CFA/VISHNO 2016

Fentes minces chargées par des résonateurs de Helmholtz pour l'absorption du son dans l'audible

W. Huang, J.-P. Groby, V. Romero García et N. Jimenez
LAUM, Université du Maine, Av. Olivier Messiaen, 72085 Le Mans, France
weichun.huang.etu@univ-lemans.fr

LE MANS

Pendant longtemps, les matériaux poreux ont été utilisés pour l'absorption du son, mais leur mécanismes intrinsèques de dissipation (pertes visqueuses et thermiques) les rendent inappropriés aux basses fréquences. Ce travail s'intéresse aux mécanismes conduisant à une absorption totale par un arrangement périodique de fentes minces chargées par des résonateurs de Helmholtz. En incidence normale, ce problème se réduit à celui d'un conduit bidimensionnel avec un changement de section, où les résonateurs sont modélisées par une impédance. Ce changement permet de réduire drastiquement la vitesse des ondes dans les fentes, réduisant d'autant leurs fréquence de résonance. Dès lors, le problème se ramène à celui de la conception d'un résonateur sub-longueur d'onde avec pertes. Son couplage avec l'onde incidente pour assurer l'accord d'impédance est réalisé par couplage critique, ce qui conduit à une absorption totale.

1 Introduction

En 1999, une équipe de l'Université de Harvard, dirigée par L. Hau, a réussi à ralentir la lumière à 17 ms^{-1} en modifiant l'ambiance gazeuse dans la quelle l'onde optique se propage [1]. Ce phénomène offre aux physiciens la possibilité de contrôler plus concrètement les ondes électromagnétiques en modifiant le milieu, ou bien en manipulant les guides d'onde.

Un principe similaire a été adapté par les acousticiens Santillán et Bozhevolnyi en étudiant la propagation du son dans un réseau de résonateurs désaccordés pour faire l'analogue acoustique de l'effet de transparence électromagnétique induite (EIT) en physique atomique [2]. Le réseau de résonateur peut absorber des ondes de longueurs d'onde beaucoup plus grandes que sa dimension caractéristique. Depuis, plusieurs conceptions de métamatériaux de ce type ont été publiées [3, 4, 5]. En particulier, des méthodes pour déduire la relation de dispersion afin d'étudier le profil de vitesse dans le guide d'onde, et un système linéaire d'équations pour déterminer le coefficient d'absorption du matériau ont été proposés dans [5]. Cette étude a ouvert la possibilité d'utiliser d'autre type de résonateur, par exemple, les résonateurs de Helmholtz.

Les systèmes pour l'absorption avec des éléments résonants, possédent des pertes intrinsèques et des pertes par rayonnement. Plusieurs études ont été développées pour déterminer les conditions pour avoir une absorption parfaite[6, 7, 8]. La balance entre les pertes intrinsèques du résonateur avec les pertes par rayonnement, fournit une condition, nommée de couplage critique, qui détermine la condition pour l'absorption parfaite. Dans un cas général, il s'agit de chercher les zéros et les pôles des valeurs propres de la matrice de diffusion dans le plan de fréquence complexe sans pertes, puis de régler les pertes intrinsèques du système pour positionner le zéro sur l'axe réel ; c'est-à-dire agir sur les pertes intrinsèques pour compenser exactement les pertes par rayonnement.

Dans cet article, l'absorption du son dans l'audible par un métamatériau composé d'un arrangement périodique des résonateurs de Helmholtz est étudiée. Dans le cas des résonateurs de Helmholtz, les pertes visco-thermiques (intrinsèques) peuvent être réglées en manipulant les dimension des résonateurs. Dans la Section 3, le modèle est basé sur les ondes de Bloch conduisant à un système linéaire pour trouver le coefficient d'absorption. Une analyse de la relation de dispersion dans la fente mince permet d'étudier la performance générale de cette structure (le nombre d'onde, la vitesse de phase de l'onde et la bande interdite). Les paramètres effectifs sont étudiés dans la Section 3.2. Dans la Section 4, la condition de couplage critique est adaptée pour ce modèle afin d'optimiser les dimensions des résonateurs . Dans la Section 5, les résultats expérimentaux sont présentés.

2 Description de la configuration

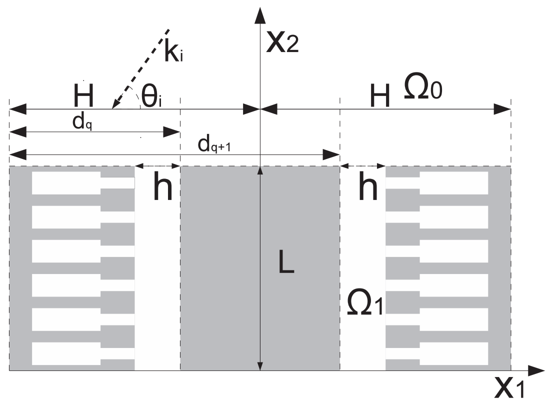


FIGURE 1 – Schéma présentant la configuration

L'échantillon est placé de façon à ce que les entrées des résonateurs soient perpendiculaires à la direction des fentes, comme décrit dans la Figure 1. Il est aussi symétrique par rapport à l'axe x_2, et périodique avec une période de 2H le long l'axe x_1.

L'espace Ω_0 est constintué d'air. L'espace Ω_1 est une fente de hauteur h et de longueur L, chargée des résonateur de Helmholtz. Le col des résonateurs est de rayon R_c et de longueur L_c. Le volume des résonateurs est de rayon R_v et de longueur L_v. L'onde incidente est oblique avec son nombre d'onde k_i et son angle θ_i.

Pour faciliter les calculs, un cas plus simple en incidence normale avec une épaisseur de paroi $(d_{q+1} - d_q) \approx 0$ est présenté dans le Figure 2. Ce cas est l'exacte analogue de la Figure 1 et réprésente exactement une condition expérimentale en tube à impédance.
En $x_1 = h$, une condition d'impédance donne $Z_r = Z_h/\phi_c$, avec ϕ_c, la porosité surfacique des cols et Z_h donnée par

$$Z_h = iZ_c(A - \tan(k_cL_c)\tan(k_vL_v))/(A\tan(k_cL_c) + \tan(k_vL_v)), \quad (1)$$

avec $A = S_c/S_v \times Z_v/Z_c$, où $Z_c = \rho_c c_c$ et $Z_v = \rho_v c_v$ sont respectivement les impédances caractéristiques du col et du volume, S_c et S_v sont respectivement les sections du col et du volume, où $S_0 = d_e^2$ est la section unitaire d'un résonateur.

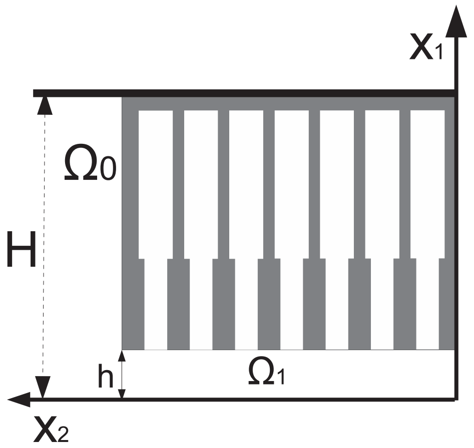


FIGURE 2 – Schéma présentant la configuration

Ici, les corrections de longueur autour de l'entrée et la sortie du col sont prises en compte [4, 9, 10]. Les parois en $x_1 = 0$ et en $x_2 = 0$ sont parfaitement réfléchissantes.
Les paramètres du fluide dans le col et le volume ainsi que celles du domaine Ω_1 sont tous définis à l'aide des paramètres effectifs[11].

2.1 Paramètres effectifs dans la fente et les résonateurs

Dans le domaine Ω_1 considéré comme un guide d'onde de type "fente", la densité effective ρ_S s'écrit [11]

$$\rho_S(\omega) = \rho_0 \left\{1 - \tanh(h/2\sqrt{-i\rho_0\omega/\gamma})/(h/2\sqrt{i\rho_0\omega/\gamma})\right\}^{-1}, \quad (2)$$

et l'incompressibilité effective du fluide K_S est définie par

$$K_S(\omega) = \gamma P_0 \left\{1 + (\gamma - 1)\frac{\tanh(h/2\sqrt{-i\rho_0 Pr\omega/\gamma})}{h/2\sqrt{-i\rho_0 Pr\omega/\gamma}}\right\}^{-1}, \quad (3)$$

avec h la hauteur de fente, γ le rapport de chaleur spécifique, Pr le nombre de Prandtl, et P_0 la pression caractéristique d'air.
La densité effective dans les tubes circulaires constituent le col et le volume ρ_T s'écrit

$$\rho_T(\omega) = \rho_0 \left\{1 - 2(i\omega/\nu)^{-1/2} \times G\left(r(i\omega/\nu)^{1/2}\right)/r\right\}^{-1}, \quad (4)$$

et l'incompressibilité du fluide K_T est définie par :

$$K_T(\omega) = \gamma P_0 \left\{1 + 2(\gamma - 1)(i\omega\gamma/\nu')^{-1/2} \times G\left(r(i\omega\gamma/\nu')^{1/2}\right)/r\right\}^{-1}, \quad (5)$$

avec r le rayon du tube, $\nu' = \kappa/\rho_0 C_v$, ρ_0 la masse volumique d'air, μ la viscosité dynamique d'air, et $\nu = \frac{\mu}{\rho_0}$ la viscosité cinématique d'air, où la fonction G est définie comme $G(x) = J_1(x)/J_0(x)$.
Le nombre d'onde caractéristique k_x, et la célérité s'écrivent : $k_x = \omega/\sqrt{\frac{K_x}{\rho_x}}$, $c_x = \sqrt{\frac{K_x}{\rho_x}}$, où x peut être c, ν, S.

3 Développement modal

Le problème présenté précedement se réduit à celui d'un matériau positionné dans un tube avec des parois parfaiement rigides de largeur H. La pression $p^{(0)}$ dans le milieu Ω_0, prend la forme :

$$p^{(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{H}x_1\right)\left\{A_n^i \delta_n^0 e^{-ik_{2n}^{(0)}(x_2-L)} + R_n e^{ik_{2n}^{(0)}(x_2-L)}\right\}, \quad (6)$$

avec A_n^i l'amplitude de l'onde incidente, R_n le coefficient de reflexion de l'onde n, δ_n^0 le symbole de Kronecker, $k_{2n}^{(0)} = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{n\pi}{H}\right)^2}$, le nombre d'onde dans Ω_0 suivant la direction x_2, $k_{1n}^{(0)} = \frac{n\pi}{H}$, celui suivant la direction x_1, et k_0 le nombre d'onde caractéristique d'air.
Les modes sont orthogonaux et la relation d'orthogonalité s'écrit :

$$\int_0^H \cos\left(\frac{n\pi}{H}x_1\right)\cos\left(\frac{m\pi}{H}x_1\right) dx_1 = \frac{\delta_n^m H}{\epsilon_m}, \quad (7)$$

où $\epsilon_m = 1$ si $m = 0$ et $\epsilon_m = 2$ si $m \neq 0$.

La pression $p^{(1)}$ dans l'espace Ω_1, vérifiant les conditions de Neumann en $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$ et la condition d'impédance en $x_1 = h$, s'écrit :

$$p^{(1)} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos\left(k_{2m}^{(1)}x_2\right)\cos\left(k_{1m}^{(1)}x_1\right), \text{ où } k_{2m}^{(1)} = \sqrt{k_S^2 - \left(k_{1m}^{(1)}\right)^2}. \quad (8)$$

La relation de dispersion vérifié par $k_{1n}^{(1)}$ est [13] :

$$k_{1n}^{(1)} \tan\left(k_{1n}^{(1)}h\right) = \frac{-i\omega\rho_S}{Z_r}. \quad (9)$$

Cette équation se résout à l'aide de la méthode de Müller [12] en établissant la valeur initiale en basse fréquence, $\hat{k}_{10}^{(1)} = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{-\omega\rho_S h}{Z_r}}$. En reprenant l'équation (8), l'expression de la vitesse de phase $v_{20}^{(1)}$ dans l'espace Ω_1 est :

$$\hat{v}_{20}^{(1)} = c_S\left(1 - (\hat{k}_{10}^{(1)})^2/k_S^2\right)^{-1/2}. \quad (10)$$

La relation de bi-orthogonalité pour les modes transversaux dans l'espace Ω_1 donne :

$$N_n = \frac{1}{h}\int_0^h \cos(k_{1n}^{(1)}x_1)^2\, dx_1 = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\sin(2k_{1n}^{(1)}h)}{2k_{1n}^{(1)}h}\right], \quad (11)$$

si $\sin(2k_{1n}h) + 2k_{1n}h \neq 0$.

3.1 Système linéaire

Les conditions de continuité pour la pression et la vitesse normale en $x_2 = L$ sont projetées sur les modes propres dans Ω_0 et Ω_1 respectivement. Cette dernière opération fait apparaître une intégrale particulière, notée $I_{nm}^{(q)\pm}$, qui a pour expression :

$$I_{nm} = \frac{1}{h}\int_0^h \cos(k_{1n}^{(1)}x_1)\cos(\frac{m\pi}{H}x_1)\, dx_1 \quad (12)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\text{sinc}\left[\left(k_{1n}^{(1)} + \frac{m\pi}{H}\right)h\right] + \text{sinc}\left[\left(k_{1n}^{(1)} - \frac{m\pi}{H}\right)h\right]\right\}. \quad (13)$$

Le système linéaire finalement se réduit sous la forme :

$$R_M - \frac{i\rho_0\epsilon_M\phi_0}{\rho_S k_{2M}^{(0)}}\sum_{M'} R_{M'}\sum_n \frac{k_{2n}^{(0)}\tan(k_{2n}^{(1)}L)I_{nM}I_{nM'}}{N_n} = \quad (14)$$

$$A_M^i\delta_M^0 + \frac{i\rho_0\epsilon_M\phi_0}{\rho_S k_{2M}^{(0)}}\sum_{M'} A_{M'}^i\delta_{M'}^0\sum_n \frac{k_{2n}^{(0)}\tan(k_{2n}^{(1)}L)I_{nM}I_{nM'}}{}$$

où $\phi_0 = h/H$ est la porosité générale de la structure dans la Figure 2.
Les R_M sont calculés via un système linéaire de M équations à M inconnues. Finalement, le coefficient d'absorption est obtenu

$$\alpha = 1 - \sum_n \Re(k_{2n}^{(0)})|R_n|^2/k_{20}^{(0)}. \tag{15}$$

3.2 Paramètres effectives

Les paramètres effectives peuvent être utilisées pour simuler la réflexion et l'absorption. Ces paramètres dans la domaine Ω_1 sont la densité effective ρ_{eff}, l'incompressibilité effective K_{eff}[5] (ou alternativement le nombre d'onde effectif $k_{eff} = \sqrt{k_S^2 - (\hat{k}_{10}^{(1)})^2}$ et l'impédance effective $Z_{eff} = \sqrt{K_{eff}\rho_{eff}}$) s'ecrit en basse fréquence :

$$\rho_{eff} = \frac{\rho_0}{\phi_{tot}}\left(1 + \frac{(V_c + V_v)\phi_c}{S_c}\right) \quad , \tag{16}$$

$$K_{eff} = \frac{K_0\left(1 + \frac{(V_c+V_v)\phi_c}{S_c}\right)}{\phi_{tot}\left(1 + \dfrac{K_0\phi_c(V_vK_c + V_cK_v)}{K_ch(S_cK_v - V_v\rho_cL_c\omega^2)}\right)} \quad , \tag{17}$$

où V_c et V_v sont respectivement les volumes du col et du volume, Z_0, impédance cractéristique de l'air, $\phi_c = S_c/S_0$, porosité au niveau de col, et $\phi_{tot} = \phi_0\left(1 + \frac{(V_c+V_v)\phi_c}{S_c}\right)$, porosité totale.

Alors le coefficient de réflexion R_{eff} s'écrit

$$R_{eff} = \frac{iZ_{eff}\cot(k_{eff}L) - Z_0}{iZ_{eff}\cot(k_{eff}L) + Z_0}. \tag{18}$$

Donc, le coefficient d'absorption $\alpha_{eff} = 1 - |R_{eff}|^2$.

4 Couplage critique

Dans cette section la recherche de la condition de couplage critique avec le développement modal présenté précedement, c'est-à-dire en considerant tous les modes d'ordre supérieur, est présenté. L'évaluation du coefficient de réflexion dans un plan de fréquence complexe pour le cas sans pertes intrinsèques donne lieu à couples des pôles et des zéros qui sont complexes conjugués. Effectivement, le système résonant étant ouvert, il présent des pertes par rayonnement, qui sont en relation avec la partie imaginaire des pôles et zéros du coefficient de réflexion. La condition de couplage critique est obtenue quand les pertes intrinsèques du système compensent les pertes de rayonnement, c'est-à-dire quand la présence des pertes intrinsèques positionne le zéro du coefficient de réflexion sur l'axe de fréquences réelles. Alors, la condition de couplage critique conduit à l'absorption totale pour cette fréquence.

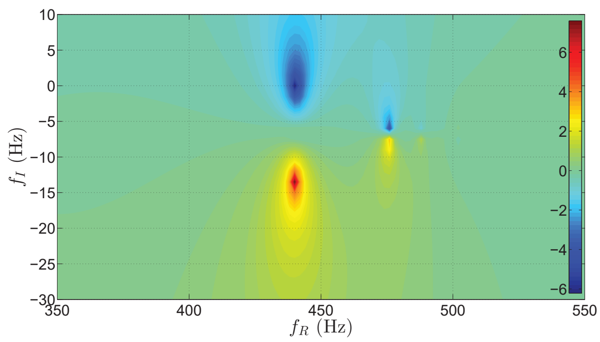
Ici, fréquences complexes de la forme $F_{\mathbb{C}} = f_{\mathbb{R}} + if_{\mathbb{I}}$ sont utilisées dans tous les calculs de l'Eq. (1) à (14). Dans l'Eq. (14), pour assurer la continuité du nombre d'onde dans la surface de Riemann, la valeur de $k_{2m}^{(0)}$ est choisie telle que $\Im(k_{2m}^{(0)})$ soit toujours positive. Aussi, parmi les solutions R_M, seule R_0 qui correspond au mode fondamental, est physique. Le coefficient de réflexion est $|R_0|^2$. $\log(|R_0|^2)$ est tracé en fonction de $f_{\mathbb{R}}$ et de $f_{\mathbb{I}}$ dans la Figure. 3(a).

Dans ce travail, les pertes intrinsèques du système sont contrôlés en variant les différentes dimensions des résonateurs et de la fente. À mesure que les pertes intrinsèques sont changés, le zéro du $|R_0|^2$ traverse le plan complexe, et dessine une trajectoire. Le point où cette trajectoire croise l'axe de fréquence réelle, indique la condition de couplage critique et une absorption totale. La Fig. 3(a) montre le plan complexe pour une configuration où un des zéros du coefficients de réflexion est sur l'axe de fréquence réel. Cette configuration est obtenue par une étape de multi-optimisation où seulement trois résonateurs sont chargés sur le parois de Ω_1. Les dimensions de cette configuration sont dans le Tableau 1.

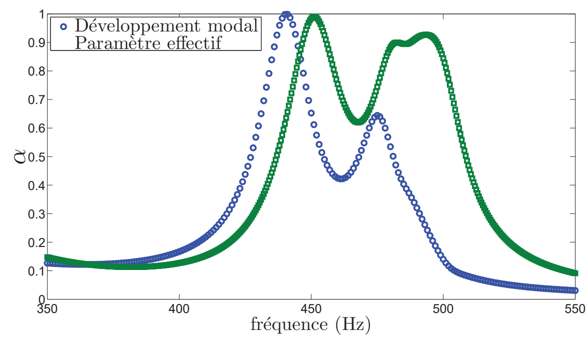
Tableau 1 – Géométrie de la fente et des résonateurs d'une configuration optimisée (Unité : mm)

Résonateur	R_c	R_v	L_c	L_v
	2.94	4.85	9.47	136.59
Fente	d_n	L	h	d_e
	149	31.92	2.94	10.64

4.1 Résultats de simulation



(a)



(b)

Figure 3 – a) Plane complexe de $\log(|R_0|^2)$;
b) Coefficient d'absorption en fonction de la fréquence

Dans la Figure (3), les résultats de simulation sont comparés sur une bande de fréquence autour des deux pics d'absorption (350Hz - 550Hz). Dans la Figure (3a), le premier zéro apparaît à la fréquence complexe $(440, 0)$, qui correspond à une absorption totale comme montre la Figure (3b). Une second zéro à $(476, -6)$ donne un second pic d'absorption, mais comme le zéro il n'est pas exactement sur l'axe réel, si bien que l'absorption associé n'est pas totale. Dans la Fig. (3b), les résultats montrent un bon accord entre les deux méthodes. Les pics de la méthode des paramètres effectifs se situent légèrement à plus haute fréquence. Cela est due au fait que la méthode des paramètres effectifs ne prend pas compte les modes supérieurs. En effet, elle est équivalente au calcul du développement modal avec $n = M' = 1$ dans Eq.(14). À partir de 500 Hz, il existe une bande interdite.

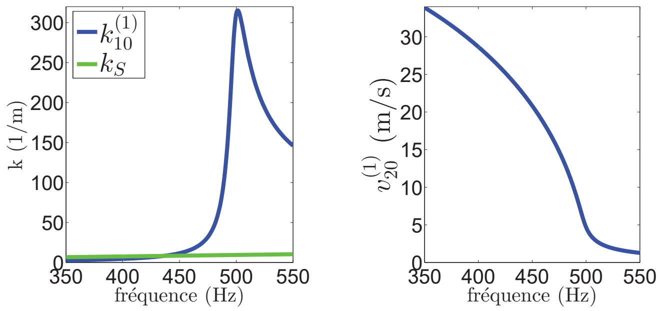


FIGURE 4 – a) Nombre d'onde $k_{10}^{(1)}$ en fonction de la fréquence, en comparaison avec les k_S ;
b) Vitesse d'onde suivante la direction 2 $v_{20}^{(1)}$ dans l'espace Ω_1 en fonction de la fréquence.

Dans la Fig. (4a), il est constaté que $k_{10}^{(1)}$ est plus grand que k_S à partir de 436 Hz . Il indique la limite inférieur de la bande interdite, vu que $k_{20}^{(1)} = \sqrt{k_S^2 - (k_{10}^{(1)})^2}$ est imaginaire. Dans la Fig(4b), la vitesse d'onde $v_{20}^{(1)}$ est toujours très inférieure devant la célérité du son dans l'air et celle dans l'espace Ω_1 en basse fréquence. En outre, la valeur de $v_{20}^{(1)}$ est très proche de zéro à partir de 500 Hz, ce qui correspond à la bande interdite.

5 Résultats expérimentaux

Dans le but de réduire le plus de l'épaisseur d'échantillon, une conception avec une seule couche de résonateur est faite à partir des même processus d'optimisation, ce qui n'est pas tout à fait compatible avec nos hypothèses de la réaction locale des résonateurs et d'impédance. Le prototype est fabriqué en stereolytographie. Ses dimensions sont détaillées dans le tableau suivant.

TABLEAU 2 – Géométrie de la fente et des résonateurs du prototype (Unité : mm)

Résonateur	R_c	R_v	L_c	L_v
	2.25	4.98	23.07	123.30
Fente	d_n	L	h	d_e
	149	11.46	2.63	11.46

Le résultat expérimental possède un pic d'absorption de 98% à 340 Hz. Il est dans un bon accord avec les méthodes théoriques. Cela indique que cet échantillon fonctionne dans la marge de raisonnement des méthodes théoriques.

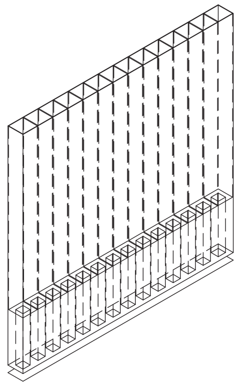


FIGURE 5 – Conception du prototype

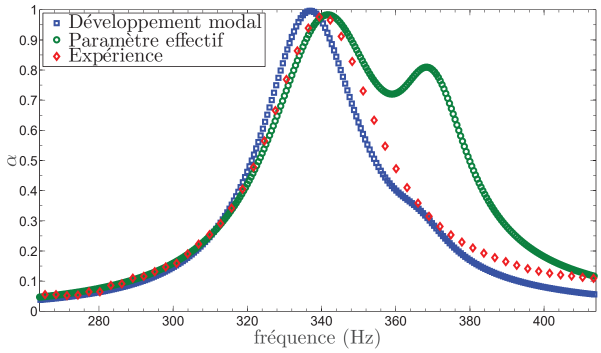


FIGURE 6 – Résultat expérimental du coefficient d'absorption en fonction de la fréquence comparé avec les résultats des simulations

6 Conclusion

Une structure composée d'une fente avec une face modifiée par un arrangement de résonateurs de Helmholtz a été étudiée à partir de deux méthodes le développement modal et les paramètres effectifs en basse fréquence. La condition du couplage critique est introduite dans le calcul du développement modal afin de visualiser l'origine d'absorption totale, et d'optimiser les configurations.

Pour la configuration optimisée avec trois couches de résonateurs, sa performance générale a été jugée à partir du coefficient d'absorption α, le nombre d'onde $k_{10}^{(1)}$, la vitesse d'onde $v_{20}^{(1)}$.Une absorption totale est trouvée à 440 Hz par une épaisseur de 31.92 mm, ce qui à un rapport de 26 fois entre la longueur d'onde et l'épaisseur du prototype. Le phénomène de "slow sound" a été observé. Le nombre d'onde $k_{10}^{(1)}$ est plus grand que k_S pour certaines fréquences, ce qui donne une bandes interdite. La vitesse d'onde $v_{20}^{(1)}$ est plusieurs fois plus petite que c_0 et est très proche de 0 au sein de la bande interdite.

L'expérience sur un prototype avec une seule couche de résonateurs montre un bon accord avec les théories. Le prototype procède une absorption total à 340 Hz par une épaisseur de 11.46 mm, ce qui corresponde à un rapport de 89 fois la longueur d'onde et l'épaisseur du prototype.

Remerciements

Cette recherche est financé par le projet METAUDIBLE, No.ANR-13-BS09-0003, co-financé par l'ANR et la FRAE.

Références

[1] L. V. Hau, S. E. Harris, Z. Dutton & C. H. Behroozi, Light speed reduction to 17 metres per second in an ultracold atomic gas, *Nature*, **397(6720)**, 594-598 (1999).

[2] A. Santillán, & S. I. Bozhevolnyi, Acoustic transparency and slow sound using detuned acoustic resonators, *Physical Review B*, **84(6)**, 064304 (2011).

[3] Y. Auregan, & V. Pagneux, Slow sound in lined flow ducts. *Journal of the Acoustical Society of America*, **138(2)** : 605-613 (2015).

[4] G. Theocharis, O. Richoux, V. R. García, A. Merkel, & V. Tournat, Limits of slow sound propagation and transparency in lossy, locally resonant periodic structures. *New Journal of Physics*, **16(9)**, 093017 (2014).

[5] J. P. Groby, W. Huang, A. Lardeau, & Y. Aurégan, Use of slow wave to design simple sound absorbing metamaterials, *Journal of Applied Physics*, **117**, 124903 (2015).

[6] A. Yariv, Universal relations for coupling of optical power between microresonators and dielectric waveguides. *Electronics letters*, **36(4)**, 321-322(2000).

[7] Y. Xu, Y. Li, R. K. Lee, & A. Yariv, Scattering-theory analysis of waveguide-resonator coupling. *Physical Review E*, **62(5)**, 7389 (2000).

[8] V. Romero-García, G. Theocharis, O. Richoux, A. Merkel, V. Tournat, & V. Pagneux Perfect and broadband acoustic absorption by critically coupled sub-wavelength resonators *Scientific reports*, **6**, 19519 (2016).

[9] A. Merkel, G. Theocharis,, Richoux, O., Romero-García, V., & Pagneux, V. Control of acoustic absorption in one-dimensional scattering by resonant scatterers *Applied Physics Letters*, **107(24)**, 244102 (2015).

[10] O. Richoux, & V. Pagneux, Acoustic characterization of the Hofstadter butterfly with resonant scatterers *EPL (Europhysics Letters)*, **59(1)**, 34 (2002).

[11] M. R. Stinson, The propagation of the plane sound wave in narrow and wide circular tubes and generalization to uniform tubes of arbitrary circular cross-section shape, *Journal of the Acoustical Society of America*, **89(2)**, 550-558 (1991).

[12] W. H. Press, Numerical recipes 3rd edition : The art of scientific computing , *Cambridge university press*. (2007).

[13] E. Redon, A. S. Dhia, J. F. Mercier, & S. P. Sari, Non-reflecting boundary conditions for acoustic propagation in ducts with acoustic treatment and flow, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **86(11)**, 1360-1378 (2011).