

# CFA/VISHNO 2016

## **Modélisation par Matrice de Transfert de Cristaux Soniques pour le Problème de Transmission**

P. Bouche et R. Panneton

Groupe d'Acoustique de l'Université de Sherbrooke (GAUS), 2500 Boulevard de  
l'Université, Sherbrooke, Canada J1K 2R1  
patrick.bouche@usherbrooke.ca



LE MANS

Partie intégrante des méta-matériaux, les cristaux soniques sont des matériaux générés par l'homme et pouvant être décrits comme un arrangement périodique d'éléments solides dans un milieu fluide. Ce type de matériau s'avère intéressant pour isoler acoustiquement, dans une bande de fréquences donnée, un milieu récepteur d'un milieu émetteur, sans utiliser une cloison imperméable ou peu perméable. Dans ce travail, on propose un modèle de calcul analytique des performances acoustiques d'un cristal sonique basé sur la méthode des matrices de transfert à laquelle on apporte des corrections empiriques obtenues à l'aide de simulations numériques. Le cristal sonique est, en première approximation, modélisé comme une succession de réductions et d'extensions qui permettent de faire apparaître le phénomène de diffraction acoustique qui génère une bande interdite de transmission. La correction empirique de la tortuosité du milieu fluide entourant le cristal sonique et de la taille effective de sa phase solide permet, en deuxième et troisième approximation, de tenir compte de la taille apparente de la cellule élémentaire du cristal sonique vis-à-vis de la zone de fréquence d'étude. Cette correction permet un recalage précis de la fréquence centrale et de l'amplitude de la bande interdite.

## 1 Introduction

Le bruit et la pollution sonore sont un problème majeur dans notre société moderne industrialisée à cause de l'énorme impact qu'ils génèrent sur la santé et la productivité des personnes. De nombreux scientifiques essaient jour après jour de modéliser, créer et développer de nouvelles barrières soniques pour améliorer le confort de la population. Afin de franchir un nouveau niveau de performance, de nouveaux matériaux sont développés en se basant sur le concept des méta-matériaux. Conçu par les hommes pour être par définition plus performant que des matériaux naturels, ce type de matériaux peut être caractérisé par un arrangement périodique ou non d'éléments de formes et de dimensions particulières générant des bandes interdites de transmission. Leurs performances sont liées à la géométrie et l'orientation spécifique de chacun des éléments les constituants. La création de bandes interdites de propagation semble assurer un bel avenir à cette catégorie de matériaux au vu des applications possibles.

À l'heure actuelle, les chercheurs ont plutôt recours à des méthodes de résolution numériques pour étudier et prédire le comportement et les performances des Cristaux Soniques. Le temps de mise en place et de calcul nécessaire de cette technique sont en partie à l'origine de ce développement. Le but de cet article est de présenter un modèle analytique développé pour prédire les propriétés acoustiques des cristaux soniques. Basé sur la méthode des matrices de transfert, le caractère non conventionnel de cette catégorie de matériaux impose l'ajout de deux corrections empiriques explicitées plus bas. Cette correction est inspirée de travaux précédents concernant la modélisation de plaques perforées de faible porosité [1], des chambres d'expansions ou de fluides équivalents [2, 3].

## 2 Théorie

### 2.1 Cristaux Soniques (SC)

S'appuyant sur une analogie de la cristallographie, un cristal sonique est définie comme la répétition périodique d'un motif de base selon une ou plusieurs directions orthogonales deux à deux. Dans le cas de cet article nous nous concentrerons sur un modèle 2D ou des cylindres parallèles disposés en carré comme présenté dans la figure 1. Les propriétés acoustiques sont commandées par la composition du motif de base et les paramètres de répétition.

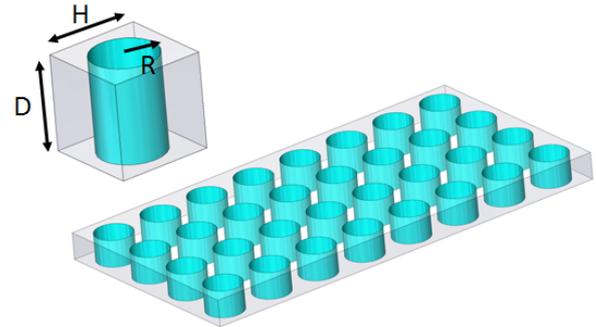


FIGURE 1 – Description des cristaux soniques 2D étudiés.

La réduction de bruit généré par un cristal sonique est liée au mécanisme de diffraction de Bragg qui bloque ou disperse une partie des ondes acoustiques voulant passer à travers, cela en fonction de leurs fréquences respectives. Les interférences destructrices créées au sein du cristal génèrent des bandes de fréquences où la propagation des ondes est bloquée ou réduite dans une ou plusieurs directions. On parle ainsi de bande interdite. Dans ce cas précis, la fréquence centrale de cette bande est donnée par l'équation 1.

$$f = \frac{c_0}{2H} \quad (1)$$

où  $c_0$  est la vitesse du son adiabatique dans l'air et  $H$  la taille caractéristique de la cellule élémentaire.

La largeur et l'amplitude de la bande de réduction de transmission acoustique sont dépendantes du nombre de répétitions le long de la direction de propagation et des caractéristiques du motif de base tel que le facteur de remplissage défini comme étant le ratio de volume solide sur le volume total.

### 2.2 Méthode des Matrices de Transfert (TMM)

La Méthode des Matrices de Transfert est une technique analytique robuste de prédiction des coefficients d'absorption et de transmission d'un matériau donné. Elle est principalement utilisée pour prédire le comportement de matériau homogène pouvant être assemblé en série. Considérant une  $i^{\text{ème}}$  section fluide homogène d'épaisseur  $h_i$  avec pour propriétés  $k$  et  $Z$  respectivement le nombre d'ondes et l'impédance caractéristique entourant le cristal sonique, la matrice de transfert est généralement définie comme :

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ U_1 \end{Bmatrix} = T_i \begin{Bmatrix} P_2 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{i,11} & T_{i,12} \\ T_{i,21} & T_{i,22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_2 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(kh_i) & jZ \sin(kh_i) \\ j\frac{1}{Z} \sin(kh_i) & \cos(kh_i) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_2 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

où  $P_1$  et  $U_1$  sont respectivement la pression et la vitesse acoustique en amont et  $P_2$  et  $U_2$  en aval.

Le coefficient d'absorption en fond rigide et l'indice d'affaiblissement sonore en incidence normale sont alors calculés à partir des coefficients de la matrice de transfert de la façon suivante :

$$\alpha = 1 - \left| \frac{T_{11} - T_{21}\rho_0 c_0}{T_{11} + T_{21}\rho_0 c_0} \right|^2 \quad (4)$$

$$NSTL = 20 \log_{10} \left( \frac{1}{2} \left| T_{11} + T_{22} + \frac{T_{12}}{\rho_0 c_0} + T_{21}\rho_0 c_0 \right| \right) \quad (5)$$

où  $\rho_0$  est la masse volumique de l'air.

### 2.3 Méthode des Matrices de Transfert avec Réduction et Expansion de section (RETMM)

La méthode des matrices de transfert appliquée aux matériaux poreux suppose par défaut une homogénéisation du matériau étudié et une absence de diffraction des ondes. La dimension caractéristique du matériau doit être bien inférieure à la longueur d'onde d'étude et cela de plusieurs échelles. Dans notre cas, la dimension caractéristique du cristal sonore est spécifiquement du même ordre de grandeur que la longueur d'onde de la bande interdite de transmission générée par la diffraction de Bragg. L'hypothèse d'homogénéisation n'étant pas respectée, il est nécessaire de tenir compte de la géométrie du cristal sonore.

Pour modéliser analytiquement un cristal sonore, il faut inclure les phénomènes de réduction et d'expansion de section dus à la présence du ou des éléments solides constituant le cristal sonore. On introduit donc la Méthode des Matrices de Transfert avec Réduction et Expansion de section (RETMM) défini pour un changement de section donné par :

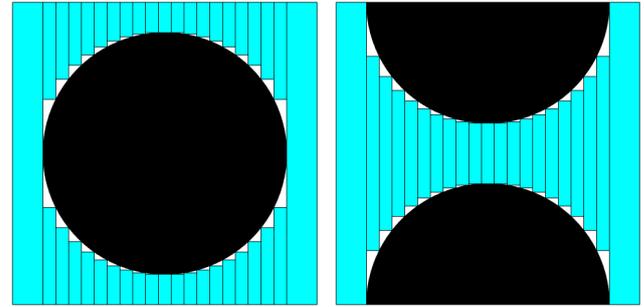
$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & RC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(kh) & jZ \sin(kh) \\ j\frac{1}{Z} \sin(kh) & \cos(kh) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{RC} \end{bmatrix} \quad (6)$$

avec  $RC$  le ratio de la surface étudié sur la surface de référence. Celui-ci sera donc inférieur à 1 dans le cas d'une réduction et supérieur à 1 dans le cas d'une expansion.

Le cristal sonore 2D étudié est donc modélisé comme une succession de changements de section avec pour chacune un ratio  $RC_i$  donné.

$$T_{SC} = \prod_{i=1}^N \begin{bmatrix} \cos(kh_i) & j\frac{Z}{RC_i} \sin(kh_i) \\ j\frac{RC_i}{Z} \sin(kh_i) & \cos(kh_i) \end{bmatrix} \quad (7)$$

Le nombre de subdivisions doit être suffisamment important pour reproduire au mieux la forme du cristal sonore. Celui-ci peut être déterminé par une étude de convergence. Notre étude nous a conduit à utiliser 200 sections pour l'ensemble des calculs analytiques présentés ici.



(a) Cellule unitaire du cristal sonore (b) Succession de changements de sections

FIGURE 2 – Exemple de modélisation par RETMM des cristaux soniques 2D étudiés sous deux angles de vue.

## 3 Matériels et Méthodes

Les simulations numériques et analytiques sont menées sur un large échantillon de configuration. L'ensemble des valeurs utilisées sont présentées dans le tableau suivant.

TABLEAU 1 – Paramètres du cristal sonore utilisés pour cette étude

Hauteur	H	12.7 25.4 38.1 50.8 76.2	mm
Ratio	R/H	0.15 0.2 0.25 0.3 0.35 0.4 0.45	
Couche	n	2 3 5 7 10	

La solution numérique est réalisée à l'aide du logiciel COMSOL en modélisant la phase fluide du solide et en évaluant son indice d'affaiblissement lorsque soumise à une onde plane d'amplitude 1 suivant le schéma défini à la figure 3.

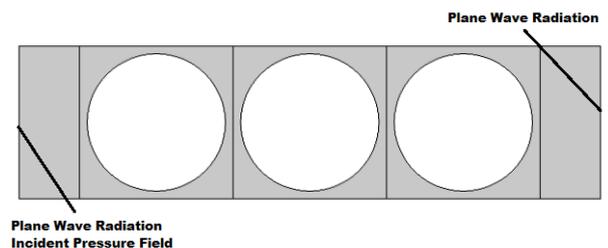


FIGURE 3 – Modélisation par FEM des cristaux soniques 2D étudiés pour un cristal sonore de 3 couches.

## 4 Résultats et Discussions

### 4.1 Comparaisons entre RETMM et FEM

La simulation analytique (RETMM) est comparée à la simulation numérique (FEM) en modélisant un cristal sonore dont la cellule unitaire carrée mesure  $H = 25.4\text{mm}$  de côté et possédant un cercle en son centre de rayons  $R = 0.3H$  (marqueurs ronds) et  $R = 0.4H$  (marqueurs diamants) ou son équivalent présenté à la figure 2. Les

figures 4 et 5 présentent les pertes par transmission (en dB) obtenues avec la méthode analytique (trait en pointillés) et numérique (trait continu) pour respectivement 2 et 3 couches.

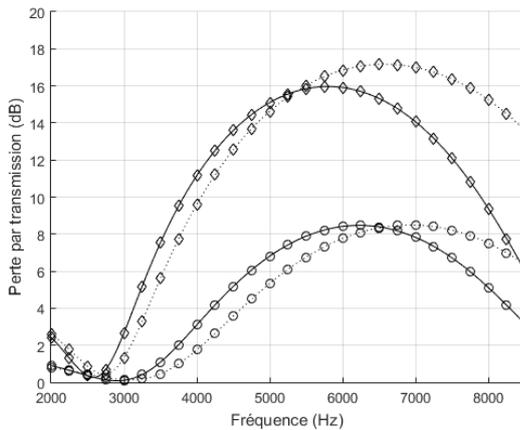


FIGURE 4 – Pertes par transmission obtenues via la méthode analytique (trait en pointillé) et numérique (trait continu) pour 2 couches avec  $H = 25.4mm$ ,  $R = 0.3H$  (marqueurs ronds) et  $0.4H$  (marqueurs diamants).

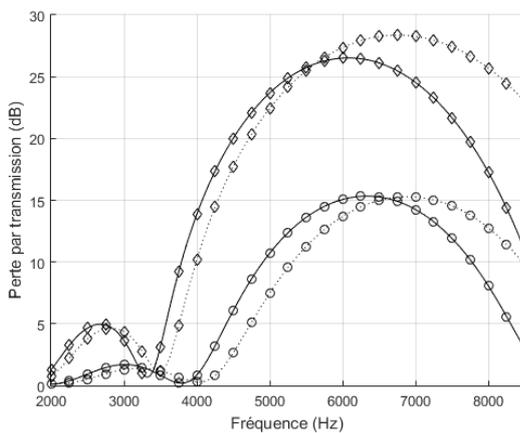


FIGURE 5 – Pertes par transmission obtenues via la méthode analytique (trait en pointillé) et numérique (trait continu) pour 3 couches avec  $H = 25.4mm$ ,  $R = 0.3H$  (marqueurs ronds) et  $0.4H$  (marqueurs diamants).

Les premières simulations analytiques nous permettent de mettre en avant le fait que la méthode des matrices de transfert avec inclusions de réduction et expansion est capable de tenir compte des effets de diffraction du cristal sonore. Cependant les valeurs de perte par transmission obtenues pour le cristal sonore donné semblent montrer un grand écart de performance entre les deux méthodes. Les résultats sont de forme similaire mais on observe un écart aussi bien en amplitude qu'en positionnement fréquentiel.

En supposant que la solution numérique est exacte, la variation en fréquence observée au niveau de la solution analytique semble être due au fait que la tortuosité générée par la configuration du cristal n'est pas implicitement prise en compte par la discrétisation analytique. Une modification de la valeur de la tortuosité utilisée dans le modèle analytique permet facilement de faire coïncider dans chaque cas les 2 courbes de perte par transmission en fréquence sans toutefois

réduire l'écart en amplitude comme le montre la figure 6 en appliquant une tortuosité  $\alpha = 1.2$  au lieu de 1.

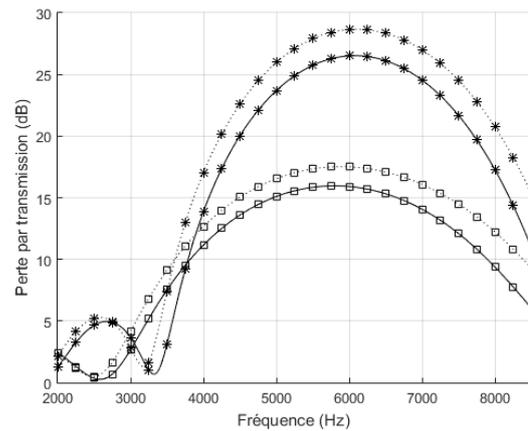


FIGURE 6 – Pertes par transmission obtenues via la méthode analytique avec correction de la tortuosité (trait en pointillé) et numérique (trait continu) avec  $H = 25.4mm$ ,  $0.4H$  pour 2 (marqueurs carrés) et 3 couches (marqueurs étoiles).

## 4.2 Adimensionnalité des effets des Cristaux Soniques

Les résultats de plusieurs configurations avec les deux méthodes permettent de mettre en évidence une autre caractéristique particulière propre aux cristaux soniques. L'étude du cristal sonore 2D pour différentes valeurs de largeurs de cellule et de tailles de rayon en son centre a permis de mettre en évidence une similitude observable au niveau des figures 7 et 8.

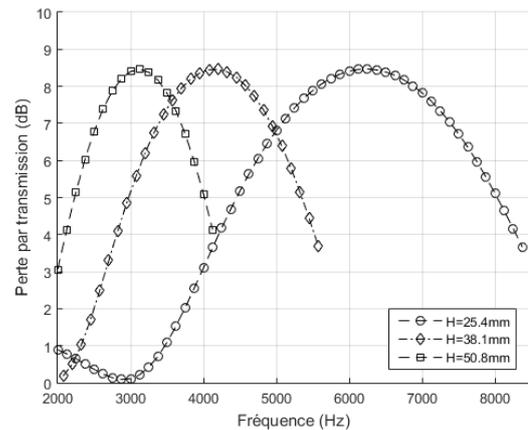


FIGURE 7 – Pertes par transmission obtenues pour 3 cristaux soniques de largeurs  $H$  différentes mais avec un même ratio rayon( $R$ )/largeur( $H$ ).

La figure 7 nous permet d'observer que pour un ratio rayon( $R$ )/largeur( $H$ ) de cellule unitaire identique, les résultats des simulations numériques sont de forme grandement similaire pour différentes largeurs de cellule mais proportionnellement décalés en fréquence. Une nouvelle échelle adimensionnelle est générée pour l'étude en utilisant l'équation 8.

$$kH = \frac{2\pi fH}{c} \quad (8)$$

L'affichage de ces valeurs de perte par transmission de la figure 7 en fonction de cette nouvelle échelle est présenté au niveau de la figure 8. Celle-ci met en évidence une superposition quasi-parfaite des 3 courbes de données. La similarité des valeurs numériques semble ainsi démontrer que la taille globale de la cellule élémentaire n'a pas d'influence sur l'amplitude de la perte par transmission. Ainsi pour un ratio rayon(R)/largeur(H), la modification de la taille de cette cellule n'entraîne donc qu'un décalage proportionnel en fréquence des performances en transmission.

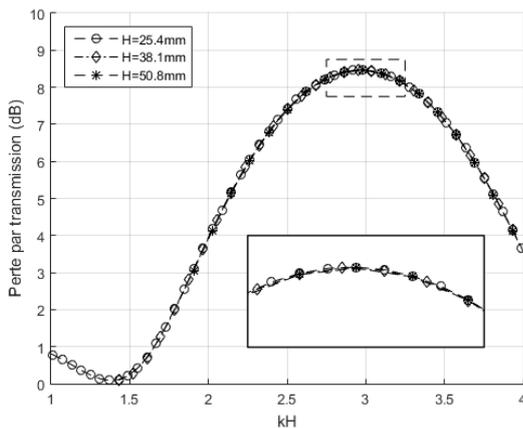


FIGURE 8 – Pertes par transmission obtenues à la figure 7 avec changement d'échelle.

### 4.3 Effet de la taille transversale des Cristaux Soniques

La méthode analytique (TMM) est normalement utilisée pour caractériser des matériaux dits homogènes. Autrement dit des matériaux dont la taille caractéristique est bien moins grande que la longueur d'onde minimale, inversement proportionnelle à la fréquence maximale, à laquelle on souhaite l'étudier. Or dans notre cas, la dimension caractéristique transversale du cristal sonore est du même ordre de grandeur que la longueur d'onde minimale. De plus on suppose normalement, avec cette méthode, la propagation d'ondes planes dans une seule direction du fait de la décomposition modale ce qui ne sera pas le cas avec les cristaux soniques en réalité.

Le modèle numérique est donc utilisé pour évaluer des cristaux soniques dont on réduit la taille transversale en appliquant un ratio B de réduction afin d'homogénéiser le cristal sonore et réduire la génération d'ondes planes dans d'autres directions. Le ratio entre phase solide et fluide est donc conservé pour toute section transversale du cristal. La modélisation numérique nous permet de voir l'effet, présenté dans les figures suivantes, de la taille transversale sur les performances du cristal sonore en transmission.

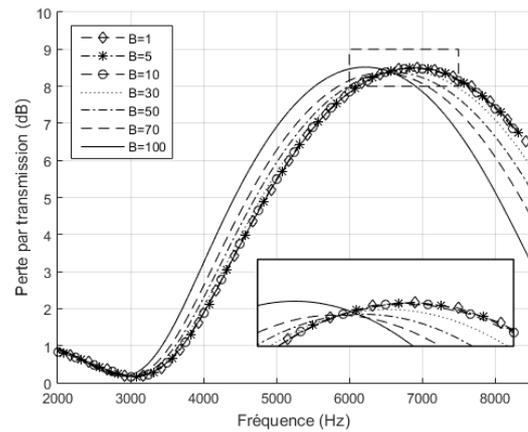


FIGURE 9 – Pertes par transmission observées en faisant varier la taille transversale du cristal sonore ( $H = 25.4mm$ ,  $R = 0.3H$  et  $n = 2$ ) via un ratio de réduction B.

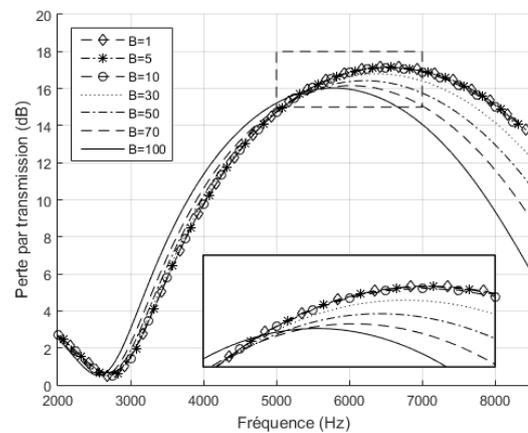


FIGURE 10 – Pertes par transmission observées en faisant varier la taille transversale du cristal sonore ( $H = 25.4mm$ ,  $R = 0.4H$  et  $n = 2$ ) via un ratio de réduction B.

Les figures 9 et 10 nous montrent une variation en amplitude et en fréquence de la réponse en transmission en fonction du facteur de réduction transversale B. La comparaison avec les figures de la sous-section 4.1 met en évidence la convergence des résultats numériques vers les résultats analytiques à mesure que le ratio B diminue. Lorsque le ratio est très faible, on retrouve les résultats des simulations numériques et cela sans avoir besoin de modifier la tortuosité.

La différence d'amplitude semble mettre en avant le fait que l'onde acoustique ne voit pas le cristal sonore de la même façon comme si le rayon effectif du cercle solide du cristal devait varier en fonction de la taille transversale du cristal sonore, celui-ci ayant un effet direct sur l'amplitude de la perte par transmission. La différence d'amplitude doit provenir de l'augmentation du phénomène de diffusivité des ondes acoustiques planes frappant le cristal sonore liée à celle du ratio B. Cet effet généré par la taille transversale importante de la cellule unitaire du cristal sonore a pour conséquence de modifier l'amplitude de la perte par transmission. L'effet généré fait penser que l'onde acoustique voit un cristal sonore avec un ratio rayon(R)/largeur(H) différent.

## 5 Méthode analytique avec corrections empiriques

Les résultats de la section 4 montrent que pour faire tendre les résultats du modèle analytique sur ceux du modèle numérique, il soit nécessaire de modifier la tortuosité de la phase fluide du modèle et la valeur du rayon effectif du cœur de la cellule élémentaire du cristal. Une méthode de calcul des deux paramètres est donc mise au point pour palier à ce problème avec  $\alpha_{eff}$  la tortuosité effective et  $C_{eff}$  le coefficient de correction du rayon effectif, c'est-à-dire  $R_{eff} = C_{eff}R_{init}$ .

La seule modification de la tortuosité ayant aussi une influence sur l'amplitude de la réponse. Dénotant une sorte de couplage entre les deux paramètres, il s'avère nécessaire de déterminer les deux valeurs en même temps. La méthode de calcul se base sur l'application de la technique de recuit simulé, présenté à la figure 12, à cause de la complexité du calcul et du couplage entre les effets des deux paramètres. La détermination de ces deux paramètres se fait en cherchant à minimiser une fonction objectif basée sur le calcul de l'écart entre les deux courbes.

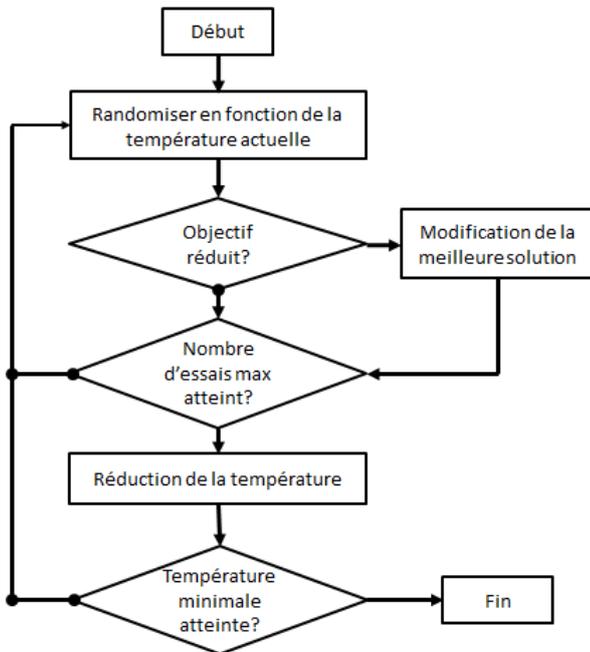


FIGURE 11 – Schéma descriptif de la technique de recuit simulé.

La technique d'optimisation a été utilisée sur un très grand nombre de combinaisons suivant les valeurs du tableau 1. Les combinaisons résultantes semblent seulement dépendre du ratio  $R/H$ . Ceci est en accord avec la sous-section 4.2 présentant l'adimensionalité des cristaux soniques. Peu importe la taille de la cellule et le nombre de couches, les corrections tendent vers les mêmes valeurs présentées dans la figure 12.

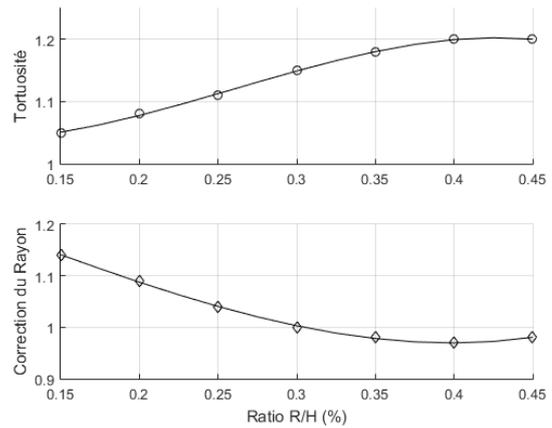


FIGURE 12 – Évolution des doublets de corrections en fonction du ratio rayon(R)/hauteur(H).

Deux équations (9 et 10) sont obtenues à l'aide des doublets de correction empirique calculée. La figure 13 nous permet d'en voir l'efficacité en comparant les résultats entre FEM et RETMM corrigé.

$$\alpha_{eff} = -8.889 \left(\frac{R}{H}\right)^3 + 6.952 \left(\frac{R}{H}\right)^2 - 1.073 \left(\frac{R}{H}\right) + 1.085 \quad (9)$$

$$C_{eff} = 4.445 \left(\frac{R}{H}\right)^3 - 1.429 \left(\frac{R}{H}\right)^2 - 0.978 \left(\frac{R}{H}\right) + 1.305 \quad (10)$$

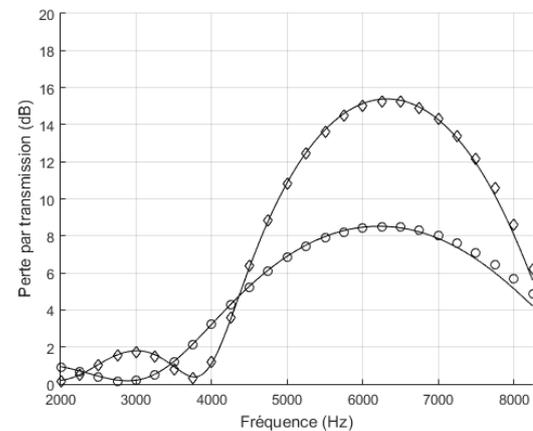


FIGURE 13 – Superposition des pertes par transmission obtenues via la méthode numérique (courbes continues) et analytique avec corrections (courbes de marqueurs) pour 2 cristaux soniques avec  $H = 25.4mm$ ,  $R = 0.3H$  (ronds) ou  $0.4H$  (diamants) et  $N = 2$ .

## 6 Conclusion

On démontre ainsi, à travers cet article, la possibilité de modéliser analytiquement un cristal sonique par TMM avec l'ajout de corrections.

La méthode des matrices de transfert avec réduction et ou expansion ne permet normalement pas de prédire les performances acoustiques de matériaux dont la dimension caractéristique est du même ordre de grandeur que la longueur d'onde minimale d'étude. On présente cependant,

dans cet article, une étude empirico-numérique permettant le développement d'une double correction : (1) une expression de la tortuosité effective du fluide entourant le cristal sonore pour prédire correctement ses performances en fonction de la fréquence, (2) une expression de la correction du rayon effectif de la phase solide de la cellule unitaire du cristal sonore pour prédire correctement l'amplitude de ses performances acoustiques.

## Références

- [1] N. Atalla F. Sgard, Modeling of perforated plates and screens using rigid frame porous models, *Journal of Sound and Vibration* **303**, 195-208 (2007).
- [2] M. L. Munjal, *Acoustics of Ducts and Mufflers With Application to Exhaust and Ventilation System Design*, John Wiley & Sons, New York (1987).
- [3] N. K. Vijayasree M. L. Munjal, On an Integrated Transfer Matrix method for multiply connected mufflers, *Journal of Sound and Vibration* **331**, 1926-1932 (2012).