

# CFA/VISHNO 2016

## Identification de sources vibratoires par régularisation multiplicative espace-fréquence

M. Aucejo et O. De Smet  
LMSSC, CNAM, 2 rue Conté, 75003 Paris, France  
mathieu.aucejo@cnam.fr



LE MANS

Pour identifier les sources mécaniques agissant sur une structure, les méthodes de régularisations de type Tikhonov sont généralement utilisées. Ces approches, que l'on peut qualifier de régularisations additives, nécessitent le calcul d'un paramètre de régularisation optimal à partir de procédures de sélection adaptées comme la méthode de la courbe en L. De telles procédures peuvent s'avérer coûteuses en temps de calculs. C'est pourquoi, il peut être intéressant de développer une approche alternative permettant de contourner cet écueil. Dans ce papier, une stratégie de régularisation multiplicative espace-fréquence est introduite. Par construction, l'approche proposée nécessite la mise en place d'un processus itératif permettant d'adapter l'importance du terme de régularisation tout au long du processus de résolution. D'autre part, la formulation du problème inverse introduit un terme de régularisation tenant compte non seulement de la nature spatiale de l'excitation (source ponctuelle ou répartie), mais également de son contenu fréquentiel (source large bande, périodique, etc.). La validité de l'approche proposée est illustrée à l'aide d'une expérience numérique.

## 1 Introduction

La connaissance des actions mécaniques agissant sur une structure est essentielle en vue de son dimensionnement dynamique. Cependant, la mesure directe de ces dernières est intrusive, voire même impossible à réaliser en pratique. Pour contourner ce problème, la mesure indirecte des efforts à partir de la connaissance de données vibratoires est généralement employée. Malheureusement, le problème inverse résultant est mal posé. Une approche classique pour contourner cette difficulté consiste à inclure dans la formulation du problème inverse un terme de régularisation traduisant l'information disponible a priori sur le champ exciteur. Cette idée est la base des méthodes de régularisation additive de type Tikhonov [1, 2, 3], qui sont largement utilisées pour résoudre le problème inverse dans le domaine fréquentiel. Cependant, le problème de reconstruction est généralement résolu fréquence par fréquence, ce qui signifie que seule l'information spatiale sur les sources à identifier est pleinement exploitée. Du point de vue fréquentiel, cela est équivalent à supposer que le spectre des sources identifiées est discontinu. Ce manque de continuité peut induire des erreurs de reconstruction (en général au niveau des résonances) si les sources sont large bande [4]. Pour traiter à la fois le problème d'identification dans les domaines spatial et fréquentiel, il est crucial de tirer parti de l'information disponible sur la nature spatiale des sources (localisées ou réparties) et le type des signaux d'excitation. Dans le cadre de la reconstruction d'efforts, Rezayat et al. ont été les premiers à exploiter cette double information en définissant un terme de régularisation basé sur la norme mixte  $\ell_{2,1}$  pour identifier des sources ponctuelles large bande [4]. D'un point de vue technique, le problème est résolu en appliquant l'algorithme FISTA proposé par Beck et Teboulle [5].

Dans cette contribution, on se propose de développer une stratégie de régularisation permettant de résoudre les problèmes de reconstruction spatial et fréquentiel en utilisant un cadre formel unique. Notre approche repose tout d'abord sur la définition d'un terme de régularisation basé sur l'utilisation d'une norme mixte  $\ell_{2,q}$ . Ceci signifie que l'on restreint le cadre d'étude à l'identification de sources large bande ponctuelles ou réparties. Ensuite, ce terme de régularisation est introduit dans la formulation du problème inverse sous la forme d'une contrainte multiplicative [6]. Ce type de régularisation permet notamment d'éviter l'utilisation de procédures de sélection comme la méthode de la courbe en L, qui peuvent s'avérer coûteuses en temps de calculs. En contrepartie, la résolution du problème inverse

est itérative. D'un point de vue pratique, le problème inverse est résolu à partir d'un algorithme de type IRLS (Iteratively Reweighted Least Squares). L'aptitude de la régularisation espace-fréquence présentée ici est illustrée sur le cas d'une poutre en flexion simplement appuyée excitée par une force ponctuelle large bande.

## 2 Modèle de reconstruction

La mise en place de la régularisation espace-fréquence nécessite la définition d'un modèle de reconstruction décrivant la relation entre le champ vibratoire mesuré et le champ exciteur à identifier. Lorsque la structure est linéaire, son comportement dynamique à une fréquence  $f_j$  est complètement déterminé par sa matrice de transfert  $\mathbf{H}(f_j)$  liant le champ vibratoire  $\mathbf{X}(f_j)$  au champ d'excitation  $\mathbf{F}(f_j)$ . Si l'on suppose, par ailleurs, que le champ vibratoire est corrompu par un bruit  $\mathbf{N}(f_j)$ , alors le modèle de reconstruction s'écrit :

$$\mathbf{X}(f_j) = \mathbf{H}(f_j) \mathbf{F}(f_j) + \mathbf{N}(f_j), \quad \forall j = 1, \dots, N, \quad (1)$$

où  $N$  est le nombre de fréquences étudié.

À partir de l'équation précédente, il est possible de construire un modèle global incluant toutes les fréquences d'intérêt. Ce faisant, le modèle global de reconstruction s'écrit :

$$\bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{F}} + \bar{\mathbf{N}}, \quad (2)$$

où  $\bar{\mathbf{H}} = \text{diag}[\mathbf{H}(f_1), \dots, \mathbf{H}(f_N)]$ ,  $\bar{\mathbf{X}} = [\mathbf{X}(f_1), \dots, \mathbf{X}(f_N)]^T$ .

## 3 Stratégie de régularisation

On se propose dans cette contribution de rechercher le champ exciteur global  $\bar{\mathbf{F}}$  comme étant la solution du problème de minimisation suivant :

$$\bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{m}} = \underset{\bar{\mathbf{F}}}{\text{argmin}} \left\| \bar{\mathbf{X}} - \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{F}} \right\|_2^2 \cdot \left\| \bar{\mathbf{F}} \right\|_{2,q}^q. \quad (3)$$

Plusieurs remarques peuvent être faites sur la formulation du problème d'identification proposée ici. Tout d'abord, le terme de fidélité aux données  $\left\| \bar{\mathbf{X}} - \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{F}} \right\|_2^2$  implique que bruit corrompant les données est additif Gaussien. Ensuite, le terme de régularisation peut s'écrire sous la forme explicite suivante :

$$\left\| \bar{\mathbf{F}} \right\|_{2,q}^q = \sum_{i=1}^M \left( \sum_{j=1}^N |F_{ij}|^2 \right)^{\frac{q}{2}}, \quad (4)$$

où les indices de sommation  $i$  et  $j$  portent respectivement sur les dimensions spatiale et fréquentielle.

L'analyse du terme de régularisation montre qu'un couplage entre les coefficients du vecteur  $\bar{\mathbf{F}}$  est explicitement introduit. Par conséquent, l'utilisation de la norme mixte pour définir le terme de régularisation permet de promouvoir certaines structures observées sur des signaux réels [7]. Enfin, on peut noter que l'utilisation d'un terme de régularisation tel que défini par l'Eq. (4) restreint le cadre d'étude à l'identification de sources large bande ponctuelles ( $q \leq 1$ ) ou réparties ( $q = 2$ ).

## 4 Résolution du problème inverse

La solution du problème de minimisation défini dans la section précédente ne peut être obtenue que de manière itérative, car l'Eq. (3) ne possède pas de solution explicite. Dans cette contribution, la solution du problème est calculée à partir de l'algorithme IRLS.

### 4.1 Principe général

L'idée de base de l'algorithme IRLS est de remplacer la résolution directe du problème de minimisation par un processus itératif équivalent possédant une solution explicite à chaque itération. Pour cela, la norme mixte  $\ell_{2,q}$  est remplacée par une norme  $\ell_2$  pondérée, c'est-à-dire :

$$\forall q, \quad \|\bar{\mathbf{F}}\|_{2,q}^q = \|\bar{\mathbf{W}}(\bar{\mathbf{F}})^{1/2} \bar{\mathbf{F}}\|_2^2, \quad (5)$$

où  $\bar{\mathbf{W}}(\bar{\mathbf{F}})$  est une matrice globale de pondération dépendant explicitement de la solution  $\bar{\mathbf{F}}$ .

Dans le cadre d'un processus itératif, l'objectif est de calculer la solution  $\bar{\mathbf{F}}_m^{(k+1)}$  à l'itération  $k+1$  à partir de la solution  $\bar{\mathbf{F}}_m^{(k)}$  obtenue à l'itération  $k$  en fixant  $\bar{\mathbf{W}}^{(k)} = \bar{\mathbf{W}}(\bar{\mathbf{F}}^{(k)})$ , de manière à retrouver l'égalité (5) lorsque la convergence est atteinte. Ici, le champ excitateur  $\bar{\mathbf{F}}_m^{(k+1)}$  est solution du problème de minimisation suivant :

$$\bar{\mathbf{F}}_m^{(k+1)} = \underset{\bar{\mathbf{F}}}{\operatorname{argmin}} \left\| \bar{\mathbf{X}} - \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{F}} \right\|_2^2 \cdot \left\| \bar{\mathbf{W}}^{(k)1/2} \bar{\mathbf{F}} \right\|_2^2, \quad (6)$$

où la matrice de pondération globale  $\bar{\mathbf{W}}^{(k)}$  est telle que :

$$\bar{\mathbf{W}}^{(k)} = \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{W}^{(k)}. \quad (7)$$

Par construction, la matrice de pondération  $\mathbf{W}^{(k)}$  apparaissant dans la relation précédente s'écrit :

$$\mathbf{W}^{(k)} = \operatorname{diag} \left( W_1^{(k)}, \dots, W_i^{(k)}, \dots, W_M^{(k)} \right), \quad (8)$$

où  $M$  est le nombre de points du maillage spatial d'identification et :

$$W_i^{(k)} = \left[ \max \left( \epsilon, \left\| \bar{\mathbf{F}}_m^{(k)}[i] \right\|_2 \right) \right]^{q-2}, \quad (9)$$

$$\bar{\mathbf{F}}_m^{(k)}[i] = \left[ F_i^{(k)}(f_1), \dots, F_i^{(k)}(f_N) \right]^T.$$

Dans la relation précédente,  $\epsilon$  est un nombre réel positif agissant comme un paramètre d'amortissement, dans la mesure où il évite d'avoir des pondérations infinies lorsque  $\left\| \bar{\mathbf{F}}_m^{(k)}[i] \right\|_2 \rightarrow 0$  et  $q < 2$ . Pratiquement, le paramètre d'amortissement est calculé durant la phase d'initialisation de manière à ce que 5% des valeurs de  $\left| \bar{\mathbf{F}}_m^{(0)} \right|$  soient inférieures ou égales à  $\epsilon$ .

À ce stade, il est intéressant de donner la forme explicite de l'Eq. (6) afin de souligner les principales propriétés de la régularisation multiplicative proposée. Tous calculs faits, il vient :

$$\bar{\mathbf{F}}_m^{(k+1)} = \left( \bar{\mathbf{H}}^H \bar{\mathbf{H}} + \alpha^{(k+1)} \bar{\mathbf{W}}^{(k)} \right)^{-1} \bar{\mathbf{H}}^H \bar{\mathbf{X}}, \quad (10)$$

où  $\alpha^{(k+1)}$  est le paramètre de régularisation adaptatif, défini tel que :

$$\alpha^{(k+1)} = \frac{\left\| \bar{\mathbf{X}} - \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{F}}_m^{(k)} \right\|_2^2}{\left\| \bar{\mathbf{W}}^{(k)1/2} \bar{\mathbf{F}}_m^{(k)} \right\|_2^2}. \quad (11)$$

La relation précédente montre clairement que l'approche multiplicative évite la sélection d'un paramètre de régularisation optimal dès la phase d'initialisation du processus itératif, dans la mesure où le paramètre de régularisation adaptatif ajuste automatiquement l'importance du terme de régularisation tout au long du processus de résolution. Cette caractéristique constitue l'un des points forts de la régularisation multiplicative.

### 4.2 Choix de la solution initiale

L'algorithme de résolution étant itératif, le choix de la solution initiale est crucial, d'autant plus que la fonctionnelle à minimiser peut être non convexe lorsque  $q \leq 1$ . La solution initiale est ici la solution obtenue à partir d'une approche additive de type Tikhonov, à savoir :

$$\bar{\mathbf{F}}_m^{(0)} = \left( \bar{\mathbf{H}}^H \bar{\mathbf{H}} + \alpha^{(0)} \bar{\mathbf{I}} \right)^{-1} \bar{\mathbf{H}}^H \bar{\mathbf{X}}, \quad (12)$$

où  $\bar{\mathbf{I}}$  est la matrice identité de dimension  $M \cdot N$  et  $\alpha^{(0)}$  est une estimation relativement grossière de la valeur convergée du paramètre de régularisation adaptatif.

Idéalement, le paramètre  $\alpha^{(0)}$  doit être déterminé sans utiliser de procédures de sélection ou de procédures coûteuses en temps de calcul pour préserver l'intérêt de la régularisation multiplicative. Pour cela, on peut remarquer que le paramètre de régularisation optimal est généralement compris entre la plus grande et la plus petite valeur singulière de  $\bar{\mathbf{H}}^H \bar{\mathbf{H}}$ . À partir de cette observation et une série d'expériences numériques, nous proposons une règle heuristique pour le choix du paramètre  $\alpha^{(0)}$ , qui peut se décomposer en trois étapes :

1. Trouver une estimation de la plus grande et de la plus petite valeur singulière de  $\bar{\mathbf{H}}^H \bar{\mathbf{H}}$ , notées respectivement  $\hat{\sigma}_1$  et  $\hat{\sigma}_n$ .

Une borne supérieure de la plus grande valeur singulière  $\sigma_1$  est donnée par la relation suivante [8] :

$$\widehat{\sigma}_1(\overline{\mathbf{H}}^H \overline{\mathbf{H}}) = \sqrt{\|\overline{\mathbf{H}}^H \overline{\mathbf{H}}\|_{\infty} \|\overline{\mathbf{H}}^H \overline{\mathbf{H}}\|_1}. \quad (13)$$

Une borne inférieure de la plus petite valeur singulière est obtenue à partir de  $\widehat{\sigma}_1$  et d'une estimation  $\widehat{\kappa}$  du nombre de conditionnement de  $\overline{\mathbf{H}}^H \overline{\mathbf{H}}$ , c'est-à-dire :

$$\widehat{\sigma}_n(\overline{\mathbf{H}}^H \overline{\mathbf{H}}) = \frac{\widehat{\sigma}_1(\overline{\mathbf{H}}^H \overline{\mathbf{H}})}{\widehat{\kappa}(\overline{\mathbf{H}}^H \overline{\mathbf{H}})}. \quad (14)$$

2. Définir un ensemble  $S_{\alpha_0}$  de valeurs possibles du paramètre  $\alpha^{(0)} \in [\widehat{\sigma}_n, \widehat{\sigma}_1]$  en utilisant un pas logarithmique constant pour tenir compte de la décroissance des valeurs singulières.
3. Choisir  $\alpha^{(0)} = \text{median}(S_{\alpha_0})$ .

Parce que la procédure de choix de  $\alpha^{(0)}$  est heuristique, elle peut parfois donner une solution initiale trop éloignée du bassin d'attraction de la solution. Dans ce cas, il est toujours possible de définir  $\alpha^{(0)}$  comme le paramètre de régularisation sélectionné, par exemple, par la méthode de la courbe en L. Cependant, le temps de calcul de la solution est alors affecté en proportion de la taille de la matrice de transfert globale  $\overline{\mathbf{H}}$ .

### 4.3 Choix du critère d'arrêt

L'approche multiplicative offre une définition naturelle du critère d'arrêt du processus itératif, basée sur la variation relative du paramètre de régularisation adaptatif entre deux itérations successives, à savoir :

$$\delta = \frac{|\alpha^{(k+1)} - \alpha^{(k)}|}{\alpha^{(k)}}. \quad (15)$$

Classiquement, le processus itératif est arrêté lorsque  $\delta$  atteint une certaine tolérance, fixée ici à  $10^{-8}$ .

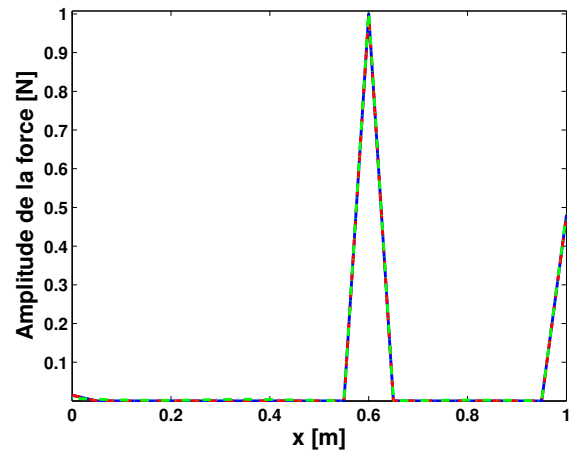
## 5 Validation numérique

Dans la présente validation numérique, la structure étudiée est une poutre d'acier simplement appuyée de dimensions  $1 \times 0.03 \times 0.01 \text{ m}^3$ , excitée par une force ponctuelle d'amplitude unitaire sur une plage de fréquences comprise entre 50 et 500 Hz. La coordonnée de la force, mesurée à partir de l'extrémité gauche de la poutre, est  $x_0 = 0.6$  m. Par ailleurs, pour simuler le champ vibratoire  $\overline{\mathbf{X}}$ , un modèle éléments finis de la poutre, composé de 20 éléments, a été utilisé. Il est également important de noter qu'un bruit additif Gaussien a été ajouté au champ vibratoire, de manière à avoir un rapport signal-à-bruit de 30 dB. Enfin, pour réaliser l'identification, un modèle éléments finis de la poutre libre à ses deux extrémités a été employé pour calculer  $\overline{\mathbf{H}}$  en supposant que seul le déplacement transversal de la poutre peut être mesuré. Le principal intérêt d'un tel modèle de reconstruction est de permettre non seulement l'identification de la force ponctuelle, mais également celle des réactions aux extrémités [3, 9].

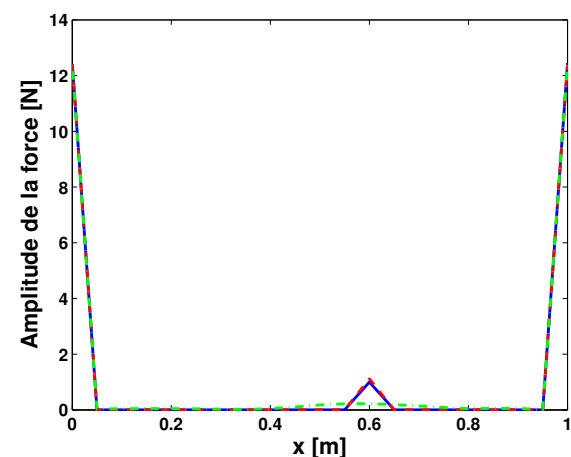
Pour mettre clairement en évidence l'intérêt de la régularisation espace-fréquence, il est intéressant de la comparer avec sa version « fréquence par fréquence », à savoir :

$$\mathbf{F}_m(f_j) = \underset{\mathbf{F}(f_j)}{\text{argmin}} \|\mathbf{X}(f_j) - \mathbf{H}(f_j)\mathbf{F}(f_j)\|_2^2 \cdot \|\mathbf{F}(f_j)\|_q^q. \quad (16)$$

Pour comparer correctement les deux approches, il faut évaluer leur capacité à identifier les sources mécaniques excitant une structure. Pour cela, la définition du terme de régularisation est cruciale. L'analyse du cas test montre que la poutre est excitée uniquement par des forces ponctuelles large bande. Dans ce cas, il est donc raisonnable de choisir  $q = 0.5$  [voir section 3]. Les reconstructions proposées en Fig. 1 montrent que les deux stratégies de régularisation reconstruisent correctement les efforts de réaction aux extrémités. En revanche, on peut remarquer la régularisation « fréquence par fréquence » ne parvient pas à identifier la force ponctuelle sur l'une des fréquences de résonance de la poutre, ce qui n'est pas le cas de la régularisation espace-fréquence [voir Fig. 1b].



(a) 150 Hz : Fréquence quelconque

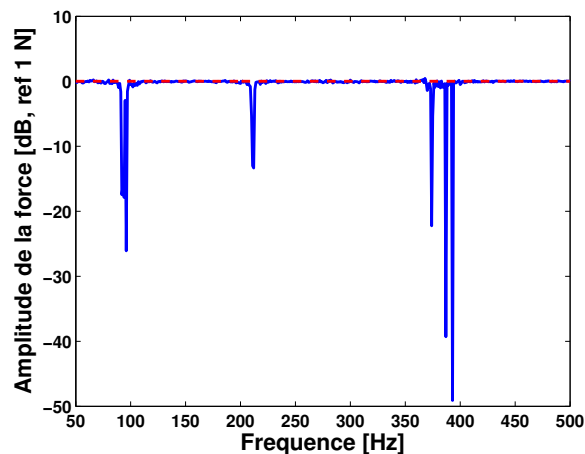


(b) 211 Hz : Fréquence de résonance

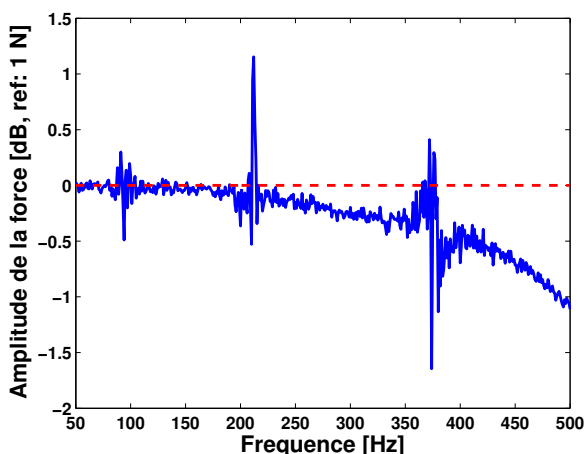
FIGURE 1 – Reconstruction spatiale du champ excitateur (a) à une fréquence quelconque et (b) à une fréquence de résonance de la poutre

(—) Référence,  
 (---) Régularisation espace-fréquence  
 et (- - -) Régularisation fréquence par fréquence

Cette observation est confirmée par l'analyse du spectre de la force ponctuelle reconstruit par les deux approches et présenté en Fig. 2. En effet, le spectre reconstruit fréquence par fréquence présente d'importantes erreurs autour des fréquences de résonance de la poutre (94 Hz, 211 Hz et 375 Hz dans la bande de fréquence d'intérêt). Au contraire, l'erreur de reconstruction est d'au plus 1.6 dB sur toute la bande de fréquences en utilisant la régularisation espace-fréquence.



(a) Régularisation fréquence par fréquence



(b) Régularisation espace fréquence

FIGURE 2 – Spectre de la force ponctuelle identifiée  
(—) Spectre reconstruit and (---) Spectre de référence

Finalement, on peut noter que la stratégie de régularisation présentée dans cette contribution semble bien adaptée à la résolution de problèmes de reconstruction de grandes tailles, dans la mesure où le calcul d'une SVD, qui est généralement utilisée pour la détermination du paramètre de régularisation optimal dans les régularisations additives, est évité. Ceci est d'autant plus intéressant que le calcul d'une SVD peut être gourmand en termes de temps de calcul, voire même impossible pour des systèmes de grandes tailles sur un ordinateur personnel.

## 6 Conclusion

Dans la présente étude, notre motivation initiale était de proposer une formulation du problème d'identification d'effort exploitant pleinement l'information disponible a priori sur le type de sources et la nature des signaux d'excitation. Pour cela, une régularisation multiplicative espace-fréquence a été introduite. Cette formulation est relativement flexible, puisqu'elle peut être utilisée pour identifier des sources large bande ponctuelles ou réparties. En pratique, le problème d'identification est résolu à partir d'un algorithme IRLS. L'application de cette stratégie de régularisation à un exemple académique est encourageante, dans la mesure où elle permet d'obtenir des reconstructions pertinentes, en particulier aux fréquences de résonance de la structure.

## Références

- [1] A. N. Tikhonov, Regularization of incorrectly posed problems, *Soviet Mathematics* **4**, 1624-1627 (1963).
- [2] A. N. Thite and D. J. Thompson, The quantification of structure-borne transmission paths by inverse methods. Part 2 : Use of regularization techniques, *Journal of Sound and Vibration* **264**, 433-451 (2003).
- [3] M. Aucejo and O. De Smet, Bayesian source identification using local priors, *Mechanical Systems and Signal Processing* **66-67**, 120-136 (2016).
- [4] A. Rezayat and V. Nassiri and B. De Pauw and J. Ertveldt and S. Vanlanduit and P. Guillaume, Identification of dynamic forces using group-sparsity in frequency domain, *Mechanical Systems and Signal Processing* **70-71**, 756-768 (2016).
- [5] A. Beck and M. Teboulle, A Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm for Linear Inverse Problems, *SIAM Journal on Imaging Sciences* **2**, 189-202 (2009).
- [6] P. M. van den Berg and A. L. van Broekhoven and A. Abubakar, Extended contrast source inversion, *Inverse Problems* **15**, 1325-1344 (1999).
- [7] A. Gramfort and M. Kowalski and M. Hamalainen, Mixed-norm estimates for the M/EEG inverse problem using accelerated gradient methods, *Physics in Medicine and Biology* **57**, 1937-1961 (2012).
- [8] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, New York (1991).
- [9] C. Renzi and C. Pezerat and J.-L. Guyader, Vibratory source identification by using the finite element model of a subdomain of a flexural beam, *Journal of Sound and Vibration* **332**, 545-562 (2013).