

# CFA/VISHNO 2016

## **Effet d'une Distribution Pré-Fractale sur le comportement Vibro-Acoustique d'une Structure Sandwich en Flexion**

J. Derré et F. Simon

ONERA, 2 avenue Edouard Belin, 31055 Toulouse Cedex 4, France  
jeremie.derre@onera.fr



LE MANS

La réduction des vibrations et du rayonnement acoustique de structures légères peut être réalisée en augmentant l'amortissement avec, par exemple, l'utilisation de matériaux visco-élastiques répartis surfaciquement ou sous forme de patches. La masse ajoutée devient alors souvent préjudiciable, surtout dans des domaines comme l'aéronautique. Le comportement vibro-acoustique d'une structure surchargée localement, à l'aide d'hétérogénéités réparties selon un schéma auto-similaire, est examiné. Le système est une poutre composite, type sandwich à âme nid d'abeille, travaillant en flexion. Il est modélisé par un matériau homogénéisé dont le comportement mécanique est approximé avec un schéma aux différences finies. Les hétérogénéités (sur-masses disposées au sein de la structure), réparties selon un schéma de Cantor, modifient le comportement modal classique et font apparaître des zones de forte localisation du déplacement transverse, dues aux diffractions multiples des ondes sur le schéma pré-fractal. Le modèle mécanique vibratoire est présenté. Des résultats concernant l'impact de l'ordre du schéma auto-similaire sont présentés, ainsi que l'influence de la masse ajoutée par la surcharge locale. L'évolution de la densité modale de la structure surchargée est également analysée. Enfin, le comportement acoustique que présentent ces modes structurels locaux est également étudié *via* le facteur de rayonnement acoustique modal.

## 1 Introduction

Depuis les années 1970, le comportement des structures intégrant des distributions d'éléments additionnels a été largement étudié, avec des distributions périodiques et aléatoires [1, 2], à schémas auto-similaires [3, 4]. On peut également penser aux travaux numériques et expérimentaux sur des structures dites *multi-span* [5, 6], ou sous le nom de méta-matériaux [7]. De petits éléments additionnels (irrégularités, hétérogénéités ou autres) sont introduits dans ces structures. Ils modifient leur comportement dynamique en créant des phénomènes de localisation de l'énergie, correspondant à des modes naturels de vibrations, dans des zones privilégiées du système. Un changement de distribution modale en fréquence est également observé.

Des études récentes ont mis en avant des résultats vibratoires encourageants sur des configurations de structures auto-similaires de type corde [3] et membrane [4]. Les simulations identifient des phénomènes de localisation du déplacement transverse. Les courbes de *density of states* sont analysées, ainsi que le rôle de la distribution des hétérogénéités et les modifications qu'elles engendrent sur les déformées modales.

Dans l'industrie aéronautique, les panneaux sandwichs à cœurs cellules nid d'abeille (abrégiés nidas par la suite) sont largement employés, notamment pour leur grande rigidité en flexion le tout pour une moindre masse. Mais cet allègement de masse s'accompagne d'une augmentation de la transmission acoustique en deçà de la fréquence critique des panneaux [8].

Il existe aujourd'hui des solutions actives et passives pour pallier ce problème. On peut penser à l'utilisation de matériaux visco-élastiques amortissants collés sur l'extérieur des peaux, soit répartis sur l'ensemble de la surface, soit sous forme de patches localisés. Une deuxième technique, utilisée dans l'industrie hélicoptère, est celle du remplissage de l'ensemble des cellules nidas avec de petits éléments (par exemple des sphères creuses en élastomère).

Dans nos travaux, on cherche à exploiter la géométrie du cœur nida créant naturellement un réseau de cellules en n'en remplissant que certaines selon un schéma auto-similaire. En effet, pour une onde mécanique de flexion, le passage entre deux milieux de natures et densités différentes (cellule

vide et cellule remplie de sphères) peut être vu comme une rupture d'impédance mécanique, donnant alors naissance à des phénomènes de réflexion, diffraction et transmission, voire de dissipation. On va donc chercher à utiliser les propriétés de réseaux de cellules remplies pour créer des modes localisés, résultant de la stationnarité des ondes entre hétérogénéités.

On présente dans un premier temps le modèle vibratoire développé pour une structure 1D homogénéisée intégrant une distribution auto-similaire de sur-masses selon un schéma inspiré de l'ensemble de Cantor. On analyse un exemple de mode au comportement vibratoire localisé, pour des structures auto-similaires de différents ordres. Une analyse de la courbe de densité modale intégrée est ensuite proposée, ainsi que son lien avec les surcharges et modes localisés. Enfin, cette étude présente le couplage fluide-structure, avec le calcul du facteur de rayonnement acoustique par mode vibratoire sollicité.

## 2 Modèle vibratoire d'une poutre homogénéisée en flexion

On présente dans un premier temps le modèle vibratoire d'une structure sandwich non-surchargée en flexion, développé pour notre étude.

### 2.1 Homogénéisation du composite

Dans la modélisation du rayonnement acoustique induit par la vibration mécanique (interaction fluide-structure), les ondes de flexion ont un rôle dominant dans le domaine des fréquences audibles [9]. Les déplacements transverses importants créés par la flexion perturbent considérablement le fluide adjacent, les impédances mécaniques des ondes de flexion et des ondes acoustiques étant du même ordre de grandeur. Les échanges énergétiques entre les deux milieux sont ainsi facilités. De plus, dans notre configuration, le matériau travaille principalement en flexion de par sa position et les excitations auxquelles il est soumis en tant que composant principal des panneaux d'habillage.

En considérant les hypothèses de Nilsson [10] (homogénéité et isotropie de toutes les couches et peaux supposées minces), on peut déterminer la rigidité équivalente de la structure composite à l'aide du théorème de Huygens

(transport du moment d'inertie par rapport à la ligne moyenne d'une peau à la ligne moyenne de la poutre sandwich). On obtient alors la rigidité équivalente  $D_{sand}$  suivante

$$\begin{aligned} D_{sand} &= E_c I_c + 2 \cdot E_p I_p, \\ &= E_c \frac{L_y h_c^3}{12} + 2 \cdot E_p \left( \frac{L_y h_p^3}{12} + L_y h_p \left( \frac{h_c + h_p}{2} \right)^2 \right), \end{aligned} \quad (1)$$

où l'on identifie respectivement les modules d'Young et les moments d'inerties du cœur ( $c$ ) et des peaux ( $p$ ) par  $E$  et  $I$  ainsi que les épaisseurs des éléments constitutants  $h$  et la largeur de la poutre notée  $L_y$ .

L'article de Kim et Hwang [11] détaille les conditions de validité de l'approximation retenue dans notre cas. La rigidité de flexion propre des peaux rapportée à la ligne moyenne de la poutre est le terme prépondérant et la rigidité globale s'écrit alors comme l'Eq. (2)

$$D = E_p L_y h_p \frac{(h_c + h_p)^2}{2}, \quad (2)$$

faisant apparaître l'épaisseur ( $h_c + h_p$ ), procurant à l'ensemble une rigidité équivalente conséquente en flexion (appelé effet sandwich). Dans la suite de cet article, on considèrera notre structure comme un matériau homogène équivalent, décrit à l'aide des modèles précédents.

## 2.2 Poutre en flexion pure

Sous les hypothèses de poutre droite élancée d'Euler-Bernoulli et en considérant un mouvement harmonique de pulsation  $\omega$ , le déplacement transverse de la poutre  $u_z(x, t) = u(x) \times \exp(j\omega t)$  est régi par l'équation d'équilibre (3) suivante

$$\frac{D}{\rho S} \frac{d^4 u(x)}{dx^4} - \omega^2 \cdot u(x) = 0, \quad (3)$$

avec la section  $S = h L_y$  (hauteur totale de la poutre par sa largeur) et  $\rho$  la masse volumique du matériau.

## 2.3 Discrétisation

Le choix d'une approximation des dérivées et d'une discrétisation de la structure par la méthode des différences finies se justifie d'abord par la praticité et la souplesse de sa mise en œuvre vis-à-vis des distributions auto-similaires à différents ordres qui sont intégrés au sein du méta-matériau. Il sera également plus facile d'intégrer plusieurs types de conditions aux limites dans un schéma aux différences finies. De plus, si l'on respecte une résolution spatiale minimum (10 points par longueur d'onde dans nos gammes de fréquences d'intérêt), la discrétisation se prête également bien aux dimensions de notre système physique (cellule nida de diamètre 5mm typique des panneaux d'hélicoptère).

Soit une poutre sous les hypothèses citées précédemment, de longueur  $L_x$ , divisée en  $N$  segments de longueur  $h_x$  constante telle que  $L_x = h_x \times N$ . On définit alors un ensemble de  $(N + 1)$  points ( $x_i$ ) délimitant les segments tels que leur abscisse soit  $x_i = (i - 1) \times h_x$ , avec  $x_1$  et  $x_{N+1}$  les extrémités de la poutre. On définit enfin  $u(x_i) = u_i$  le déplacement transverse du point  $x_i$ .

En suivant la modélisation de [12], on approxime l'Eq. (3) grâce à un schéma centré d'ordre deux tel que l'équilibre autour d'un point  $u_i$  s'exprime comme

$$\frac{D}{\rho S h_x^4} [u_{i-2} - 4u_{i-1} + 6u_i - 4u_{i+1} + u_{i+2}] - \omega^2 \cdot u_i = 0. \quad (4)$$

### 2.3.1 Conditions aux limites

Dans cette étude, la poutre est simplement supportée dans sa largeur et libre dans sa longueur. Les conditions aux limites sont considérées parfaites. Le choix est lié au caractère analytique exact de ces conditions. Ainsi, le déplacement et le moment des forces de flexion sont nuls au niveau des appuis. On utilise ensuite une méthode d'intégration de ces conditions basée sur la création de points supplémentaires hors-domaine, que l'on lie avec des schémas aux différences finies pour être enfin substitués et intégrés dans les équations du domaine physique. Cette méthode est extensible à d'autres types de conditions aux limites.

### 2.3.2 Écriture matricielle

Les conditions aux limites intégrées, on obtient le système (5) suivant, comportant  $(N - 1)$  équations

$$\left\{ \begin{array}{l} (i = 2) : \frac{EI}{h_x^4} [5u_2 - 4u_3 + u_4] - \omega_n^2 \rho S \cdot u_2 = 0, \\ (i = 3) : \frac{EI}{h_x^4} [-4u_2 + 6u_3 - 4u_4 + u_5] - \omega_n^2 \rho S \cdot u_3 = 0, \\ \dots \\ (i) : \frac{EI}{h_x^4} [u_{i-2} - 4u_{i-1} + 6u_i - 4u_{i+1} + u_{i+2}] - \omega_n^2 \rho S \cdot u_i = 0, \\ \dots \\ (i = N-1) : \frac{EI}{h_x^4} [u_{N-3} - 4u_{N-2} + 6u_{N-1} - 4u_N] - \omega_n^2 \rho S \cdot u_{N-1} = 0, \\ (i = N) : \frac{EI}{h_x^4} [u_{N-2} - 4u_{N-1} + 5u_N] - \omega_n^2 \rho S \cdot u_N = 0. \end{array} \right. \quad (5)$$

On remarque ici l'utilisation d'un  $\omega_n$  discret. En effet, le système est de dimension  $n$  et il fixe ainsi le nombre de degrés de liberté. On reformule enfin le système comme (6), où la matrice  $[M]$  est symétrique à bande (pentadiagonale),  $[\mathbb{I}_{N-1}]$  est la matrice identité de dimension  $(N - 1)$ ,  $\mathbf{U}$  est le vecteur des déplacements transverses et  $\mathbf{0}_{N-1}$  le vecteur nul à  $(N - 1)$  composantes

$$\left\{ \left( \frac{EI}{\rho S \cdot h_x^4} \right) [M] - \omega_n^2 [\mathbb{I}_{N-1}] \right\} \mathbf{U} = \mathbf{0}_{N-1}. \quad (6)$$

Cette formulation fait clairement apparaître une écriture d'un problème aux valeurs propres, qui est résolu pour former une base modale du système (déformées et fréquences propres).

## 3 Comportement vibratoire d'une structure chargée par une distribution auto-similaire

On décrit dans cette partie comment sont intégrées les hétérogénéités au sein de la structure et comment elles sont modélisées dans le schéma aux différences finies. La distribution auto-similaire est ensuite présentée, ainsi que le comportement vibratoire de la poutre surchargée.

### 3.1 Intégration d'une hétérogénéité

Le brevet [13] déposé en 2015 présente le concept de sphères creuses réparties selon un schéma auto-similaire dans le cœur de panneaux composites. Les expériences préliminaires ont mis en avant la masse ajoutée comme le principe clé pour les structures surchargées.

Le principal mécanisme entrant en jeu est l'effet de masse ajoutée. Il est modélisé par un surchargement local d'un élément discret, représentant une hétérogénéité dans une cellule nida. D'un point de vue ondulatoire, il y a, comme cité précédemment, une rupture mécanique d'impédance qui est due au passage de deux milieux de densité différentes. Ainsi, l'ajout d'une masselotte  $M_{\text{sur}}$  sur l'élément  $k$  est modélisé comme l'Eq. (7)

$$\frac{D}{h_x^4} [u_{k-2} - 4u_{k-1} + 6u_k - 4u_{k+1} + u_{k+2}] - \omega_n^2 \left( \rho S + \frac{M_{\text{sur}}}{h_x} \right) \cdot u_k = 0. \quad (7)$$

On introduit alors le rapport de surchargement local de masse comme  $\alpha = \rho S / (\rho S + M_{\text{sur}}/h_x)$ , permettant d'arriver à la formulation suivante

$$\alpha \times \left( \frac{D}{\rho S h_x^4} [u_{k-2} - 4u_{k-1} + 6u_k - 4u_{k+1} + u_{k+2}] \right) - \omega_n^2 \cdot u_k = 0, \quad (8)$$

ce qui se traduit par la multiplication de la  $k$ -ème ligne de la matrice  $[M]$  par  $\alpha$  dans l'Eq. (6).

### 3.2 Schéma auto-similaire

La structure étudiée est la poutre homogénéisée décrite précédemment, surchargée par un schéma auto-similaire s'inspirant du motif de Cantor. Ce processus itératif de construction présente un rapport d'homothétie de trois. À chaque itération (ordre), on vient sub-diviser l'élément en trois et on enlève la partie centrale du domaine. Les trois premiers ordres de ce motif sont présentés sur la Figure 1, ainsi que l'ordre 0, c'est à dire la structure initiale. On s'inspire de ce schéma en surchargeant ponctuellement les extrémités des sous-ensembles créés. Est appelé fractal l'objet obtenu en itérant le processus à l'infini, d'où dans notre cas un motif dit pré-fractal à l'ordre d'itération  $n_{\text{frac}}$  fini.



FIGURE 1 – Motif original de Cantor, ordres 0 à 3.

En reprenant le modèle [3], une poutre auto-similaire d'ordre de pré-fractalité  $n_{\text{frac}}$  est surchargée de  $p$  masselottes avec

$$p = \sum_{i=1}^{n_{\text{frac}}} 2^i = 2 \times (2^{n_{\text{frac}}} - 1). \quad (9)$$

### 3.3 Localisation du déplacement transverse et comportement vibratoire

La Figure 2 présente une simulation de la déformée du mode 26 dans le cas non surchargé et dans le cas d'une poutre surchargée selon un motif auto-similaire de Cantor à l'ordre 2 et à l'ordre 3, modélisée par différences finies.

L'identification et la numérotation des modes correspond au nombre de nœuds, comme dans le cas d'une poutre homogène.

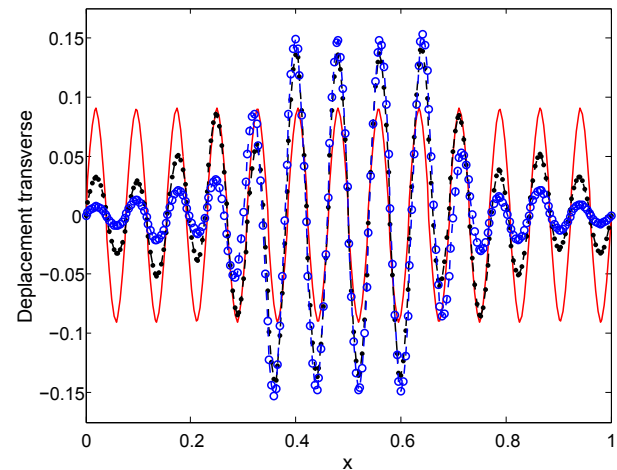


FIGURE 2 – Mode 26 d'une poutre simplement supportée : (—) déformée analytique (non surchargée), (---) déformée de la poutre pré-fractale d'ordre 2 et (-o-) d'ordre 3 (différences finies).

Une poutre ayant un surchargement local constant aura, en fonction de l'ordre du motif fractal, un nombre de masselottes différent et donc une masse totale finale différente. On définit alors le rapport de surchargement global  $\alpha_{\text{tot}}$  de la poutre comme le rapport des sur-masses ajoutées sur la masse de la poutre non-surchargée

$$\alpha_{\text{tot}} = \frac{p \times M_{\text{sur}}}{\rho L_x}. \quad (10)$$

La surcharge totale  $\alpha_{\text{tot}}$  de la poutre à l'ordre 2 est 32% et à l'ordre 3 de 75%.

Les déformées modales de la Figure 2 sont normalisées de sorte que la norme totale (énergétique) de chaque mode soit unitaire.

On observe ainsi que les déplacements de la partie centrale sont d'amplitudes nettement supérieures à celles des parties latérales. Pour la structure auto-similaire d'ordre 2, on peut observer un rapport de localisation (ratio entre les amplitudes maximales de la partie centrale et des parties latérales) proche de trois; pour la structure auto-similaire d'ordre 3, ce rapport est d'environ quatre.

On observe également que le comportement global de la courbe ne présente pas de singularité marquée : en effet, les ondes de flexion ne sont pas stoppées au niveau des hétérogénéités mais partiellement réfléchies et transmises. Le rapport de surchargement local  $\alpha_{\text{loc}}$  est de 0,071. Cela correspond, dans le cas d'un sandwich nida type hélicoptère, à une cellule remplie d'un matériau dont la masse volumique est d'environ  $3.8 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , dans les gammes d'élastomères et de polymères.

## 4 Rôle de la distribution pré-fractale sur la densité modale

Le phénomène de localisation des modes s'exprime et s'identifie clairement sur les courbes de densités modales intégrées, comme l'illustre la Figure 4.

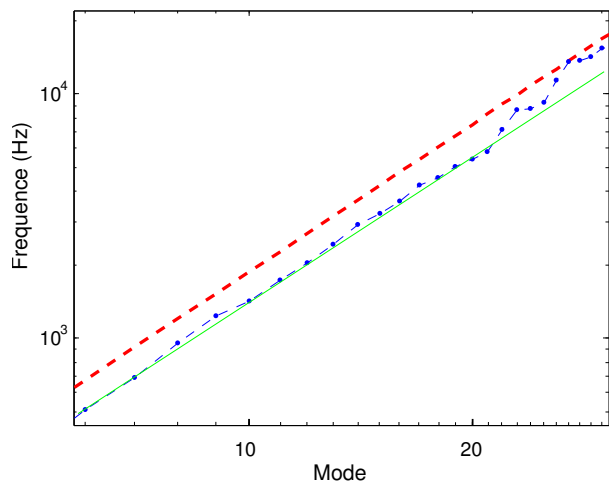


FIGURE 3 – Évolution de la fréquence de résonance des 30 premiers modes : (- -) poutre non surchargée, (- - -) poutre pré-fractale (ordre 3), et (—) poutre homogène de masse équivalente à la poutre pré-fractale, en échelles logarithmiques.

On analyse dans un premier temps la Figure 3, présentée en échelles logarithmiques, qui ne fait intervenir que la première série de modes localisés, ainsi que les modes étendus. On distingue alors plusieurs modifications de la densité modale, liées au caractère auto-similaire du surchargement :

- Le comportement de la densité modale de la poutre surchargée est quasi-identique pour des fréquences faibles à celle d'une poutre non-surchargée, ce qui se traduit par une pente constante sur un tracé en échelle logarithmique double. Le seul effet du surchargement sur ces modes est la modification de l'ordonnée à l'origine : en effet, la courbe bleue suit la tendance de la courbe verte, représentant une poutre de masse totale égale mais constituée d'un matériau homogène. Le fractal n'a pas d'influence sur les modes que l'on considère comme *étendus*, c'est à dire pour lesquels les extrema sont de même amplitude. Dans le cas de notre schéma de surchargement de Cantor, cela correspond aux 20 premiers modes.
- Une première rupture de pente apparaît dans la courbe, au mode 21. Elle correspond à l'apparition des premiers modes localisés. Ces modes présentent en effet une concentration de l'énergie vibratoire dans la partie centrale. Pour le mode 22, le ratio entre les amplitudes maximales des parties centrale et latérales est proche de trois.
- Deuxième rupture de pente au mode 23, présentant deux modes localisés dans les parties latérales non surchargées. Ces deux modes ont la particularité d'avoir un très fort ratio de localisation (supérieur à 3.5) ainsi que leurs deux fréquences de résonance très proches (1% d'écart relatif), ce qui se traduit sur la courbe de densité modale par une pente quasi nulle.
- Troisième rupture de pente au mode 25, liée à l'apparition de nouveaux modes localisés dans la partie centrale. La densité modale intégrée suit ensuite la même augmentation que lors de la première rupture de pente.

- Enfin, le mode 27 présente une fréquence très similaire à celle d'une poutre non surchargée (à peine 1% d'écart relatif). En effet, la disposition du surchargement à cette fréquence n'a que très peu d'effet sur la déformée car les masses ajoutées sont situées sur des nœuds de vibrations pour ce mode.

Si on observe la Figure 4 représentant la courbe de densité modale intégrée sur les 80 premiers modes, on voit que les comportements présentés précédemment se répètent à l'identique lorsque la fréquence augmente. On retrouve ainsi le pattern présenté sur les 27 premiers modes de la Figure 3 sur les 27 modes suivants (28 à 54), et ainsi de suite (zones identifiées par des lignes de tirets gris verticaux).

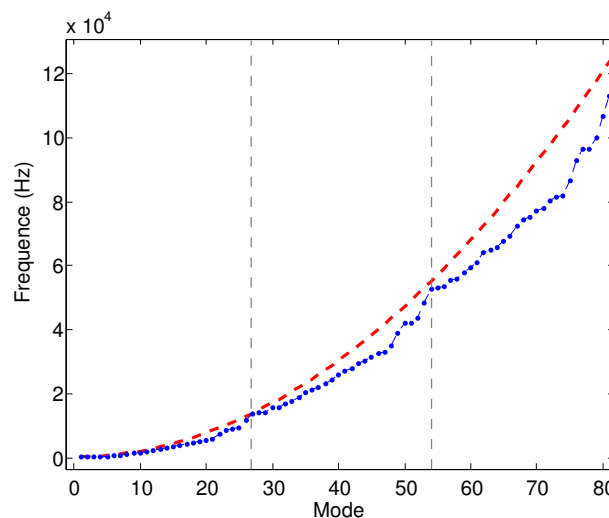


FIGURE 4 – Évolution de la fréquence de résonance des 80 premiers modes : (- -) poutre non surchargée, (- - -) poutre pré-fractale (ordre 3), en échelles linéaires.

La courbe de densité modale intégrée nous donne donc accès à des informations sur le caractère localisé ou étendu des modes, ainsi qu'aux types de localisation (centrale ou latérale) du déplacement transverse et à la disposition du surchargement. On a ici tous les éléments d'un réseau périodique couplé avec une distribution suivant un rapport d'échelle : c'est la signature de la structure pré-fractale.

## 5 Couplage vibro-acoustique et rayonnement

Cette partie étudie la modification de la réponse acoustique de la structure bafflée, issue du comportement vibratoire de la poutre surchargée. Les modes à déplacement transverse fortement localisé présentent un rayonnement atténué dans certaines gammes de fréquences.

### 5.1 Modèle de rayonnement

Comme l'ont montré Elliott et Johnson dans [14], on peut calculer la puissance acoustique totale rayonnée par une structure, soit *via* les amplitudes des modes de la structure vibrante, soit à partir des vitesses pariétales d'un réseau d'éléments rayonnants élémentaires.



En l'absence de formulation analytique, la deuxième option apparaît plus pertinente. La puissance acoustique rayonnée en champs lointain est donc évaluée à partir de la matrice de résistance de rayonnement (*Radiation Resistance Matrix*, abrégé RRM). Pour cela, on discrétise la surface vibrante en  $N_{\text{rad}}$  éléments rayonnants rectangulaires élémentaires, considérés comme des monopôles dont l'ensemble des vitesses vibratoires est décrit par le vecteur  $\mathbf{v}_e$ . Si on écrit l'ensemble des pressions pariétales agissant sur les éléments de la surface vibrante dans le vecteur  $\mathbf{p}_e$ , on peut alors formuler la puissance acoustique rayonnée en champs lointain de la surface bafflée, par l'Eq. (11)

$$P_{ac}(\omega) = \frac{S}{2N_{\text{rad}}} \Re\{\mathbf{v}_e^H(\omega) \cdot \mathbf{p}_e(\omega)\}, \quad (11)$$

où l'exposant  $^H$  désigne la transposée Hermitienne. Les éléments rayonnants élémentaires doivent être de taille inférieure aux longueurs d'onde structurelles et acoustiques (typiquement de l'ordre du quart de longueur d'onde) et la structure est considérée bafflée, selon les hypothèses décrites par [9, 14]. La limite en fréquence acoustique pourrait être atteinte pour des modes d'ordre assez élevé, mais dans la mesure où le facteur de rayonnement tend vers 1, cela signifie la fréquence critique modale est atteinte.

La pression pariétale peut être décrite à partir de la matrice d'impédance complexe telle que

$$\mathbf{p}_e(\omega) = [Z(\omega)] \mathbf{v}_e(\omega). \quad (12)$$

On définit ensuite la matrice de résistance de rayonnement  $[R]$  comme [9]

$$[R(\omega)] = \frac{\omega^2 S_e^2 \rho_0}{4\pi c_0} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sin(kr_{12})}{kr_{12}} & \dots & \frac{\sin(kr_{1N_x})}{kr_{1N_x}} \\ \frac{\sin(kr_{21})}{kr_{21}} & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\sin(kr_{N_x 1})}{kr_{N_x 1}} & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

pour reformuler l'Eq. (11) comme suit

$$P_{ac}(\omega) = \mathbf{v}_e^H(\omega) [R(\omega)] \mathbf{v}_e(\omega). \quad (14)$$

## 5.2 Simulation du facteur de rayonnement modal

On présente les résultats sous forme de facteurs de rayonnement acoustique. En effet, c'est un concept plus fondamental dans le sens où il s'affranchit de la taille absolue de l'élément rayonnant et de l'impédance caractéristique du milieu de propagation [15]. Il est défini comme

$$\sigma(\omega) = \frac{P_{ac}(\omega)}{P_{\text{vib}}(\omega)} = \frac{P_{ac}(\omega)}{\rho_0 c_0 S \langle v_n^2(\omega) \rangle}, \quad (15)$$

où  $\rho_0 c_0$  est l'impédance caractéristique de l'air et  $P_{\text{vib}}$  la puissance vibratoire de référence générée par un piston vibrant uniformément avec  $\langle v_n^2(\omega) \rangle$  la vitesse normale quadratique moyenne.

La Figure 5 présente une simulation du coefficient de rayonnement acoustique en fonction de la fréquence du mode 26, pour une poutre non-surchargée et une poutre pré-fractale d'ordre 3, ainsi que le mode 8 d'une poutre non-surchargée de longueur  $L_x/3$ . On parle alors de coefficient de rayonnement modal, noté  $\sigma_m$ , car il est tracé pour une excitation harmonique d'un seul mode  $m$ .

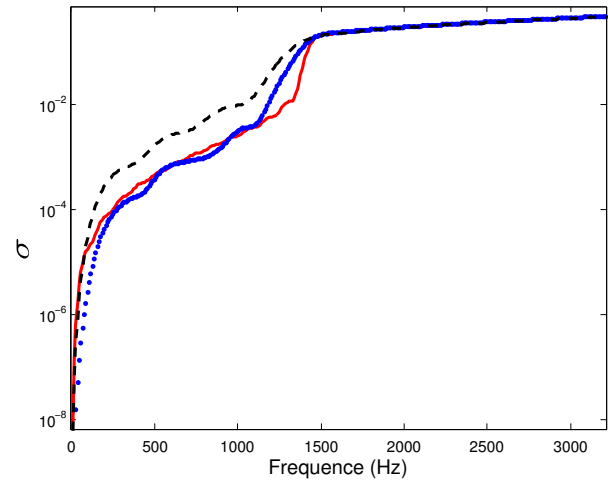


FIGURE 5 – Facteur de rayonnement : mode 26 (—) poutre non surchargée, mode 26 (·) poutre pré-fractale (ordre 3) et mode 8 (- -) poutre non surchargée de longueur  $L_x/3$ .

## 5.3 Analyse et discussion

Le facteur de rayonnement de la structure pré-fractale de la Figure 5 apparaît assez similaire à celui du mode 8 d'une poutre non-surchargée de longueur  $L_x/3$ . En effet, si on compare la déformée modale du mode 26 de la poutre surchargée à l'ordre 3 de la Figure 2, on s'aperçoit que l'on peut approximer la partie centrale comme la zone vibrante principale. D'après le motif de Cantor, elle est donc du tiers de la longueur initiale de la poutre. Le facteur de rayonnement de la poutre surchargée reste cependant inférieur à ce dernier, les parties latérales (par rapport au tiers central) contribuant également à réduire le rayonnement acoustique global.

De plus, les fréquences du mode 8 d'une poutre de longueur  $L_x/3$  et du mode 26 de la poutre pré-fractale sont assez proches (environ 5% d'écart), et donc leurs fréquences critiques modales aussi. Ceci consolide l'idée que les modes présentent des similitudes dans leur rayonnement acoustique.

Enfin, en comparant la poutre pré-fractale et la poutre non-surchargée de même longueur, on observe que la poutre surchargée a un facteur de rayonnement un peu plus faible en basses fréquences. Il y a ensuite une partie de recouvrement, où les courbes s'entrecroisent. Le facteur de rayonnement devient supérieur jusqu'à la fréquence critique modale. Les sinuosités de la poutre non-surchargée sont identifiées comme des lobes de radiation [15], et ces derniers sont d'autant plus nombreux que l'ordre du mode est élevé et la poutre est élancée. On remarque cependant que la poutre surchargée en présente peu, tout comme le mode 8 de la poutre non-surchargée de longueur  $L_x/3$ , renforçant l'idée que le rayonnement acoustique de la poutre pré-fractale est piloté par la zone centrale où le déplacement transverse est d'amplitude supérieure (partie localisée).

## 6 Conclusion

Ce papier présente le modèle vibro-acoustique d'une poutre sandwich surchargée par une distribution pré-fractale de masses. La structure sandwich est modélisée par un matériau homogène équivalent travaillant en flexion, puis est discrétisée et approximée par un schéma aux différences finies. Les hétérogénéités sont intégrées au sein du matériau comme des sur-masses distribuées selon un schéma de Cantor. Le problème aux valeurs propres obtenu est alors résolu numériquement pour obtenir une base modale *in vacuo*.

On présente ensuite des déformées modales à différents ordres. On observe pour ce mode un phénomène de localisation du déplacement transverse dans la partie centrale de la poutre. L'impact de l'ordre du fractal à iso chargement local est mis en avant par les courbes aux ordres deux et trois et on identifie une nette augmentation de la localisation en comparant les amplitudes maximales des parties centrale et latérales.

La densité modale intégrée permet d'identifier les modes localisés grâce aux ruptures de pente, ainsi que le type de localisation qu'ils présentent. On retrouve également les modes pour lesquels les masselottes sont situées sur des nœuds de vibrations, car les fréquences de poutres surchargée et non-surchargée coïncident, ainsi que les déformées modales associées.

Enfin, le couplage fluide-structure est basé sur une méthode d'éléments rayonnants élémentaires et le facteur de rayonnement, issu de la puissance acoustique rayonnée, est calculé *via* la matrice de résistance de rayonnement RRM. Le facteur de rayonnement de la poutre surchargée est proche de celui d'une poutre de longueur  $L_x/3$  (comportement global, ondulations et fréquence critique modale), tout en étant globalement inférieur à celui d'une poutre non-surchargée. La poutre pré-fractale et ces modes localisés semblent donc présenter un rayonnement acoustique inférieur à ceux d'une poutre non-surchargée.

L'intérêt de l'utilisation d'un processus auto-similaire de construction est lié intrinsèquement au caractère de celui-ci. En effet, la disposition des hétérogénéités va plus loin qu'une simple distribution périodique, en ajoutant un rapport d'homothétie lié à l'ordre du motif  $n_{\text{frac}}$ . Ce dernier se traduit notamment par la répétition des ruptures de pentes de la densité modale intégrée, comme illustrée dans la Figure 4. De plus, la disposition des surcharges présente un réel sens physique, à l'inverse notamment des techniques actuelles de disposition de patches visco-élastique ou piézo-électriques, basées sur des algorithmes d'optimisation.

Enfin, contrairement aux matériaux visco-élastiques amortissants collés sur les peaux extérieures, les hétérogénéités sont à l'intérieur des cellules nid d'abeille, et donc de la structure sandwich. Elles ont donc une action directe sur les ondes dans le matériau, agissant sur la propagation avec les phénomènes induits par les hétérogénéités.

Le travail actuellement mené est la validation de la

théorie par l'expérience. Une poutre type méta-matériau a été dimensionnée et réalisée, et l'installation du banc d'essai est en cours. On veut venir confronter le comportement vibratoire de la structure, notamment en comparant les bases modales numériques. Des simulations de fonctions de réponse en fréquence sont menées en parallèle. On s'attend à ce que les modes à déplacement localisé interagissent au sein de la structure, venant modifier le mouvement global de la poutre et donc son rayonnement acoustique. Le modèle, une fois validé, pourra alors être étendu à une deuxième dimension, pour *in fine* se rapprocher de panneaux représentatifs de configurations aéronautiques industrielles.

## Remerciements

Les auteurs remercient la région Midi-Pyrénées et l'ONERA pour le financement du doctorat du premier auteur.

## Références

- [1] D. J. Mead, Wave propagation in continuous periodic structures : Research contributions from Southampton, 1964-1995, *Journal of Sound and Vibration* **190** (3), 495-524 (1996).
- [2] D. J. Mead, Plates with regular stiffening in acoustic media : Vibration and radiation, *Journal of the Acoustical Society of America* **88** (1), 391-401 (1990).
- [3] E. Bertaud du Chazaud and V. Gibiat, A numerical study of 1D self-similar waveguides : Relationship between localization, integrated density of states and the distributions of the scatterers, *J. Sound Vib.* **312**, 631-642 (2008).
- [4] E. Bertaud du Chazaud, D. Chareyron and V. Gibiat, Elastic waves in 2D self-similar structures : localisation, vibrational integrated density of state and distribution of the scatterers, *Forum Acusticum Budapest 2005*, (2005).
- [5] D. Bouzit and C. Pierre, Localization of vibration in disordered multi-span beams with damping, *J. Sound Vib.* **187** (4), 625-648 (1995).
- [6] D. Bouzit and C. Pierre, An experimental investigation of vibration localization in disordered multi-span beams, *J. Sound Vib.* **187** (4), 649-669 (1995).
- [7] M. Nouh, O. Aldraihem and A. Baz, Vibration Characteristics of Metamaterial Beams With Periodic Local Resonances, *Journal of Vibration and Acoustics* **136** (6), 061012 (2014).
- [8] F. Simon, S. Puzin and D. Biron, Optimisation of sandwich trim panels for reducing helicopter internal noise, *ERF30*, Marseille, (2004).
- [9] F. Fahy and P. Gardonio, *Sound and structural vibration - Radiation, Transmission and Response*, second edition, Academic Press, Elsevier (2007).
- [10] A. C. Nilsson, Wave propagation in and sound transmission through sandwich plates, *J. Sound Vib.* **138** (1), 73-94 (1990).
- [11] H.-Y. Kim and W. Hwang, Effect of debonding on natural frequencies and frequency response functions of honeycomb sandwich beams, *Composite Structures* **55**, 51-62 (2002).
- [12] K. B. Subrahmanyam and A. W. Leissa, An improved finite difference analysis of uncoupled vibrations of cantilevered beams, *J. Sound Vib.*, **98** (1), 1-11 (1985).
- [13] ONERA/ATECA, Panneau insonorisant, Brevet INPI 3017235, Bulletin 32 du 7 Août 2015.
- [14] S. J. Elliott and M. E. Johnson, Radiation modes and the active control of sound power, *J. Acoust. Soc. Am.* **94** (4), 2194-2204 (1994).
- [15] C. E. Wallace, Radiation Resistance of a Baffled Beam, *J. Acoust. Soc. Am.* **51** (3), 936-945 (1972).