

CFA/VISHNO 2016

**Prédiction de l'impédance mécanique d'un objet élastique
à partir de la corrélation de bruit aléatoire**S. Rakotonarivo^a, W. Kuperman^b et E. Williams^c^aLMA - UPR 7051 - Marseille, 4 impasse Nikola Tesla, 13453 Marseille, France^bMarine Physical Lab., Scripps Institution of Oceanography, UCSD, 9500 Gilman Drive,
La Jolla, 92093, USA^cNaval Research Laboratory, Code 7106, Washington Dc, 20375, USA

sandrine.rakotonarivo@univ-amu.fr



LE MANS

Ce travail présente une méthode pour estimer la matrice d'impédance mécanique (ou inversement admittance) d'un objet élastique placé dans un champ de bruit spatialement aléatoire. Cette matrice d'impédance permet de caractériser un objet élastique dans le vide et peut être utilisée pour calculer le champ diffusé par cet objet pour un environnement quelconque. L'approche repose sur la corrélation des champs de pressions et de vitesses normales à la surface de l'objet élastique considéré pour prédire la matrice d'impédance de structure. Ensuite, le champ diffusé à toute position à l'extérieur de l'objet est déterminé par la méthode des sources virtuelles. La méthode de corrélation pour déterminer la matrice d'impédance mécanique est testée numériquement pour une coque cylindrique infinie excitée par un champ de bruit spatialement aléatoire. Puis, le champ diffusé est déterminé pour un point (ligne) source près de la coque cylindrique. Les résultats numériques obtenus sont en très bonne adéquation avec les formulations analytiques.

1 Introduction

L'admittance mécanique ou mobilité (fonction de Green mécanique) d'un objet élastique caractérise sa réponse dans le vide lorsqu'il est soumis à des efforts à sa surface. Ainsi, la matrice d'admittance mécanique ou son inverse, l'impédance mécanique, peut être utilisée pour déterminer le champ diffusé d'une structure élastique immergée dans un fluide quelconque et dans des conditions de champ incident quelconques. Dans ce cas, les efforts de chargement du fluide environnant sur la structure élastique doivent être pris en compte et peuvent être modélisées à partir des matrices d'impédance d'inertie et de rayonnement [1, 4] (voir Figure 1). Ces deux dernières impédances sont indépendantes des paramètres de la structure élastique et dépendent uniquement de sa forme géométrique et du milieu fluide environnant. Elles peuvent être déterminées à partir du formalisme des sources virtuelles [6] ou de l'équation intégrale d'Helmholtz [9]. La matrice d'impédance mécanique peut être déterminée analytiquement pour des objets élastiques de forme simple et numériquement par éléments finis pour des formes complexes. Ce calcul numérique peut devenir une tâche très coûteuse en terme de temps de calcul. Alternativement, l'impédance mécanique peut être mesurée expérimentalement [5, 2] mais ces dernières ne permettent pas de capturer les effets de champ proche. Ce papier présente une méthode permettant d'estimer la matrice d'impédance mécanique à la surface d'une structure élastique en prenant en compte les effets de champ proche [7]. La structure élastique est placée dans un champ d'ondes aléatoires (=bruit). L'approche, présentée à la section 2.1, est basée sur la corrélation des champs de pression et de vitesse normale à la surface de la structure élastique. Ensuite, le champ diffusé par la structure élastique est déterminée à partir du formalisme des sources virtuelles (cf. paragraphe 2.2). La méthode est appliquée numériquement au cas de la diffusion par un tube élastique infini. Les résultats sont présentés et discutés dans les sections 3 et 4.

2 Estimation de l'impédance mécanique et du champ diffusé par une structure élastique

2.1 Méthode de corrélation pour la prédiction de l'impédance de structure

L'étude considère un objet élastique soumis à une sollicitation vibratoire à ses frontières (surface Ω). La sollicitation est supposée harmonique, de fréquence ω et correspond à une distribution de forces $f(\mathbf{x})$ à la surface

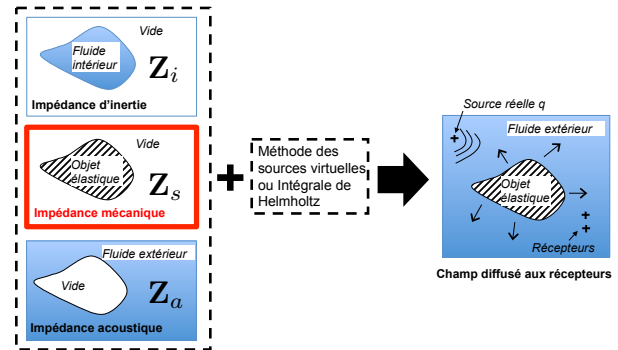


FIGURE 1 – Diagramme des 3 impédances nécessaires pour le calcul du champ diffusé par un objet élastique : impédance mécanique Z_s , impédance d'inertie Z_i , impédance acoustique Z_a

Ω . La fonction de Green mécanique, $G_s(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, permet de relier la réponse de l'objet élastique dans le vide, sa vitesse normale $v(\mathbf{y})$, aux efforts $f(\mathbf{x})$ à sa surface,

$$v(\mathbf{y}) = \int_{\Omega} G_s(\mathbf{y}, \mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d^2 \mathbf{x} \quad (1)$$

Après discrétisation et inversion de l'équation 1, et lorsque les efforts à la surface Ω proviennent de sources acoustiques, la relation 1 devient,

$$\mathbf{Z}_s \mathbf{v} = -\mathbf{p} \quad (2)$$

où \mathbf{Z}_s représente la matrice d'impédance mécanique de dimension $N \times N$, \mathbf{p} et \mathbf{v} sont des vecteurs colonne ($1 \times N$) dont les éléments représentent la pression et la vitesse normale en chaque élément discret de la surface Ω et N représente le nombre total d'éléments discrets sur Ω . Le signe négatif dans le membre de droite de l'équation 2 provient de la convention utilisée où la force $f(\mathbf{x})$ est définie positive dans la direction de la normale sortante à la surface Ω . Afin d'estimer \mathbf{Z}_s à partir de la méthode de corrélation, chaque membre de l'équation 2 est multiplié par \mathbf{p}^H ,

$$\mathbf{Z}_s [\mathbf{v} \mathbf{p}^H] = [-\mathbf{p} \mathbf{p}^H] \quad (3)$$

où l'indice H représente l'opérateur conjugué transpose. Pour L réalisations, les matrices de covariances sont calculées à partir des vecteurs de pressions \mathbf{p}_k pour chaque réalisation k ,

$$\langle \mathbf{p} \mathbf{p}^H \rangle = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \mathbf{p}_k \mathbf{p}_k^H, \quad \langle \mathbf{v} \mathbf{p}^H \rangle = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \mathbf{v}_k \mathbf{p}_k^H \quad (4)$$

Comme la matrice d'impédance mécanique est indépendante de l'insonification, cette dernière est reliée aux matrices de

covariances par la relation,

$$\mathbf{Z}_s \langle \mathbf{vp}^H \rangle = \langle -\mathbf{pp}^H \rangle . \quad (5)$$

Sous l'hypothèse d'un champ d'insonification suivant une loi gaussienne, il a été montré qu'un nombre de réalisation $L > 3N$ était suffisant pour obtenir une matrice de covariance non singulière [3]. Ainsi, il est possible de déterminer la matrice d'impédance par la relation,

$$\mathbf{Z}_s = -\langle \mathbf{pp}^H \rangle \langle \mathbf{vp}^H \rangle^{-1} . \quad (6)$$

Par un raisonnement analogue, nous obtenons les relations suivantes pour déterminer la matrice d'impédance \mathbf{Z}_s ou son inverse, la matrice d'admittance mécanique \mathbf{Y}_s ,

$$\mathbf{Z}_s = -\langle \mathbf{pv}^H \rangle \langle \mathbf{vv}^H \rangle^{-1} , \quad (7)$$

$$\mathbf{Y}_s = -\langle \mathbf{vv}^H \rangle \langle \mathbf{pv}^H \rangle^{-1} , \quad (8)$$

$$\mathbf{Y}_s = -\langle \mathbf{vp}^H \rangle \langle \mathbf{pp}^H \rangle^{-1} . \quad (9)$$

2.2 Estimation du champ diffusé à partir de l'impédance mécanique et de la méthode des sources images

Une fois la matrice d'impédance mécanique déterminée, le champ diffusé par un objet élastique peut être déterminé à partir du formalisme des sources virtuelles. Dans cette approche, l'objet élastique est remplacé par un set de N sources virtuelles positionnées juste à l'intérieur de la structure élastique (voir Figure 2). Le champ diffusé est déterminé à partir de la fonction de Green $G(\mathbf{z}_i, \mathbf{x}_j)$ du milieu environnant entre les sources virtuelles positionnées en \mathbf{x}_i et des récepteurs positionnés en \mathbf{z}_j ,

$$\mathbf{p}_{so} = -\mathbf{M}_z \mathbf{s} , \quad (10)$$

où les éléments de la matrice \mathbf{M}_z correspondent à la fonction de Green $i\omega\rho_0 G(\mathbf{z}_i, \mathbf{x}_j)$ et les N éléments du vecteur \mathbf{s} correspondent aux modules et phases de chaque source virtuelle. Ce terme est déterminé [7] soit à partir des matrices d'impédances mécanique, acoustique et d'inertie (Equation 11) ou matrices d'admittances mécanique, acoustique et d'inertie (Equation 12),

$$\mathbf{s} = -\mathbf{D}_c^{-1} (\mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_s)^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{Z}_s \mathbf{Z}_i^{-1}) \mathbf{p}_i , \quad (11)$$

$$\mathbf{s} = -\mathbf{M}_c^{-1} (\mathbf{Y}_a + \mathbf{Y}_s)^{-1} (\mathbf{Y}_i - \mathbf{Y}_s) \mathbf{p}_i , \quad (12)$$

où les éléments de la matrice \mathbf{M}_c correspondent à la fonction de Green $i\omega\rho_0 G(\mathbf{y}_i, \mathbf{x}_j)$ entre la position des sources virtuelles \mathbf{x}_j et des éléments discrets \mathbf{y}_i de la surface Ω . Les éléments de la matrice \mathbf{D}_c correspondent à la dérivée normale par rapport à \mathbf{y}_i , $\partial_{n(\mathbf{y}_i)} G(\mathbf{y}_i, \mathbf{x}_j)$.

3 Validation numérique sur un tube élastique

3.1 Prédiction de la matrice d'impédance du tube élastique

La méthode de corrélation pour prédire la matrice d'impédance mécanique est appliquée sur des données

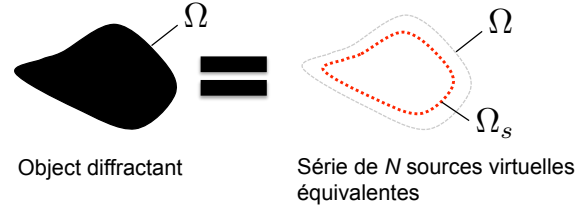


FIGURE 2 – La méthode des sources virtuelles remplace l'objet élastique par un set de N sources virtuelles positionnées sur Ω_s , juste à l'intérieur de Ω .

simulées 2D numériques dans le cadre de la diffusion par un tube élastique infini d'épaisseur 1 cm et de rayon externe 22,5 cm à l'aide du logiciel Comsol Multiphysics. Le tube élastique est rempli d'air et le matériau le constituant a pour densité $\rho=2700 \text{ kg/m}^3$, module d'Young $E=70 \text{ GPa}$, coefficient de Poisson $\mu=0,33$ et amortissement 0,003. La matrice d'impédance mécanique est calculée à 2 kHz pour 2 configurations différentes afin de tester la robustesse de la méthode de corrélation pour estimer la matrice d'impédance mécanique vis-à-vis des propriétés du milieu environnant :

- le tube élastique est immergé dans l'eau ($\rho=1000 \text{ kg/m}^3$, célérité $c_0 = 1500 \text{ m/s}$),
- le tube élastique est immergé dans l'air ($\rho=1,212 \text{ kg/m}^3$, célérité $c_0 = 343 \text{ m/s}$).

Le champ de bruit étant associé à une superposition incohérente d'ondes planes selon toutes les directions et toutes les phases [8], le champ diffusé par le tube élastique est calculé pour $M = 400$ réalisations, chaque réalisation correspondant à une direction d'insonification donnée ou un champ d'onde plane incident avec les parties réelles et imaginaires définies selon une distribution gaussienne. Ensuite, les matrices de covariance des champs de pression et de vitesse normale (Equation 4) sur $N = 400$ éléments à la surface externe du tube sont déterminées par moyennage sur $L = N \times M = 160000$ réalisations. Ce nombre L de réalisations est obtenu par rotation en tenant compte de la symétrie cylindrique du tube : ainsi $N=400$ réalisations peuvent être obtenus pour chaque simulation correspondant à une direction d'onde plane incidente. C'est pourquoi, pour $M = 400$ simulations, $L = M \times N = 160000$ sont réalisées. Une fois les matrices de covariance obtenues, la matrice d'impédance mécanique est déterminée selon l'équation 6.

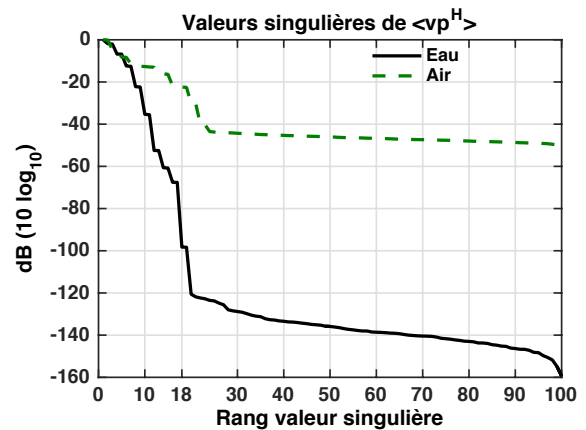


FIGURE 3 – Valeurs singulières de l'opérateur $\langle \mathbf{vp}^H \rangle$.

Le calcul du terme $\langle \mathbf{vp}^H \rangle^{-1}$ est réalisé par pseudo inversion en ne considérant que les 18 premières valeurs singulières. La figure 3 fait apparaître les valeurs singulières de la matrice de covariance $\langle \mathbf{vp}^H \rangle$ et montre que le seuil de bruit est atteint à partir de 18 valeurs singulières. L'impédance mécanique obtenue par la méthode de corrélation est affichée sur la figure 4 (b) pour le tube élastique immergé dans l'eau et sur la figure 4 (c) pour le tube élastique immergé dans l'air. Ces deux dernières sont comparées à l'impédance mécanique déterminée analytiquement [7]. Nous observons un très bon accord entre les impédances mécaniques déterminées analytiquement et par la méthode de corrélation dans l'eau. On note également que la méthode de corrélation restitue la partie réelle de l'impédance mécanique qui correspond à l'amortissement du matériau. Quant à la matrice d'impédance mécanique prédite dans l'air, on note que la partie imaginaire suit globalement les mêmes oscillations que la solution analytique mais diffère en terme d'amplitude et de modes. La partie réelle est par contre mal restituée. Ces différences s'expliquent par la nature du milieu environnant qui est de l'air et pour lequel les conditions aux frontières du tube s'apparente à des frontières rigides. Dans ce cas, le champ de vitesse normal à la surface devient très faible et certains modes observables dans l'eau deviennent négligeables dans les champs de pression et vitesse normale mesurés. En conséquence, lorsque le ratio est calculé pour estimer \mathbf{Z}_s , ces modes ne sont pas visibles.

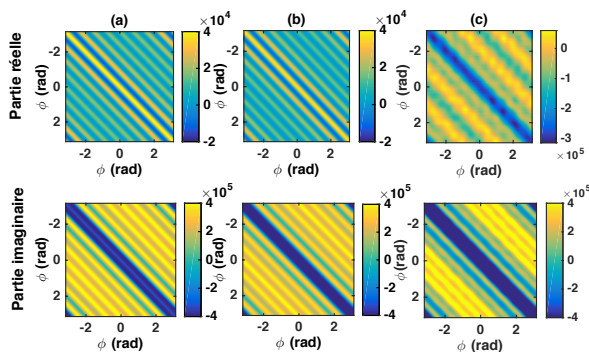


FIGURE 4 – Comparaison des impédances mécaniques déterminées (a) analytiquement et par la méthode de corrélation (b) dans l'eau et (c) dans l'air.

3.2 Estimation du champ diffusé à partir de la méthode des sources virtuelles

Le champ de pression diffusé par le tube élastique présenté en section 3.1 est calculé à partir de l'impédance mécanique estimée par la méthode de corrélation dans l'eau et des relations 10 et 11. Le tube est immergé dans l'eau en milieu infini. Les matrices d'inertie \mathbf{Z}_i et de rayonnement acoustique \mathbf{Z}_a sont calculées à partir de la fonction de Green 2D dans l'eau en champ libre. Le champ de pression diffusé est affiché sur la figure 5 et comparé à la solution analytique du champ diffusé par le tube élastique sollicité par un point source cylindrique à 2 kHz. Les récepteurs sont positionnés à 40 cm du centre du tube, soit dans le champ proche du tube. On note une très bonne adéquation entre les solutions analytiques et obtenues par la méthode des sources virtuelles.

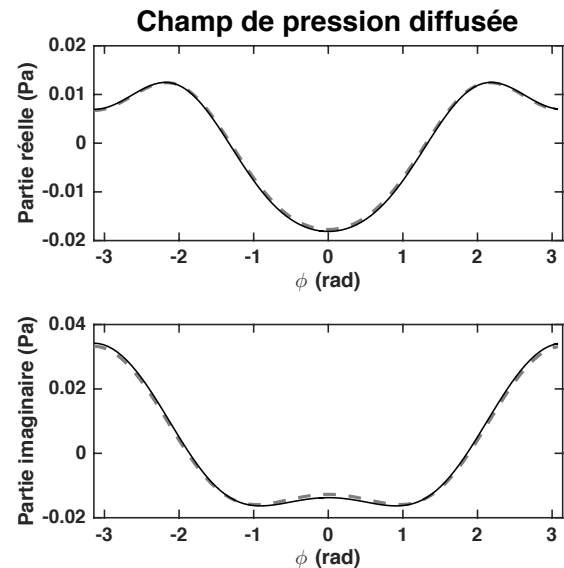


FIGURE 5 – Comparaison des champ de pression diffusée à 2 kHz par le tube élastique immergé dans l'eau par la méthode des sources virtuelles et à partir de la solution analytique à 40 cm du centre du tube.

4 Conclusions

En conclusion, une méthode de prédiction de l'impédance mécanique basé sur la corrélation des champ de pression et vitesse normale à sa surface a été présenté. La matrice d'impédance \mathbf{Z}_s est intrinsèquement indépendante de la nature du milieu extérieur. Néanmoins, son estimation va indirectement dépendre du milieu environnant via les pressions et vitesses normales qui ne vont pas exhiber les mêmes modes selon la conditions de frontières. Enfin, rappelons que l'estimation de \mathbf{Z}_s a pour but d'être utilisée afin de caractériser un objet élastique de forme quelconque et de calculer le champ diffusé. La méthode des sources virtuelles a été appliquée sur le tube élastique et avec l'impédance mécanique déterminée par la méthode de corrélation. La comparaison entre résultats analytiques et numériques montrent un très bon accord. La suite du travail consiste en la validation expérimentale de la méthode de corrélation.

Références

- [1] Yu. I. Bobrovnikskii. Impedance theory of sound scattering : General relations. *Acoustical Physics*, 52(5) :513 – 517, 2006.
- [2] Giorgio V. Borgiotti. The power radiated by a vibrating body in an acoustic fluid and its determination from boundary measurements. *Journal of the Acoustical Society of America*, 88(4) :1884 – 1893, 1990.
- [3] L. Brennan, J. Mallet, and I. Reed. Rapid convergence rate of adaptive arrays. *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, AES-10(6) :853 – 863, 1974.
- [4] Frank J. Fahy. *Foundation of engineering acoustics*, chapter 4. Academic Press London, UK, 2000.

- [5] Charles F. Gaumond and Tim Yoder. Determination of structural impedance from scattering data. *Journal of the Acoustical Society of America*, 93(3) :1415 – 1422, 1995.
- [6] Irena Lucifredi and Henrik Schmidt. Subcritical scattering from buried elastic shells. *Journal of the Acoustical Society of America*, 120(6) :3566 – 3583, 2006.
- [7] Sandrine T. Rakotonarivo, W. A. Kuperman, and Earl G. Williams. Prediction of a body's structural impedance and scattering properties using correlation of random noise. *Journal of the Acoustical Society of America*, 134(6) :4401 – 4411, 2013.
- [8] Richard L. Weaver and Oleg I. Lobkis. Diffuse fields in open system and the emergence of the green's function (I). *Journal of the Acoustical Society of America*, 116(5) :2731 – 2734, 2004.
- [9] Earl G. Williams. *Fourier Acoustics : Sound Radiation and Nearfield Acoustical Holography*. Academic Press London, UK, 1999.