$ et $\mathbf{W}^-(t)$, l'écart type du bruit des signaux après décodage est $\eta_{B'} = \frac{\eta_B}{\sqrt{N/2}}$, et le niveau de bruit est divisé par $\sqrt{N/2}$ par rapport à une acquisition dans la base canonique. Si $\mathbf{W}(t)$ est obtenue selon l'Éq. (20), l'écart type du bruit en $\tilde{\mathbf{K}}(t)$ est $\eta_{B'} = \frac{\eta_B}{\sqrt{N/4}}$. En utilisant la définition du RSB de l'Éq. (6), on peut montrer que la base de Hadamard augmente le RSB de $20 \log_{10} \frac{\eta_B}{\eta_{B'}}$ dans l'imagerie de TFM.

La Figure 5 donne un exemple d'image obtenue avec les deux matrices $\mathbf{W}^+(t)$ et $\mathbf{W}^-(t)$. Cette image est à comparer avec celle obtenue dans la base canonique (Figure 4). On peut mesurer une différence de RSB de 14 dB entre les deux images, ce qui est proche de la valeur 15 dB prédite par la théorie, soit $20 \log_{10} \sqrt{\frac{64}{2}}$.

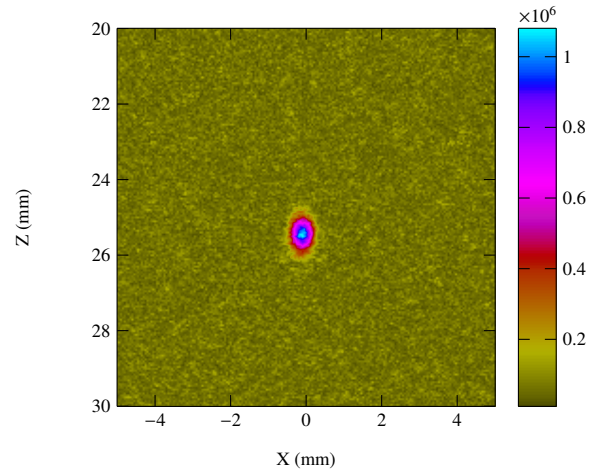


FIGURE 5 – Image TFM à 5 MHz en utilisant les amplitudes codées de Hadamard.

4 Filtrage DORT

Afin de faciliter le filtrage du bruit additif par la méthode DORT, on considère la matrice $\hat{\mathbf{K}}(f)$ décodée issue d'une acquisition de type Hadamard.

4.1 Principe du filtrage

La méthode DORT consiste en la décomposition en valeurs singulières de la matrice de transfert $\hat{\mathbf{K}}(f)$ sur la

bande passante du transducteur :

$$\hat{\mathbf{K}}(f) = \mathbf{U}(f)\mathbf{\Sigma}(f)\mathbf{V}^\dagger(f), \quad (21)$$

où les colonnes de $\mathbf{U}(f)$ et $\mathbf{V}(f)$ sont les vecteurs singuliers de $\hat{\mathbf{K}}(f)$, et $\mathbf{\Sigma}(f)$ est une matrice diagonale contenant les valeurs singulières de $\hat{\mathbf{K}}(f)$ rangées par ordre décroissant. L'analyse des valeurs et vecteurs singuliers de $\hat{\mathbf{K}}(f)$ permet d'isoler le contenu spectrale associé au défaut.

En présence d'un réflecteur ponctuel, la matrice de transfert peut être exprimée comme la somme de deux matrices :

$$\hat{\mathbf{K}}(f) = \sigma_{p(f)}(f)\mathbf{u}_{p(f)}(f)\mathbf{v}_{p(f)}^\dagger(f) + \sum_{q \neq p(f)}^N \sigma_q(f)\mathbf{u}_q(f)\mathbf{v}_q^\dagger(f), \quad (22)$$

où $\sigma_q(f)$ est la q -ième valeur singulière, $\mathbf{u}_q(f)$ et $\mathbf{v}_q(f)$ sont ses vecteurs singuliers en réception et en émission, et $p(f)$ est l'indice de valeur singulière associé au défaut ($1 \leq p(f) \leq N$). Le premier terme de l'Éq. (22) est la matrice contenant la réponse du défaut, alors que le second terme est la matrice caractérisant le bruit. Ces termes sont notés comme suit :

$$\hat{\mathbf{K}}'(f) = \sigma_{p(f)}(f)\mathbf{u}_{p(f)}(f)\mathbf{v}_{p(f)}^\dagger(f), \quad (23)$$

$$\hat{\mathbf{B}}(f) = \sum_{q \neq p(f)}^N \sigma_q(f)\mathbf{u}_q(f)\mathbf{v}_q^\dagger(f). \quad (24)$$

L'indice $p(f)$, dépendant de la fréquence, est déterminé par maximisation de l'intercorrélation entre la loi de retards $\tau_q(f)$, extraite de $\mathbf{v}_q(f)$, et la loi nécessaire pour focaliser sur le défaut τ_{ref} . Souvent, τ_{ref} est obtenu à partir du premier vecteur singulier à la fréquence où apparaît une valeur singulière principale.

4.2 Valeurs théoriques du bruit

La matrice de bruit $\hat{\mathbf{B}}(f)$ peut contenir du bruit de structure et/ou du bruit électronique. Dans le cas présent où le bruit dominant est plutôt électronique, on va s'intéresser à prédire les valeurs singulières d'un bruit blanc.

Pour ce faire, on considère que $\hat{\mathbf{B}}(f)$ est une matrice aléatoire de dimension $N \times N$, où toutes les composantes sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes. D'après [6], les valeurs singulières de cette matrice suivent une distribution en quart de cercle définie comme :

$$g(\sigma) = \frac{\sqrt{4 - \sigma^2}}{\pi} \mathbb{1}_{[0,2]}(\sigma), \quad (25)$$

où $\mathbb{1}_{[0,2]}(\sigma)$ restreint le domaine de $g(\sigma)$ entre 0 et 2. La fonction de répartition correspondante à cette distribution s'écrit comme :

$$G(\sigma) = \left(\frac{\sigma\sqrt{4 - \sigma^2}}{2\pi} + \frac{2 \arcsin\left(\frac{\sigma}{2}\right)}{\pi} \right) \mathbb{1}_{[0,2]}(\sigma). \quad (26)$$

La connaissance de cette répartition des valeurs singulières permet d'établir une formulation analytique pour l'allure globale de la loi de décroissance des valeurs singulières à une fréquence donnée. La Figure 6 montre la loi de décroissance théorique et celle expérimentale obtenue en une position éloignée du défaut.

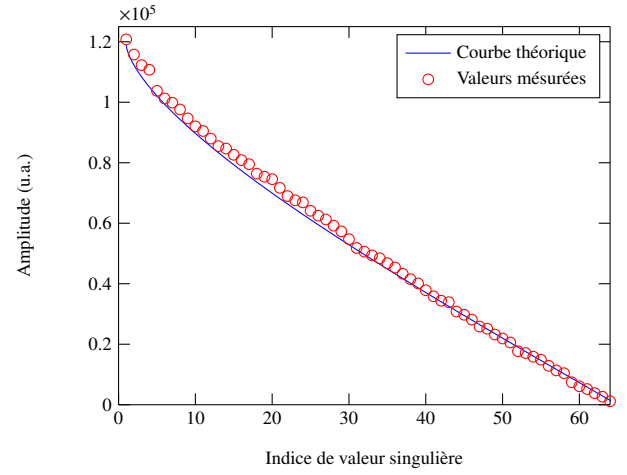


FIGURE 6 – Courbe de décroissance des valeurs singulières du bruit.

La Figure 7 illustre la courbe de décroissance lorsque l'écho d'un défaut est présent dans les signaux. L'allure de la courbe de décroissance des valeurs singulières du bruit n'est pas modifiée, mais la première valeur singulière se détache significativement des autres. Dans ce cas, σ_1 caractérise le défaut, et toutes les autres sont associées au bruit. La répartition des valeurs $\sigma_2, \dots, \sigma_N$ s'accorde avec la loi du quart de cercle comme prédit par la théorie.

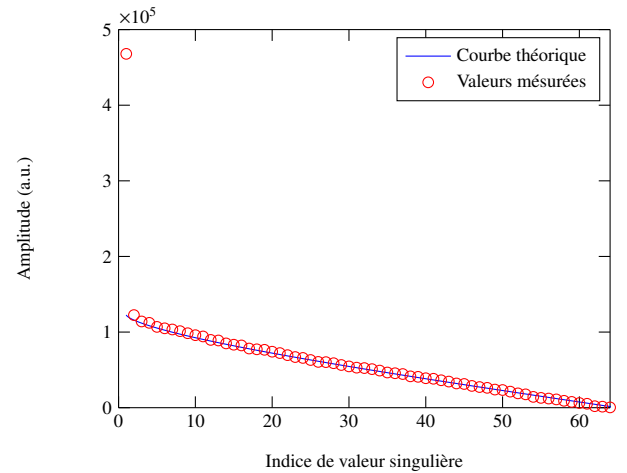


FIGURE 7 – Courbe de décroissance des valeurs singulières en présence d'un défaut.

4.3 Image TFM avec filtrage DORT

Afin de réduire le bruit introduit dans cette acquisition, la méthode DORT est appliquée comme indiqué dans la section 4.1. La Figure 8 montre l'image TFM associée à l'acquisition dans la base de Hadamard combinée avec le filtrage DORT. Le RSB mesuré sur cette image est 46 dB. Comme les composantes hautes fréquences du défaut sont conservées et séparées de l'espace de bruit, l'image obtenue préserve la résolution spatiale de départ, tout en maximisant le RSB.

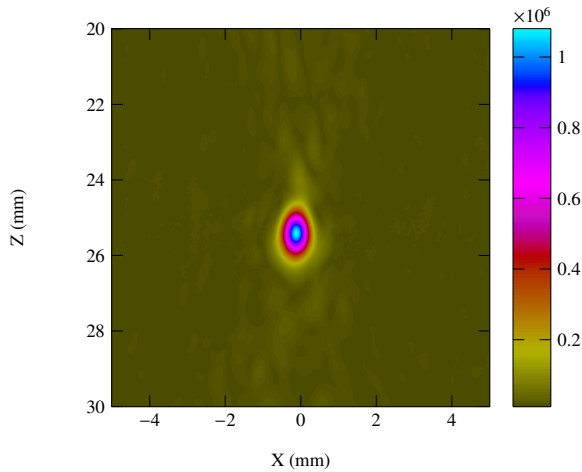


FIGURE 8 – Image Hadamard-TFM à 5 MHz avec filtrage DORT.

5 Conclusion

Le PEHD est un matériau difficile à contrôler par ultrasons à cause de sa forte atténuation, notamment à des fréquences élevées. La base de Hadamard permet de faciliter l'inspection car elle fournit une image TFM de haut RSB.

La méthode DORT a déjà démontré son intérêt dans des milieux complexes comme dans les aciers à gros grains. Cette communication montre ici que la méthode DORT combinée à la base de Hadamard permet de débruiter l'image TFM dans un matériau homogène et atténuant, et ce, à des fréquences relativement élevées.

Comme perspective, les travaux en cours consistent à appliquer la méthode pour détecter et caractériser des défauts dans une soudure par fusion.

Références

- [1] C. Holmes, B. W. Drinkwater, P. D. Wilcox, Post-processing of the full matrix of ultrasonic transmit-receive array data for non-destructive evaluation, *NDT & E International* **38**, 701-711 (2005).
- [2] E. R. Lopez Villaverde, S. Robert, C. Prada, Noise filtering in the Synthetic Transmit Aperture imaging by Decomposition of the Time Reversal Operator : Application to flaw detection in coarse-grained stainless steels, *Physics Procedia* **70**, 562-565 (2015).
- [3] T. Folégot, C. Prada, M. Fink, Resolution enhancement and separation of reverberation from target echo with the time reversal operator decomposition, *Journal of the Acoustical Society of America* **113**, 3155-3160 (2003).
- [4] J. Wu, Determination of velocity and attenuation of shear waves using ultrasonic spectroscopy, *Journal of the Acoustical Society of America* **99**, 2871-2875 (1996).
- [5] L. Le Jeune, S. Robert, E. Lopez Villaverde, C. Prada, Plane Wave Imaging for ultrasonic non-destructive testing : Generalization to multimodal imaging, *Ultrasonics* **64**, 128-138 (2016).

- [6] V. Marcenko, L. Pastur, Distributions of eigenvalues for some sets of random matrices, *Mathematics of the USSR-Sbornik* **1**, 457-483 (1967).