# CFA/VISHNO 2016

## Modèle de fluide équivalent isotrope transverse

B. Nennig<sup>a</sup>, R. Binois<sup>a</sup>, N. Dauchez<sup>b</sup>, E. Perrey-Debain<sup>b</sup> et F. Foucart<sup>c</sup> <sup>a</sup>SUPMECA, 3, rue Fernand Hainaut, 93407 Saint-Ouen, France
<sup>b</sup>Sorbonne universités, Université de Technologie de Compiègne, Laboratoire Roberval, UMR CNRS 7337, CS 60319, 60203 Compiègne, France
<sup>c</sup>Université de Technologie de Compiègne, rue personne de Roberval, 60200 Compiègne, France benoit.nennig@supmeca.fr



De part leur procédés de fabrication, les matériaux poreux, tels que les laines, présentent des propriétés mécaniques et acoustiques très différentes dans le plan de dépôt des fibres et suivant sa normale. Cette isotropie transverse a déjà été observée et peut être intégrée au modèle de Biot par exemple. Cependant, si la raideur du squelette est très grande ou négligeable devant les effets visco-inertiels et l'élasticité du fluide saturant, il est possible de simplifier le modèle de Biot pour obtenir 2 modèles de fluides équivalents, soit le modèle de squelette rigide (SR), soit le modèle limp. Dans ce travail, nous proposons une extension de ces modèles de fluide équivalent pour qu'ils prennent en compte l'isotropie transverse. Dans ce modèle, la densité effective devient un tenseur d'ordre 2. Ce modèle requiert la connaissance de la résistance au passage de l'air suivant les 2 directions privilégiées (en première approche). Des mesures en tube à impédance en incidence normale ont été comparées à un modèle numérique. Un bon accord est obtenu. Le coût numérique de la résolution est le même que pour un fluide isotrope.

## **1** Introduction

Les matériaux poreux, comme ceux utilisés dans les applications d'isolation acoustique sont constitués d'une phase solide et d'une phase fluide. Leur dynamique et bien décrite par le modèle de Biot qui prend en compte le couplage entre le squelette et le fluide saturant les pores [7, 1].

Cependant, si le contraste de rigidité et de densité entre les deux phases est suffisamment fort, une modélisation simplifiée peut être utilisée. On obtient donc i) le modèle de squelette rigide [1], si la phase solide peut être considérée comme immobile et ii) le modèle limp [4, 11, 9, 18] si la rigidité du squelette est très faible devant celle du fluide saturant. Cette dernière approche conserve les effets inertiels de la phase solide. Une dérivation de ces modèles, à partir du modèle de Biot, est donné dans [9].

Les matériaux fibreux tels que la laine de verre, de part leur procédés de fabrication, possèdent des propriétés différentes suivant le plan de dépôt des fibres (I) et la direction qui lui est perpendiculaire (T). Ce phénomène est connu depuis de nombreuses années [19, 3, 2, 21, 22, 26] et de nombreux articles traitent de ce sujet. Une revue rapide peut-être trouvée dans [1, section 3.7, p. 39]. Par exemple, Tarnov [21, 22] a montré que la résistance au passage de l'air peut varier dans un rapport 1/2 à 2/3 entre les directions I et T suivant l'orientation des fibres dans le plan. Des travaux plus récents se sont attachés à mesurer l'anisotropie des paramètres élastiques des mousses [15, 13, 12, 27] et des paramètres acoustiques [17, 8, 28], telle que la résistance au passage de l'air, soit par des méthodes directes soit par des méthodes inverses.

Comme pour le cas isotrope, le modèle de Biot peut être simplifié pour obtenir un fluide équivalent. L'objet de cet article est d'étendre les notions de fluides équivalents pour les fibreux isotropes transverses et en particulier pour les matériaux limp. Cette idée a été déjà évoquée, mais de nouveaux résultats expérimentaux illustrent l'intérêt de cette approche quand les directions sont couplées.

On obtient un modèle de fluide isotrope transverse, c'est à dire un fluide où la densité a une représentation tensorielle tandis que le module de compressibilité est un scalaire [20, 10]. Ce type de modèle s'obtient dans la limite des basses fréquences (homogénéisation) pour des matériaux stratifiés [20] dans les cristaux sonique/phononique, pour des métamatériaux [23, 24], ou encore pour les superfluides [16, 14].

Dans un premier temps, les bases du modèle de fluide isotrope transverse sont présentées à partir du modèle de Biot. Des comparaions du modèle avec des résultats expérimentaux viennent confirmer l'intérêt de l'approche.



FIGURE 1 – Matériau transverse isotrope.

#### 2 Fluide isotrope transverse

Ce travail s'intéresse en particulier aux matériaux limp pour lesquels les effets de l'anisotropie peuvent être très importants. Le modèle limp est obtenu à partir du modèle de Biot en supposant que la raideur du squelette est négligeable devant l'inertie et l'incompressibilité du fluide. Le coton ou la laine de verre sont typiquement bien décrit par ce modèle. Cependant, si la résistivité au passage de l'air devient importante (environ  $\sigma > 25000$  Nm<sup>-4</sup>s) on obtient un paradoxe. D'un coté, le matériaux doit avoir un squelette mou et de l'autre, le squelette doit être suffisamment rigide pour éviter une déformation qui limiterait la résistance au passage de l'air. Cette observation est le point de départ de ce travail.

Le modèle de fluide isotrope transverse (IT) est obtenu en partant des équations du mouvement de la théorie de Biot [6, 7]. Dans sa version originale, les variables sont le déplacement de la phase fluide U et le déplacement de la phase solide u. Cependant, une version alternative a été proposée par Dazel *et al.* [9]. Celle-ci est bien adaptée ici car elle fait apparaître le tenseur des contraintes solide *in vacuo*  $\hat{\sigma}$  ce qui permet d'étudier simplement les valeurs extrêmes de rigidité. Cette formulation utilise le déplacement de la phase solide u et u<sup>w</sup> qui est équivalent au déplacement total  $u^t = \phi U + (1 - \phi)u$  tant que le module d'incompressibilité du squelette est faible devant celui du matériaux le constituant (cette hypothèse est toujours vérifiée ici). Cette formulation a été étendue au cas IT par Khurana *et al.* [15].

Sans perte de généralité, les axes principaux du tenseur sont choisis de façon à coïncider avec les axes du système de coordonnées ( $\mathbf{e}_x$  est la direction transverse *T*, perpendiculaire aux directions  $\mathbf{e}_v$  et  $\mathbf{e}_z$  qui définissent le plan d'isotropie). On rappelle les équations du mouvement données dans [15],

$$\nabla \cdot \hat{\sigma}(\mathbf{u}) = -\omega^2 \rho_s \mathbf{u} - \omega^2 \gamma \rho_{eq} \mathbf{u}^w,$$
  
$$K_{eq} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}^w) = -\omega^2 \gamma \rho_{eq} \mathbf{u} - \omega^2 \rho_{eq} \mathbf{u}^w,$$

avec,  $K_{eq}$  le module d'incompressibilité de la phase fluide. Le tenseur de couplage  $\gamma$  et les densités effectives  $\rho_{eq}$  et  $\rho_s$  s'écrivent

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\phi} \left( \boldsymbol{\rho}_{22}^{-1} \boldsymbol{\rho}_{12} - \frac{Q}{R} \mathbf{I} \right),$$

$$\boldsymbol{\rho}_{eq} = \boldsymbol{\rho}_{22} / \boldsymbol{\phi}^2,$$

$$\boldsymbol{\rho}_s = \left( \boldsymbol{\rho}_{11} - \boldsymbol{\rho}_{12}^2 \boldsymbol{\rho}_{22}^{-1} \right) + \boldsymbol{\gamma}^2 \boldsymbol{\rho}_{eq},$$

où I est la matrice identité, R le module effectif d'incompressibilité de la phase fluide, Q indique le couplage entre les deux phases par dilatation volumique et  $\phi$  est la porosité. Tous ces tenseurs du second ordre sont diagonaux et sont reliés aux densités effectives de Biot

$$\boldsymbol{\rho}_{ij} = \operatorname{diag} \rho_{ij}^k, \quad k = x, \, y, \, z. \tag{1}$$

où chaque terme  $\rho_{ii}^k$  est donné par

$$\begin{split} \rho_{12}^k &= \phi \rho_f (1 - \alpha^k), \\ \rho_{22}^k &= \phi \rho_f - \rho_{12}^k, \\ \rho_{11}^k &= (1 - \phi) \rho_m - \rho_{12}^k. \end{split}$$

Ici,  $\rho_m$  représente la densité du matériaux de la phase solide et  $\rho_f$  la densité du fluide saturant. Ils sont supposés identiques dans toutes les directions. Les pertes visqueuses sont intégrées à la tortuosité dynamique  $\alpha^k$  dans la direction k (voir appendice A). Elles dépendent de la résistance au passage de l'air  $\sigma$  et des longueurs caractéristiques visqueuses  $\Lambda$ . Ces quantités ont une représentation tensorielle :

 $\sigma = \operatorname{diag} \sigma^k, \quad k = x, y, z,$ 

et

$$\mathbf{\Lambda} = \operatorname{diag} \mathbf{\Lambda}^k, \quad k = x, \, y, \, z. \tag{2}$$

Notons qu'une expression similaire peut être établie pour la limite haute fréquence de la tortuosité  $\alpha_{\infty}^k$ . Dans le cas des laines, on a généralement  $\alpha_{\infty}^k \approx \alpha_{\infty} \approx 1$  et cette aproximation sera conservée ici. Il a été mesuré et montré théoriquement [22, 21, 28] que la résistance au passage l'air est plus grande dans la direction de dépôt des fibres que entre deux plans de dépôt.

Tarnow [22] souligne que, pour de la laine de verre, la rigidité suivant la direction de dépôt des fibres peut être jusqu'à 50 fois plus faible que la rigidité dans le plan des fibres. Il est donc raisonnable de supposer que le comportement tend vers celui d'un fluide équivalent avec un squelette rigide dans le plan et vers un comportement limp suivant la direction de dépôt des fibres. Dans ces conditions, le système (1a) se simplifie :

$$u_T = -\frac{\rho_{eq}^T}{\rho_s^T} \gamma^T u_T^w$$
$$u_I = 0,$$

et (1b) devient

$$K_{eq}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}^{w}) = -\omega^{2}\rho\mathbf{u}^{w},$$
(3)

TABLE 1 – Propriétés du matériaux.

	$\rho_1$
<i>\(\phi\)</i>	
- $[Nm^{-4}s]$ $[Nm^{-4}s]$ - $[\mu m]$ $[\mu m]$ $[\mu m]$	1] [kgm <sup>-3</sup> ]
0.98 38 000 16 720 1.0 48 48 96	16

où

$$\boldsymbol{\rho} = \operatorname{diag}\left(\boldsymbol{\rho}_{\ell}^{T}, \, \boldsymbol{\rho}_{eq}^{I}, \, \boldsymbol{\rho}_{eq}^{I}\right). \tag{3}$$

le tenseur de densité effective fluide anisotrope transverse. Il fait intervenir la densité effective du modèle limp :

$$\rho_{\ell}^{T} = \rho_{eq}^{T} \left( 1 - \frac{\rho_{eq}^{T} (\gamma^{T})^{2}}{\rho_{s}^{T}} \right), \tag{3}$$

dans la direction transversale et celle du modèle de squelette rigide dans le plan d'isotropie  $\rho_{ea}^{I}$ .

On rappelle que la pression dans le fluide est donnée par [15]  $p = -K_{eq}\nabla \cdot \mathbf{u}^{w}$ . En la combinant avec (10), l'équation de conservation de la quantité de mouvement, on obtient

$$-\mathrm{i}\omega\rho\mathbf{v}^{w}=-\nabla p. \tag{3}$$

Cette équation reliant la pression à la vitesse  $\mathbf{v}^w = -i\omega \mathbf{u}^w$  est utile en particulier pour l'écriture des conditions aux limites. Finalement, il est possible de combiner ces deux équations pour obtenir une équation d'onde scalaire

$$\nabla \cdot (\tau \nabla p) + \frac{\omega^2}{K_{eq}} p = 0, \qquad (3)$$

où on a posé  $\tau = \rho^{-1}$ . Cette équation est similaire à [10, Chap. 6] ou [23, Eq. (4)] pour les matériaux à modèle limp. Dans le cas d'un matériau à squelette rigide, il suffit de prendre  $\rho = \text{diag } \rho_{eq}^k$ . L'intérêt ici est de combiner les deux modèles, limp et de squelette rigide, dont les comportements en basse fréquence sont très différents.

Quand le matériau n'est pas aligné suivant ses axes principaux, le tenseur de densité n'est plus diagonal. Par exemple si le matériaux est tourné d'un angle  $\theta$  par rapport à la direction T,  $\rho(\theta) = \mathbf{R}(\theta)^t \rho \mathbf{R}(\theta)$ . Le tenseur est toujours symétrique car les matrices de rotation sont orthogonales. Il en découle que les valeurs propres de  $\rho(\theta)$  sont  $\rho$  la densité suivant les directions principales.

#### **3** Résultats préliminaires

Des mesures ont été réalisées sur le banc d'essai présent à l'UTC, illustré Fig. 2, conçu en vue de la mesure de la matrice de diffusion multimodale d'un obstacle sans ou avec un écoulement de faible vitesse [25, 5]. La veine de mesure est rectangulaire ( $0.2 \text{ m} \times 0.1 \text{ m}$ ) et se termine par une terminaison anéchoïque à chaque extrémité.

Les mesures sont réalisées sans écoulement, dans la bande de fréquence [200 Hz - 3.5 kHz], où, au maximum, 10 modes sont propagatifs. La matrice de diffusion, qui contient les coefficients de réflexion et de transmission, est obtenue grâce à la méthode multisources [25].

Dans un premier temps des mesures d'absorption sont réalisées. Pour cela, la matrice de diffusion est mesurée en bouchant le conduit et en plaçant l'échantillon sur une paroi rigide. L'absorption est ensuite reconstruite en prenant en compte les contributions de chaque mode. Cette méthode a été préférée au tube à impédance classique, car elle permet

(2)



FIGURE 2 – Banc de mesure de la matrice de diffusion multimodale - 72 microphones pour une résolution de 10 modes [25].

d'utiliser des échantillons rectangulaires et de grande taille. Les paramètres acoustiques ont été mesurés au laboratoire de caractérisation des matériaux poreux du laboratoire Roberval à l'UTC et sont donnés dans le Tab. 1.

Les résultats sont donnés sur la Fig.3. Les fluctuations rapides sont associées aux fréquences de coupure du conduit. Deux épaisseurs de matériaux et deux orientations ont été mesurées. Pour  $\theta = 0$ , la direction transverse est alignée avec l'axe du conduit. Ce cas est similaire à l'emploi d'un modèle limp 1D. Pour la seconde,  $\theta = \pi/2$ , la direction transverse est perpendiculaire avec le l'axe du conduit. Ce cas est similaire à l'emploi d'un modèle à l'emploi d'un modèle de squelette rigide 1D.

Les comparaisons entre le modèle et les mesures sont bonnes pour les 4 configurations, ce qui valide le modèle scalaire (14). Les effets de l'anisotropie sont clairement visibles, en particulier en dessous de 1000 Hz.

#### 4 Conclusion

Dans ce travail, nous avons proposé une extension des modèles de fluide équivalent prenant en compte l'isotropie transverse dans les matériaux poreux. Dans le cas spécifique des laines pour lesquelles les propriétés mécaniques et acoustiques sont très différentes dans le plan de dépôt des fibres et suivant la direction normale, le modèle proposé permet, suivant l'orientation des fibres de combiner les deux modèles : limp et de squelette rigide. Des confrontations avec des mesures en absorption ont permis de valider notre approche, en particulier le modèle scalaire donnée par l'équation de propagation (14).

Dans ce travail, seule la résistance au passage de l'air pu être mesurée suivant les 2 directions. Les effets sur la longueur caractéristique visqueuse sont en cours d'investigation. De mesures sont en cours pour illustrer les effets du couplage entre les directions.

#### Remerciements

Ce travail a été en partie réalisé dans le cadre du projet ANR METAUDIBLE No. ANR-13-BS09-0003-01 financé conjointement par l'ANR et la FRAE.



FIGURE 3 – Orientation des fibres (a) et coefficient d'absorption pour 5 cm (b) et 10 cm (c) de laine. En noir,  $\theta = 0$ , *i.e.* la direction transverse *T* est alignée avec l'axe du conduit. En bleu,  $\theta = \pi/2$ , la direction transverse est perpendiculaire à l'axe du conduit.

## A Modèle de Johnson-Champoux-Allard

Les matériaux poreux à squelette rigide sont bien décrits par le modèle de fluide équivalent de Johnson-Champoux-Allard [1, Chap. 5]. La tortuosité dynamique s'écrit ( $e^{-i\omega t}$ ) suivant la direction *k* 

$$\alpha^{k} = \alpha_{\infty}^{k} \left( 1 + \frac{\mathrm{i}\phi\sigma^{k}}{\alpha_{\infty}^{k}\rho_{f}\omega} G_{J}^{k}(\omega) \right)$$
(3)

et le module d'incompressibilité,

$$K_{eq} = \frac{\gamma P_0/\phi}{\gamma - (\gamma - 1) \left[1 + i\frac{8\eta}{\Lambda'^2 \operatorname{Pr}\omega\rho_f} \left(1 - i\rho_f \frac{\omega \operatorname{Pr}\Lambda'^2}{16\eta}\right)^{1/2}\right]^{-1}}.$$
 (3)

Ici,  $G_J^k(\omega) = \sqrt{1 - \frac{4i\alpha_{\omega}^2 \eta \rho_f \omega}{(\sigma^k \Lambda^k \phi)^2}}$ ,  $\phi$  la porosité,  $\sigma^k$  la résistance au passage de l'air dans la direction k,  $\Lambda^k$  la longueur caractéristique visqueuse dans la direction k,  $\Lambda'$  la longueur caractéristique thermique,  $\alpha_{\infty}^{k}$  est la limite haute fréquence de la tortuosité dans la direction k.

Il est important de noter que la porosité et la longueur caractéristique thermique restent isotropes [17] car leur définition n'implique pas de paramètres dépendant de l'orientation. Par ailleurs, on note  $\gamma$ , le rapport des chaleurs spécifiques,  $P_0$  la pression atmosphérique, Pr, le nombre de Prandtl et  $\eta$  est la viscosité dynamique.

#### Références

- J.-F. Allard and N. Atalla. Propagation of Sound in Porous Media : Modeling Sound Absorbing Materials (second edition), page 372pp. John Wiley & Sons, Chichester, 2009.
- [2] J.F. Allard, R. Bourdier, and A. L'Esperance. Anisotropy effect in glass wool on normal impedance in oblique incidence. J. Sound Vib., 114(2):233 – 238, 1987.
- [3] K. Attenborough. The prediction of oblique-incidence behaviour of fibrous absorbents. J. Sound Vib., 14(2):183-191, 1971.
- [4] L. L. Beranek. Acoustical properties of homogeneous, isotropic rigid tiles and flexible blankets. J. Acoust. Soc. Am., 19(4):556–568, 1947.
- [5] R. Binois, E. Perrey-Debain, N. Dauchez, B. Nennig, J.-M. Ville, and G. Beillard. On the efficiency of parallel baffle-type silencers in rectangular ducts : prediction and measurement. *Acta Acust. United Ac.*, 101 :520–530, 2015.
- [6] M. A. Biot. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. low-frequency range. II. higher frequency range. J. Acoust. Soc. Am., 28(2):168–191, 1956.
- [7] M. A. Biot. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media. *Journal of applied physics*, 33(4):1482–1498, 1962.
- [8] J. Cuenca, C. Van der Kelen, and P. Göransson. A general methodology for inverse estimation of the elastic and anelastic properties of anisotropic opencell porous materials—with application to a melamine foam. *Journal of Applied Physics*, 115(8):-, 2014.
- [9] O. Dazel, B. Brouard, C. Depollier, and S. Griffiths. An alternative Biot's displacement formulation for porous materials. J. Acoust. Soc. Am., 121(6) :3509–3516, 2007.
- [10] A. T. De Hoop. Handbook of Radiation and Scattering of Waves (second edition), page 1083pp. Academic Press, London, 1995.
- [11] O. Doutres, N. Dauchez, J.-M. Génevaux, and O. Dazel. Validity of the limp model for porous materials : a criterion based on the Biot theory. J. Acoust. Soc. Am., 122(4):2038–2048, 2007.

- [12] G. Gautier, L. Kelders, J. P. Groby, O. Dazel, L. De Ryck, and P. Leclaire. Propagation of acoustic waves in a one-dimensional macroscopically inhomogeneous poroelastic material. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 130(3):1390–1398, 2011.
- [13] A. Geslain, J. P. Groby, O. Dazel, S. Mahasaranon, K. V. Horoshenkov, and A. Khan. An application of the Peano series expansion to predict sound propagation in materials with continuous pore stratification. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 132(1):208–215, 2012.
- [14] D. L. Johnson. Equivalence between fourth sound in liquid He II at low temperatures and the Biot slow wave in consolidated porous media. *Appl. Phys. Lett.*, 37(12):1065–1067, 1980.
- [15] P. Khurana, L. Boeckx, W. Lauriks, P. Leclaire, O. Dazel, and J. F. Allard. A description of transversely isotropic sound absorbing porous materials by transfer matrices. J. Acoust. Soc. Am., 125(2):915–921, 2009.
- [16] A. J. Leggett. A theoretical description of the new phases of liquid <sup>3</sup>He. *Rev. Mod. Phys.*, 47 :331–414, Apr 1975.
- [17] M. Melon, E. Mariez, C. Ayrault, and S. Sahraoui. Acoustical and mechanical characterization of anisotropic open-cell foams. J. Acoust. Soc. Am., 104(5):2622–2627, 1998.
- [18] R. Panneton. Comments on the limp frame equivalent fluid model for porous media. J. Acoust. Soc. Am., 122(6):EL217–EL222, 2007.
- [19] J.S. Pyett. The acoustic impedance of a porous layer at oblique incidence. *Acustica*, 3(6):375–382, 1953.
- [20] Michael Schoenberg and P. N. Sen. Properties of a periodically stratified acoustic half-space and its relation to a Biot fluid. J. Acoust. Soc. Am., 73(1):61– 67, 1983.
- [21] V. Tarnow. Airflow resistivity of models of fibrous acoustic materials. J. Acoust. Soc. Am., 100(6):3706– 3713, 1996.
- [22] V. Tarnow. Measured anisotropic air flow resistivity and sound attenuation of glass wool. J. Acoust. Soc. Am., 111(6):2735–2739, 2002.
- [23] D. Torrent and J. Sánchez-Dehesa. Anisotropic mass density by two-dimensional acoustic metamaterials. *New J. Phys.*, 10(2):023004, Feb 2008.
- [24] Daniel Torrent and José Sánchez-Dehesa. Sound scattering by anisotropic metafluids based on twodimensional sonic crystals. *Phys. Rev. B*, 79 :174104, May 2009.
- [25] H. Trabelsi, N. Zerbib, J.-M. Ville, and F. Foucart. Passive and active acoustic properties of a diaphragm at low mach number. *Eur. J. Comp. Mech.*, 20(1-4) :49– 71, 2011.

- [26] J. Tran-Van. Etude de l'influence de l'isotropie transverse dans les laines minérales sur la transmission acoustique des parois multicouches (influence of transverse isotropy in mineral wool on acoustic transmission through multilayer panels). PhD thesis, Université de Poitiers, 2004.
- [27] C. Van der Kelen, J. Cuenca, and P. Göransson. A method for characterisation of the static elastic properties of the porous frame of orthotropic open-cell foams. *International Journal of Engineering Science*, 86(0):44 – 59, 2015.
- [28] C. Van der Kelen and P. Göransson. Identification of the full anisotropic flow resistivity tensor for multiple glass wool and melamine foam samples. J. Acoust. Soc. Am., 134(6):4659–4669, 2013.