

# CFA/VISHNO 2016

## Les méthodes à base d'ondes pour le calcul en MF et HF

P. Ladeveze

LMT Cachan, 61 avenue du President Wilson, 94230 Cachan, France  
ladeveze@lmt.ens-cachan.fr



LE MANS

De nombreuses structures industrielles sont aujourd'hui dimensionnées en fonction de leur comportement dynamique. La restitution de la réponse vibro-acoustique complète incluant la partie "moyennes fréquences" est hors de portée des outils de calcul actuels basés sur les techniques éléments finis et les schémas numériques explicites. Ces stratégies de calcul conduisent à des temps de calcul véritablement prohibitifs. Le calcul de la partie dite transitoire de la solution sur la bande « moyennes fréquences » pour des structures industrielles est également un grand défi.

Les approches à base d'ondes constituent une réponse à ces défis, le problème à résoudre étant alors un problème de vibration forcée ou d'acoustique sur une bande de fréquences incluant à la fois les basses et moyennes fréquences. Elles entrent pour la plupart dans la grande famille des méthodes dites « Discontinuous Galerkin » car les fonctions de forme sont discontinues d'un sous-domaine à l'autre.

Dans cette présentation, nous tenterons de donner l'état de l'art tout en suivant notre propre approche appelée « Variational Theory of Complex Rays » et son extension « Weak-Trefftz Discontinuous Galerkin method ». Outre de nombreuses illustrations numériques, des solutions à des problèmes industriels seront également présentées. L'accent sera mis aussi sur les limites de ces approches à base d'ondes et les défis scientifiques qu'elles ouvrent.

## 1 Etat de l'art

L'élaboration de théories et de stratégies de calcul pour traiter les moyennes et hautes fréquences reste un challenge d'actualité. Au niveau des moyennes fréquences, des approches à base d'ondes ont vu le jour ces dernières années et ont permis de reculer considérablement la limite des calculs EF traditionnels due à une forte pollution bien comprise aujourd'hui.

Ces méthodes mettent en jeu des fonctions de forme qui sont des ondes et donc des solutions des équations intérieures. Nécessairement, ces fonctions de forme sont discontinues d'un élément à l'autre ou d'un sous-domaine à l'autre. Aussi ces méthodes se distinguent par le traitement des conditions aux limites et des conditions de transmission aux interfaces entre sous-domaines ou éléments ; on peut citer la version de la méthode de la Partition de l'Unité [1], l'« Ultra Weak Variational Method » [2,3], la « Plane Wave Discontinuous Galerkin Method » [4], la « Least-Squares Method » [5,6], la « Discontinuous Enrichment Method » [7,8], l'« Element-Free Galerkin Method » [9], la « Wave Boundary Element Method » [10], la « Wave-Based Method » [11,12] et la « Variational Theory of Complex Rays » [15-24]. Ces méthodes pour la plupart entrent dans la famille des méthodes de Galerkin discontinues [13,14]. Des résultats mathématiques concernant la convergence pourront être trouvés dans [17,18,25].

Un grand avantage de la « Variational Theory of Complex Rays » (VTCR) est justement que le traitement des conditions aux interfaces est automatique. Une autre distinction est la prise en compte des modes « bord » ou « coin » en vibro-acoustique ce qui est maintenant suivi dans la plupart des théories actuelles. La prise en compte d'un cadre stochastique ne pose pas de problème particulier. Toutefois ces méthodes à base d'ondes qui apportent un plus considérable par rapport aux méthodes EF traditionnelles sont limitées aux moyennes fréquences. En effet, elles conduisent à la résolution d'un système mal conditionné qui ne peut pas être traité aujourd'hui pour de trop hautes fréquences surtout dans un cadre stochastique. Notons aussi que les approches HF c'est-à-dire la SEA et ses approches dérivées n'apportent pas, à part dans des situations particulières, de solution pour les MF, car ce sont

avant tout des approches globales tant en espace qu'en fréquence.

## 2 La VTCR en tant que DG méthode : principes et applications

### 2.1 Principes

Le problème modèle est le problème d'acoustique classique défini sur le domaine  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega = \partial_1\Omega \cup \partial_2\Omega$  qui, avec des notations usuelles, s'écrit (voir Fig. 1):

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } u \in \mathbf{H}^1(\Omega) \text{ tel que} \\ &(1 + i\eta) \Delta u + k^2 u + r_d = 0 \text{ dans } \Omega \quad (1) \\ &u = u_d \text{ sur } \partial_1\Omega \\ &(1 + i\eta)\partial_n u + h i k u = g_d \text{ sur } \partial_2\Omega \end{aligned}$$

La DG-formulation variationnelle, sous-jacente à la VTCR est équivalente au problème de référence (1). Supposons que le domaine  $\Omega$  soit divisé en sous-domaines ou éléments  $\Omega_E$ , avec  $E \in \mathbf{E}$  (voir Fig. 1). L'interface entre deux sous-domaines  $E$  et  $E'$  est notée  $\Gamma_{EE'}$ . L'interface entre  $\Omega_E$  et la frontière  $\partial\Omega$  est notée  $\Gamma_{EE}$ . La VTCR est bâtie sur l'espace admissible :

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \{ u \mid u|_{\Omega_E} \in \mathbf{U}_E \} \\ &\text{avec} \\ \mathbf{U}_E &= \{ u_E \mid u_E \in \mathbf{V}_E \subset \mathbf{H}^1(\Omega_E); \\ &\quad (1 + i\eta) \Delta u + k^2 u + r_d = 0 \text{ on } \Omega_E \} \end{aligned}$$

Les espaces vectoriels (avec  $r_d = 0$ ) associés à  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{U}_E$  sont notés  $\mathbf{U}_0$  et  $\mathbf{U}_{E,0}$ . On introduit classiquement :

$$\{u\}_{EE'} = (u_E + u_{E'})|_{\Gamma_{EE'}} \text{ et } [u]_{EE'} = (u_E - u_{E'})|_{\Gamma_{EE'}}.$$

Notant  $\mathbf{q}_u = (1+i\eta)\mathbf{grad} u$ , la VTCR-formulation peut s'écrire: Trouver  $u \in \mathbf{U}$  tel que : (2)

$$\begin{aligned} \text{Re} \left( -ik \left( \sum_{E,E' \in \mathbf{E}} \int_{\Gamma_{EE'}} \left( \frac{1}{2} (\mathbf{q}_u \cdot \mathbf{n})_{EE'} \{v\}_{EE'} - \frac{1}{2} [\tilde{\mathbf{q}}_v \cdot \mathbf{n}]_{EE'} [u]_{EE'} \right) dS \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\Gamma_{EE} \cap \partial_1\Omega} \tilde{\mathbf{q}}_v \cdot \mathbf{n} (u - u_d) dS \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\Gamma_{EE} \cap \partial_2\Omega} \frac{1}{2} (-\tilde{\mathbf{q}}_v \cdot \mathbf{n} (u + (\mathbf{q}_u \cdot \mathbf{n} - g_d)/(hik)) + \tilde{v} (\mathbf{q}_u \cdot \mathbf{n} + hiku - g_d)) dS \right) \right) \end{aligned}$$

$$= 0 \quad \forall v \in U_0$$

où «  $\tilde{A}$  » et  $R_c(A)$  désignent respectivement le conjugué de  $A$  et sa partie réelle. La quantité (2) est une dissipation. La VTQR est alors obtenue en remplaçant  $U_E$  par un sous-espace de dimension finie  $U_{hE}$ . Les espaces associés sont alors  $U_h$  et  $U_{h0}$  qui remplacent  $U$  et  $U_0$  dans la formulation (2). Généralement, on utilise des ondes planes ce qui suppose que le milieu soit homogène par sous-domaine ; la discrétisation est effectuée par sous-domaine sur l'amplitude en tant que fonction du vecteur d'onde.

## 2.2 Applications

De nombreuses applications ont été menées pour analyser le comportement de la VTQR ainsi que ses performances, tant en acoustique que pour les problèmes de vibration et de vibro-acoustique. L'article de synthèse [17] reprend les résultats majeurs qui font de la VTQR une méthode mature. Les applications industrielles concernent le calcul 3D d'un habitacle de véhicule en acoustique MF et la propagation BF et MF de chocs pyrotechniques dans les structures spatiales.

Ci-après est détaillé un exemple académique qui est un assemblage de coques soumis à une excitation de 2000Hz [24], l'amortissement étant 0,001. Le calcul avec la TVRC nécessite par sous-domaine :

- comportement de flexion : 100 rayons + 41 rayons évanescents
- comportement de membrane : 40 rayons (L) + 40 rayons (T).

Les solutions VTQR et FEM représentées Fig.3 sont très proches. Les caractéristiques des deux calculs sont données Table 1; elles montrent clairement le plus considérable apporté par les méthodes à base d'ondes.

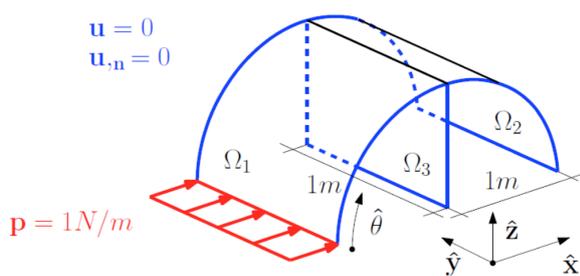


Figure 2 Exemple académique : assemblage de coques d'épaisseur 3 mm soumis à une excitation à 2000Hz (amortissement : 0,001)

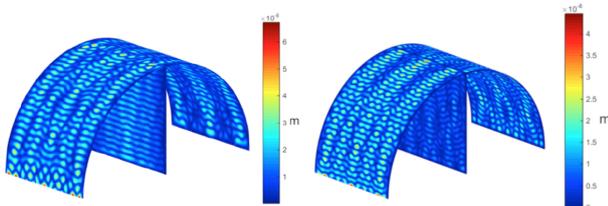


Figure 3 Comparaison des solutions VTQR (à gauche) et FEM (à droite), l'erreur étant 8%

	DoFs	Time	Memory
VTQR	612	4 sec	70 Kb
FEM	3 millions	1153 sec	10 Gb

Table 1 Comparaison des performances

## 3. Extensions

Les extensions actuelles concernent deux situations différentes. La première est relative à la considération de cas où il est raisonnable d'exploiter à la fois la méthode des éléments finis et la VTQR. C'est l'objet de la "Weak Trefftz Variational Theory of Complex Ray" introduite dans [25]. L'autre extension concerne les problèmes d'acoustique MF pour les milieux hétérogènes tel que  $k^2$  soit linéaire par morceau ; une illustration est la simulation d'un port soumis à une vague venant du large. Les travaux en cours portent sur l'utilisation de la « Weak-VTQR » et de la VTQR en utilisant des « ondes » construites à partir des fonctions d'Airy.

## Références

- [1] T. Strouboulis, R. Hidajat, *Partition of unity method for Helmholtz equation: q-convergence for plane-wave and wave-band local bases*, Appl.Math. 51 (2006) 181–204.
- [2] O. Cessenat, B. Despres, *Application of an ultra weak variational formulation of elliptic PDEs to the two-dimensional Helmholtz problem*, SIAM J. Numer. Anal. 35 (1998) 255–299.
- [3] T. Huttunen, J. Kaipio, P. Monk, *An ultra-weak method for acoustic fluid–solid interaction*, J. Comput. Appl. Math. 213 (2008) 166–185..
- [4] R. Hiptmair, A. Moiola, I. Perugia, *Plane wave discontinuous Galerkin methods for the 2D Helmholtz equation: analysis of the p-version*, SIAM J. Numer. Anal. 49 (2011) 264–284.
- [5] P. Monk, D. Wang, *A least-squares method for the Helmholtz equation*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 175 (1999) 121–136.
- [6] G. Gabard, P. Gamallo, T. Huttunen, *A comparison of wave-based discontinuous Galerkin, ultra-weak and least-square methods for wave problems*, Internat. J. Numer. Methods Engrg. 85 (2011) 380–402.
- [7] C. Farhat, I. Harari, L. Franca, *The discontinuous enrichment method*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 190 (2001) 6455–6479.
- [8] C. Farhat, R. Tezaur, J. Toivanen, *A domain decomposition method for discontinuous Galerkin discretizations of Helmholtz problems with plane waves and Lagrange multipliers*, Internat. J. Numer. Methods Engrg. 78 (2009) 1513–1531.
- [9] P. Bouillard, S. Suleau, *Element-free Galerkin solutions for Helmholtz problems: formulation and*

- numerical assessment of the pollution effect*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 162 (1998) 317–335.
- [10] H. Beriot, E. Perrey-Debain, M. Ben Tahar, C. Vayssade, *Plane wave basis in Galerkin BEM for bidimensional wave scattering*, Eng. Anal. Bound. Elem. 34 (2010) 130–143.
- [11] W. Desmet, P. Sas, D. Vandepitte, *An indirect Trefftz method for the steady-state dynamic analysis of coupled vibro-acoustic systems*, Comput. Assist. Mech. Eng. Sci. 8 (2001) 271–288.
- [12] B. Van Genechten, O. Atak, B. Bergen, E. Deckers, S. Jonckheere, J.S. Lee, A. Maressa, K. Vergote, B. Pluymers, D. Vandepitte, et al., *An efficient wave based method for solving Helmholtz problems in three-dimensional bounded domains*, Eng. Anal. Bound. Elem. 36 (2012) 63–75.
- [13] B. Cockburn, G.E. Karniadakis, C.-W. Shu, *Discontinuous Galerkin Methods: Theory, Computation, and Applications*, in: *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, vol. 11, 2000.
- [14] D.N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, L.D. Marini, *Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems*, SIAM J. Numer. Anal. 39 (2002) 1749–1779.
- [15] P. Ladeveze, *A new computational approach for structure vibrations in the medium frequency range*, C. R. Acad. Sci. Paris 332 (1996) 849–856.
- [16] P. Ladeveze, L. Arnaud, P. Rouch, C. Blanze, *The variational theory of complex rays for the calculation of medium-frequency vibrations*, Eng. Comput. 18 (2001) 193–214.
- [17] P. Ladeveze, A. Barbarulo, H. Riou, L. Kovalevsky. *The Variational Theory of Complex Rays, Chapter 5 in « Mid-Frequency »*, eds W. Desmet, B. Pluymers, O. Atak, Katholieke Universiteit Leuven, 155-204, 2012.
- [18] L. Kovalevsky, P. Ladeveze, H. Riou, M. Bonnet, *The variational theory of complex rays for three-dimensional Helmholtz problems*, J. Comput. Acoust. (2012).
- [19] H. Riou, P. Ladeveze, B. Sourcis, *The multiscale VTTCR approach applied to acoustics problems*, J. Comput. Acoust. 16 (2008) 487–505.
- [20] [20] H. Riou, P. Ladeveze, B. Sourcis, B. Faverjon, L. Kovalevsky, *An adaptative numerical strategy for the medium-frequency analysis of Helmholtz's problem*, J. Comput. Acoust. 20 (2012) 1250001.
- [21] L. Kovalevsky, P. Ladeveze, H. Riou, *The Fourier version of the variational theory of complex rays for medium-frequency acoustics*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 225 (2012) 142–153.
- [22] H. Riou, P. Ladeveze and L. Kovalevsky. *The Variational Theory of Complex Rays: An answer to the resolution of mid-frequency 3D engineering problems*. J Sound Vib. 332 : 1947-1960. 2013
- [23] P. Ladeveze and M. Chevreuil, *A new computational method for transient dynamics including the low- and the medium-frequency ranges*. International Journal for Numerical Methods in Engineering , 64(4) : 503-527, 2005
- [24] A. Cattabiani, A. Barbarulo. H. Riou and P. Ladeveze, *Variational theory of complex rays applied to shell structures: in-plane inertia, quasi-symmetric ray distribution, and orthotropic materials*, Comp. Mech. DOI 10.1007/s00466-015-1214-6, 2015
- [25] P. Ladeveze and H. Riou. *On Trefftz and weak Trefftz discontinuous Galerkin approaches for medium-frequency acoustics*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering , 278 : 729-743, 2014