

CFA/VISHNO 2016

**Effet des non linéarités géométriques sur l'amortissement
par effet trou noir**V. Denis^a, A. Pelat^b, F. Gautier^b et C. Touzé^c^aLAUM, Av. Olivier Messiaen, 72085 Le Mans Cedex 09, France^bLAUM / ENSIM, Rue Aristote, 72000 Le Mans, France^cIMSIA, ENSTA ParisTech-CNRS-EDF-CEA, Université Paris Saclay, 828 Boulevard
des maréchaux, 91762 Palaiseau Cedex, France

vivien.denis@univ-lemans.fr



LE MANS

L'effet Trou Noir Acoustique (TN) est une technique passive d'amortissement de vibrations sans ajout de masse fondée sur les propriétés des ondes de flexion dans des structures minces d'épaisseur variable. La mise en œuvre habituelle consiste en une plaque avec une extrémité profilée selon une loi exponentielle, recouverte d'un film viscoélastique. L'inhomogénéité de la structure conduit à une baisse de la célérité et une augmentation de l'amplitude des ondes de flexion, ce qui a pour conséquence une dissipation d'énergie efficace quand un film amortissant est placé dans la zone de faible épaisseur. L'amplitude des ondes à l'extrémité peut facilement atteindre l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la plaque, ce qui est une source de non-linéarités géométriques. Ces non-linéarités peuvent avoir pour conséquences des couplages entre les modes de vibration de la structure, et induire un transfert d'énergie des basses fréquences vers les hautes fréquences. Ce phénomène de transfert d'énergie peut être exploité pour augmenter l'efficacité du traitement dans le domaine des basses fréquences pour lequel le trou noir est peu efficace. Une expérience montre que la terminaison TN se comporte de manière non-linéaire et permet un couplage entre modes. Un régime fortement non-linéaire peut également être observé, qui est associé au phénomène de turbulence d'ondes. Une modélisation d'une poutre TN comme une plaque de von Kármán d'épaisseur variable et une résolution du problème par une méthode modale permet de confirmer les effets observés dans l'expérience et d'analyser plus finement ces résultats.

1 Introduction

L'amortissement des vibrations est un enjeu important dans de nombreuses applications industrielles. Les méthodes classiques utilisées pour réduire ces vibrations consistent par exemple à couvrir la structure avec des matériaux viscoélastiques lourds. L'efficacité de ces méthodes est démontrée mais elles donnent lieu à un ajout de masse important qui peut être rédhibitoire dans l'industrie des transports par exemple. Le développement de méthodes d'amortissement de vibration sans ajout de masse devient alors nécessaire.

Une de ces méthodes consiste à tirer partie de l'effet "Trou Noir Acoustique" (TN) [1, 2]. Tel que décrit par Mironov [3], cet effet tire partie des propriétés des ondes de flexion dans une plaque d'épaisseur inhomogène. On peut montrer que les ondes se propageant dans un profil d'épaisseur $h(x)$

$$h(x) = \epsilon x^m, \quad m \geq 2, \quad (1)$$

ralentissent sans être réfléchies et que leur temps de vol dans le profil tend vers l'infini si l'épaisseur tend vers zéro. L'épaisseur résiduelle dans un profil "Trou Noir" expérimental est toutefois trop grande pour obtenir un tel effet mais cela peut être compensé par l'ajout d'un film viscoélastique mince [1]. Le coefficient de réflexion de l'extrémité est alors considérablement réduit. D'autres travaux théoriques proposent un modèle plus raffiné pour le coefficient de réflexion [2] et mettent en évidence une augmentation du recouvrement modal [4]. Des mises en évidence expérimentales de l'effet sont également nombreuses [5, 6, 7].

L'épaisseur minimale de l'extrémité TN nécessaire pour obtenir un amortissement conséquent est faible (quelques dizaines de microns) et les amplitudes de déplacement de l'extrémité deviennent grandes devant l'épaisseur. Cela pose la question de la linéarité de la réponse de la structure. Cet article se propose de mettre en évidence le caractère non-linéaire d'une poutre munie d'une extrémité TN et montrer que les non-linéarités géométriques ont une influence sur le caractère amortissant du TN. La première partie est une observation expérimentale d'une poutre TN. La seconde partie propose un modèle numérique pour simuler la réponse d'une poutre TN dans un régime non-linéaire. Enfin, les résultats du modèles sont présentés dans la troisième partie.

2 Expérience

2.1 Montage expérimental

L'étude expérimentale porte sur deux poutres en aluminium : l'une est uniforme de dimensions 1.3 m \times 20 mm \times 5 mm, l'autre est de dimensions 1.5 m \times 20 mm \times 5 mm et munie d'une extrémité Trou Noir de longueur 0.3 m ; l'épaisseur de cette extrémité décroît de manière quadratique jusqu'à atteindre 50 μ m environ. Un film amortissant mince est collé sur l'extrémité TN (voir Figure 1).

Le montage expérimental est constitué d'un pot vibrant (LDS V201), d'un amplificateur (LDS PA25E), d'un capteur de force (PCB 208C03), d'un accéléromètre (PCB 352C29) et d'une carte d'acquisition (NI-USB4431). Le pilotage s'effectue à l'aide d'une interface Labview et les résultats sont exportés et traités sous MATLAB. La poutre mesurée est suspendue verticalement et excitée en son milieu par le pot vibrant. L'accéléromètre est placé arbitrairement sur la poutre mesurée.



FIGURE 1 – Extrémité de la poutre TN. La région d'épaisseur variable mesure 35 cm.

2.2 Réponses à une excitation d'amplitude croissante

La poutre est excitée par un signal sinusoïdal d'amplitude linéairement croissante sur une durée de 40 s. Les résultats sont tracés sur la figure 2 sous forme de spectrogrammes pour la fréquence d'excitation $f=83$ Hz et une force d'excitation maximale de 15 N.

Le spectre de la poutre uniforme est principalement composé de la raie d'excitation à 83 Hz. On peut également remarquer la présence de l'harmonique 2, qui est probablement due à l'un des éléments du montage, et quelques artefacts d'amplitude négligeable. Ce spectre est typique d'une structure répondant linéairement. Le spectre

de la poutre TN s'enrichit rapidement avec l'augmentation de la force d'excitation et est constitué d'un grand nombre d'harmonique de la fréquence d'excitation. La réponse de la poutre TN est donc clairement non-linéaire. Des résultats similaires sont obtenus avec des fréquences d'excitation différentes.

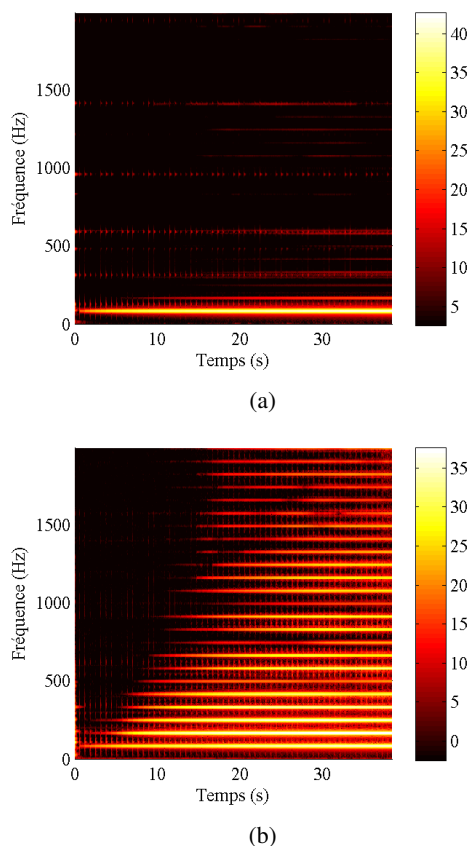


FIGURE 2 – Spectrogrammes d'accélération en dB (ref. 1 m.s^{-2}), en réponse à excitation de fréquence 83 Hz pour (a) la poutre uniforme et (b) la poutre TN.

3 Modèle de Trou Noir non linéaire

3.1 Modèle de plaque de von Kármán

La poutre TN est modélisée comme une plaque non-linéaire de von Kármán [8, 9] avec épaisseur variable. La géométrie de la plaque est décrite sur la figure 3. L'épaisseur dans la zone TN est décrite par :

$$h(x) = h_0 \frac{(x + x_0)^m}{(x_1 + x_0)^m}. \quad (2)$$

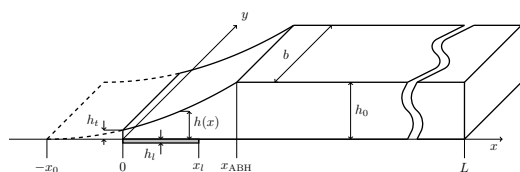


FIGURE 3 – Schéma de la plaque TN modélisée (d'après [4]).

L'équation du mouvement pour le déplacement transverse w s'écrit alors, en suivant les développements

proposés dans [11, 12] :

$$\rho h(\mathbf{x})\ddot{w} + \Delta(D(\mathbf{x})\Delta w) - (1 - \nu)L(D(\mathbf{x}), w) = p + L(w, F) \quad (3)$$

où la fonction d'Airy F respecte :

$$\Delta\left(\frac{1}{Eh(\mathbf{x})}\Delta F\right) - (1 + \nu)L\left(\frac{1}{Eh(\mathbf{x})}, F\right) = -\frac{1}{2}L(w, w) \quad (4)$$

et où p est l'effort excitateur par unité de surface, E le module d'Young, ν le coefficient de Poisson, h l'épaisseur, $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ la rigidité de flexion, ρ la masse volumique et $L(f, w)$ est l'opérateur bilinéaire de Monge-Ampère :

$$L(f, w) = f_{xx}g_{yy} + f_{yy}g_{xx} - 2f_{xy}g_{xy} \quad (5)$$

De manière plus concise, on pourra noter

$$\rho h\ddot{w} + \square(D, w) = p + L(w, F) \quad (6)$$

$$\diamond(A, F) = -L(w, w)/2 \quad (7)$$

avec $A(x) = 1/Eh(x)$ et \square et \diamond les opérateurs spatiaux appliqués à w et F :

$$\square(D, w) = \Delta(D(\mathbf{x})\Delta w) - (1 - \nu)L(D(\mathbf{x}), w), \quad (8)$$

$$\diamond(D, w) = \Delta\left(\frac{1}{Eh(\mathbf{x})}\Delta F\right) - (1 + \nu)L\left(\frac{1}{Eh(\mathbf{x})}, F\right). \quad (9)$$

Pour le cas d'une plaque libre sur ses quatre bords, les conditions aux limites s'expriment sur un bord de normale n :

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n}(D \frac{\partial^2 w}{\partial n^2}) = 0, \quad (10)$$

$$F = \frac{\partial F}{\partial n} = 0. \quad (11)$$

3.2 Projection modale

Pour résoudre ce modèle, on utilise une méthode par projection modale [13]. Les équations (3) et (4) sont projetées sur les modes de la structure linéaire associée. Les problèmes linéaires homogènes conservatifs associés sont

$$-\rho h\omega^2 w + \square(D, w) = 0, \quad (12)$$

et

$$\diamond(A, F) = \zeta^4 F, \quad (13)$$

auxquels on ajoute les conditions limites (11). Ce sont des problèmes aux valeurs propres dont les solutions sont les $(\omega_k, \Phi_k(\mathbf{x}))$ et $(\zeta_n, \Psi_n(\mathbf{x}))$, respectivement. On exprime le déplacement et la fonction d'Airy comme des sommes :

$$w(\mathbf{x}, t) = S_w \sum_{k=1}^{N_\Phi} \Phi_k(\mathbf{x}) q_k(t), \quad (14)$$

et

$$F(\mathbf{x}, t) = S_F \sum_{n=1}^{N_\Psi} \Psi_n(\mathbf{x}) \beta_n(t). \quad (15)$$

On peut noter que les modes sont normés de telle sorte que leur produit scalaire soit unitaire :

$$\langle \Phi_k, \Phi_k \rangle = 1. \quad (16)$$

La projection sur les modes donne finalement deux formulations du problème projeté. La formulation (17-18) quadratique en (q, β) s'écrit :

$$\beta_p(t) = -\frac{S_w^2}{2\zeta_p^4 S_F} \sum_{i=1}^{N_\Phi} \sum_{j=1}^{N_\Phi} H_{i,j}^p q_i(t) q_j(t), \quad (17)$$

$$\ddot{q}_s(t) + \omega_s^2 q_s(t) = F_s(t) + \frac{S_F}{M_s} \sum_{k=1}^{N_\Phi} \sum_{n=1}^{N_\Psi} E_{k,n}^s q_k(t) \beta_n(t), \quad (18)$$

avec $M_s = \int_S \rho h \Phi_s \Phi_s dS$ les masses modales, $F_s = \frac{1}{S_w M_s} \int_S p \Phi_s dS$ l'effort modal, et les coefficients de couplages :

$$H_{i,j}^p = \int_S \Psi_p L(\Phi_i, \Phi_j) dS, \quad (19)$$

et

$$E_{k,l}^s = \int_S L(\Phi_k, \Psi_l) \Phi_s dS. \quad (20)$$

La formulation (21), où la variable β a été éliminée au profit des seules amplitudes modales q du déplacement transverse w , fait apparaître une non-linéarité cubique en q :

$$\ddot{q}_s(t) + \omega_s^2 q_s(t) = F_s(t) - \frac{S_w^2}{M_s} \sum_{k=1}^{N_\Phi} \sum_{m=1}^{N_\Phi} \sum_{n=1}^{N_\Phi} \Gamma_{k,m,n}^s q_k(t) q_m(t) q_n(t). \quad (21)$$

Ici, les coefficients $\Gamma_{k,m,n}^s$ sont calculés à partir de $H_{m,n}^l$ et $E_{k,l}^s$:

$$\Gamma_{k,m,n}^s = \sum_{l=1}^{N_\Psi} \frac{H_{m,n}^l E_{k,l}^s}{2\zeta_l^4}. \quad (22)$$

La formulation (21) est particulièrement utile pour quantifier la convergence de la méthode avec le nombre de modes Ψ considéré via les termes du tenseur $\Gamma_{k,m,n}^s$. Toutefois, c'est la formulation (17-18) qui sera utilisée préférentiellement pour la résolution en temps.

Il est notable que les propriétés déjà décrites dans [13] pour les tenseurs de couplage sont également vérifiées ici : à cause de la bilinéarité de $L(., .)$, la symétrie de $H_{i,j}^p$ est immédiate :

$$H_{i,j}^p = H_{j,i}^p. \quad (23)$$

Cette propriété permet de réduire le coût de calcul en ne calculant que la moitié des coefficients. Par ailleurs, comme $L(., .)$ est triplement auto-adjoint, on a

$$\int_S f L(g, h) dS = \int_S L(f, g) h dS + \mathfrak{C}, \quad (24)$$

avec \mathfrak{C} s'annulant sous certaines conditions [12], dont les conditions de bord libre de contrainte. Dans ce cas, la propriété

$$H_{i,j}^p = E_{p,i}^i, \quad (25)$$

permet de réduire encore le nombre de coefficients à calculer.

3.3 Modes du système linéaire associé

La résolution des problèmes linéaires (12-13) est compliquée par la prise en compte de l'épaisseur variable et demande une approche numérique. Les solutions sont obtenues par une méthode aux différences finies [4].

L'utilisation d'un maillage uniforme pour une structure où la longueur d'onde varie spatialement peut donner lieu à un coût de calcul important. Pour remédier à cela, le maillage est adapté à la variation de longueur d'onde des ondes de flexion. Le problème (13) peut également être résolu par cette méthode. Les coefficients $H_{i,j}^p$, $E_{k,l}^s$ et $\Gamma_{k,m,n}^s$ sont calculés avec les expressions (19, 20, 22) à partir des déformées modales numériques, à la manière de [14].

3.4 Prise en compte de l'amortissement

L'amortissement dans le système est pris en compte en supposant un amortissement modal faible dans le problème aux valeurs propres en déplacement. Le problème dissipatif est formulé en utilisant une rigidité complexe :

$$D^*(x) = D(x)(1 + \eta(x)), \quad (26)$$

où $\eta(x)$ est un facteur de perte équivalent obtenu en utilisant la loi de Ross-Ungar-Kerwin [10, 4] pour modéliser l'effet du film visco-élastique. La résolution de ce problème aux valeurs propres permet de trouver les amortissements modaux ξ_s qui sont ensuite réinjectées dans le système d'équations (17-18) :

$$\beta_p(t) = -\frac{S_w^2}{2\zeta_p^4 S_F} \sum_{i=1}^{N_\Phi} \sum_{j=1}^{N_\Phi} H_{i,j}^p q_i(t) q_j(t), \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \ddot{q}_s(t) + 2\xi_s \omega_s \dot{q}_s(t) + \omega_s^2 q_s(t) \\ = F_s(t) + \frac{S_F}{M_s} \sum_{k=1}^{N_\Phi} \sum_{n=1}^{N_\Psi} E_{k,n}^s q_k(t) \beta_n(t). \end{aligned} \quad (28)$$

Cette méthode a l'avantage de donner lieu à un problème en temps qui se résout de la même manière que le problème conservatif. Par ailleurs, le fait de ne pas introduire d'amortissement sur la fonction d'Airy est conforté par l'absence d'effets d'inertie dans le problème longitudinal.

3.5 Intégration en temps

Le système d'équations (27-28) est résolu à l'aide d'un schéma d'intégration conservatif décrit dans [13], qui est stable sous condition. La première étape est de discrétiser les $q_s(t)$:

$$q_s(t) \rightarrow q_s^n, \quad (29)$$

où $t = n\Delta t$ avec Δt le pas de discrétisation en temps, et les opérateurs de dérivation à l'aide d'opérateurs aux différences finies. Le schéma conservatif s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \delta_{tt} q_s^n + 2\xi_s \omega_s \delta_t q_s^n + \omega_s^2 q_s^n \\ = \frac{S_F}{M_s} \sum_{k=1}^{N_\Phi} \sum_{l=1}^{N_\Psi} E_{k,l}^s q_k^n [\mu_t \beta_l^n] + F_s^n, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\mu_t - \beta_p^n = \frac{-S_w^2}{2\zeta_p^4 S_F} \sum_{i=1}^{N_\Phi} \sum_{j=1}^{N_\Phi} H_{i,j}^p q_i^n [e_t - q_j^n], \quad (31)$$

avec les opérateurs discrets suivants :

$$\delta_{tt}q^n = \frac{q^{n+1} - 2q^n + q^{n-1}}{\Delta t^2}, \quad (32)$$

$$\delta_t q^n = \frac{q^{n+1} - q^{n-1}}{2\Delta t}, \quad (33)$$

$$\mu_{t-}q^n = \frac{q^n + q^{n-1}}{2}, \quad (34)$$

$$\mu_t q^n = \frac{q^{n+1} + q^n}{2}. \quad (35)$$

$$e_{t-}q^n = q^{n-1}. \quad (36)$$

La condition de stabilité d'un tel schéma est [13] :

$$f_e > \pi f_{\max}, \quad (37)$$

où $f_e = 1/\Delta t$ est la fréquence d'échantillonnage et f_{\max} est la plus haute fréquence propre considérée dans le calcul.

4 Résultats du modèle

4.1 Poutres utilisées

On effectue les calculs pour une poutre uniforme et une poutre TN, dont les caractéristiques sont données dans le tableau 1. Dans ce tableau les variables η et η_l sont les facteurs de perte de la plaque et du film visco-élastique, respectivement.

TABLEAU 1 – Tableau décrivant les configurations utilisées.

| | | | |
|-------------------------------|-------|-----------|----------------------|
| E (GPa) | 70 | h_0 (m) | 5×10^{-3} m |
| η | 0.002 | a (m) | 1.5 |
| ρ (kg/m ³) | 2700 | b (m) | 0.02 |
| ν | 0.3 | h_l (m) | 10^{-4} |
| E_l (GPa) | 1 | l_l (m) | 0.1 |
| η_l | 0.4 | x_0 (m) | 0.05 |
| ρ_l (kg/m ³) | 1000 | x_1 (m) | 0.35 |

4.2 Convergence

Le maillage utilisé pour le calcul des fonctions propres en différences finies est de 1000×100 . On vérifie que ce maillage est suffisant pour obtenir une convergence des modes utilisés dans le calcul. On utilise $N_\Phi = 100$ et $N_\Psi = 1500$. Un aspect important de la résolution est la convergence des coefficients de couplage $\Gamma_{k,m,n}^s$. Pour s'en assurer, on observe la convergence du terme $\Gamma_{p,p,p}^p$ pour les configurations utilisées. La figure 4 montre que les coefficients de la poutre TN convergent plus lentement que ceux de la poutre uniforme et atteignent des valeurs plus élevées. Certains modes Ψ ne contribuent pas du tout et il est possible d'alléger le calcul en les éliminant.

4.3 Réponses à une excitation d'amplitude croissante

Les poutres sont excitées par un signal sinusoïdal d'amplitude croissante et de fréquence 105 Hz (voir figure 5) dans la zone uniforme. L'intégration en temps donne les signaux de déplacement au point d'excitation. On vérifie

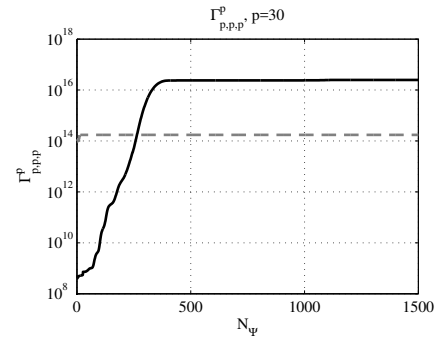


FIGURE 4 – Terme $\Gamma_{p,p,p}^p$, $p = 30$ pour la poutre uniforme (trait interrompu gris) et ABH (trait plein noir).

sur la figure 6(a) que le spectre de la réponse de la poutre uniforme ne contient que la raie d'excitation tandis que le contenu spectral de la réponse de la poutre TN (voir figure 6(b)) s'enrichit avec l'amplitude de nombreux harmoniques, ce qui est une signature d'un comportement non-linéaire. Le comportement de la structure expérimental est reproduit qualitativement; toutefois, l'expérience montrait la présence d'harmoniques pairs et impairs tandis que la simulation ne montre que des harmoniques impairs puisque le modèle ne comporte que des non linéarités cubiques. Les non linéarités quadratiques sont amenées par la présence d'imperfections géométriques, inévitables en pratique dans les structures minces, et en particulier pour le cas de la poutre TN où l'épaisseur terminale est très petite. La prise en compte de ces imperfections se fait en considérant un modèle de plaque imparfaite, contenant des non linéarités quadratiques et cubiques, et dont l'effet est souvent de favoriser l'apparition de dynamiques complexes [15].

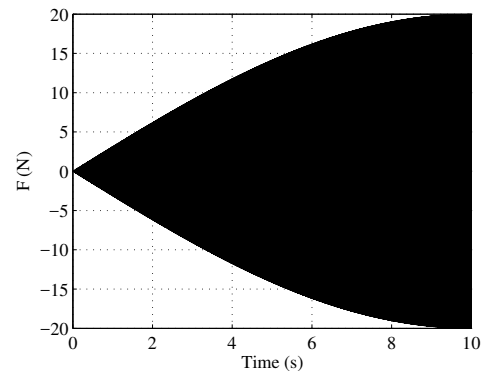


FIGURE 5 – Signal d'excitation sinusoïdal à $f=105$ Hz, d'amplitude croissante.

4.4 Transfert d'énergie basses vers hautes fréquences

Pour évaluer s'il y a transfert d'énergie d'un domaine basse fréquence vers haute fréquence, la poutre TN est excitée avec un bruit blanc filtré entre 200 et 300 Hz (voir figure 7(a)), qui n'excite qu'une seule bande de fréquence. On vérifie bien sur la figure 7(b) qu'à faible niveau, la poutre TN ne répond que sur la bande excitée tandis que de l'énergie fuit sur d'autres bandes de fréquence pour des amplitudes d'excitation plus importantes. L'amplitude hors bande excitée reste encore bien inférieure à l'amplitude

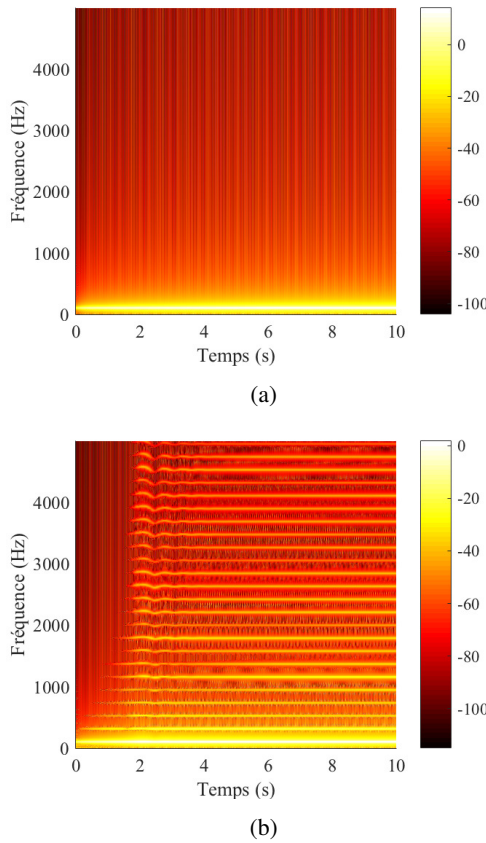


FIGURE 6 – Périodogramme du déplacement en dB (ref. $1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$) en réponse à une excitation sinus à $f=105 \text{ Hz}$ pour (a) la poutre uniforme et (b) la poutre TN.

dans la bande excitée et il n'est pas clair si ce phénomène d'excitation large bande donne lieu à une réduction des vibrations dans la bande $[200-300] \text{ Hz}$. Néanmoins, ce résultat ouvre clairement des possibilités et il devient envisageable de trouver des configurations où le couplage entre modes permet une réduction du niveau vibratoire en basse fréquence.

5 Conclusion et perspectives

Dans cet article, le caractère non-linéaire des poutres TN a été mis en évidence. L'expérience a montré que la réponse à une excitation sinus d'une poutre munie d'un profil TN long contient un grand nombre d'harmoniques, qui s'accroît avec l'amplitude. C'est la signature d'un comportement non-linéaire, qui est dû aux grandes amplitudes de déplacement dans la région de faible épaisseur. Le développement d'un modèle de von Kármán pour simuler une poutre TN confirme l'observation expérimentale en reproduisant qualitativement le même phénomène. Finalement, les non-linéarités permettent d'exciter un spectre large bande à partir d'une excitation de la structure sur une bande limitée. Ce comportement dépend de l'amplitude d'excitation et peut permettre d'autre part la réduction de l'amplitude de la réponse dans la bande excitée. Potentiellement, les non-linéarités sont ainsi un moyen pour augmenter l'efficacité de l'effet TN en basse fréquence.

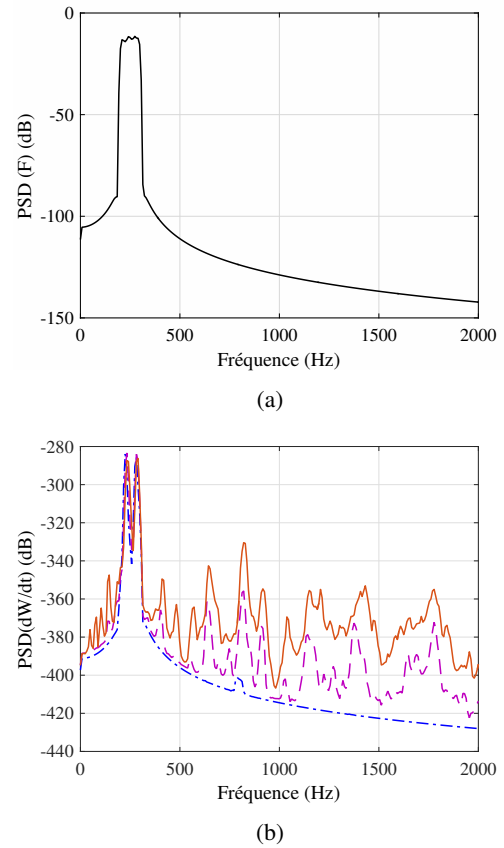


FIGURE 7 – (a) Spectre du signal d'excitation bruit blanc filtré entre 200 et 300 Hz. (b) Spectres de la vitesse vibratoire de la poutre TN pour une amplitude maximum de 1 N (trait mixte bleu), 10 N (trait interrompu mauve), 20 N (trait plein rouge).

Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier Cédric Pierfederici et Yoan Eusèbe, étudiants à l'Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs du Mans (ENSIM) et Mathieu Sécail, ingénieur d'étude, pour leur implication dans la partie expérimentale.

Références

- [1] V.V. Krylov and F.J.B.S. Tilman. Acoustic 'black holes' for flexural waves as effective vibration dampers. *Journal of Sound and Vibration*, 274(3-5) :605–619, 2004.
- [2] V.B. Georgiev, J. Cuenca, F. Gautier, L. Simon, and V.V. Krylov. Damping of structural vibrations in beams and elliptical plates using the acoustic black hole effect. *Journal of Sound and Vibration*, 330(11) :2497–2508, 2011.
- [3] M.A. Mironov. Propagation of a flexural wave in a plate whose thickness decreases smoothly to zero in a finite interval. *Soviet Physics : Acoustics*, 34(3) :318–319, 1988.
- [4] V. Denis, A. Pelat, F. Gautier, and B. Elie. Modal overlap factor of a beam with an acoustic black hole termination. *Journal of Sound and Vibration*, 333 :2475–2488, 2014.

- [5] D.J. O'Boy, V.V. Krylov, and V. Kralovic. Damping of flexural vibrations in rectangular plates using the acoustic black hole effect. *Journal of Sound and Vibration*, 329(22) :4672–4688, 2010.
- [6] E.P. Bowyer, D.J. O'Boy, V.V. Krylov, and J.L. Horner. Effect of geometrical and material imperfections on damping flexural vibrations in plates with attached wedges of power law profile. *Applied Acoustics*, 73(5) :514–523, 2012.
- [7] V. Denis, F. Gautier, A. Pelat, and J. Poittevin. Measurement and modelling of the reflection coefficient of an acoustic black hole termination. *Journal of Sound and Vibration*, 349 :67–79, 2015.
- [8] T. von Kármán. Festigkeitsprobleme im maschinenbau. *Enzyklopadie der Mathematischen Wissenschaften*, 4(4) :311–385, 1910.
- [9] A.H. Nayfeh and D.T. Mook. *Nonlinear oscillations*. Wiley New York, 1995.
- [10] D. Ross, E.L. Ungar, and E.M. Kerwin. Damping of plate flexural vibrations by means of viscoelastic laminae. In *Structural damping*, pages 49–57. J.E. Ruzicka, Oxford, Pergamon Press edition, 1960.
- [11] G.J. Efstathiades. A new approach to the large-deflection vibrations of imperfect circular disks using galerkin's procedure. *Journal of Sound and Vibration*, 16(2) :231–253, 1971.
- [12] O. Thomas and S. Bilbao. Geometrically nonlinear flexural vibrations of plates : In-plane boundary conditions and some symmetry properties. *Journal of Sound and Vibration*, 315(3) :569–590, 2008.
- [13] M. Ducceschi and C. Touzé. Modal approach for nonlinear vibrations of damped impact plates : application to sound synthesis of gongs and cymbals. *Journal of Sound and Vibration*, 344 :313–331, 2015.
- [14] C. Touzé, M. Vidrascu, and D. Chapelle. Direct finite element computation of non-linear modal coupling coefficients for reduced-order shell models. *Computational Mechanics*, 54 :567–580, 2014.
- [15] C. Touzé, S. Bilbao, and O. Cadot. Transition scenario to turbulence in thin vibrating plates. *Journal of Sound and Vibration*, 331 :412–433, 2012.