

# CFA/VISHNO 2016

## Concept de revêtement élastique multicouches appliqué à la furtivité acoustique sous-marine

F. Simon, A. Berthou et C. Dutrion

ONERA, 2 avenue Edouard Belin, 31055 Toulouse Cedex 4, France  
frank.simon@onera.fr



LE MANS

Cet article s'inscrit dans le contexte de furtivité sous-marine vis-à-vis des sonars actifs, technique de localisation par écho, reposant sur l'utilisation d'une source et d'un récepteur. L'étude présentée s'intéresse aux effets de diffraction que l'on pourrait obtenir au moyen d'un revêtement multicouche élastique fixé à un corps immergé supposé cylindrique que l'on souhaite rendre indétectable. Le revêtement élastique, excité par une onde acoustique, émet une onde rayonnée qui s'ajoute, dans le fluide extérieur, à l'onde réfléchie par l'ensemble. L'idée est d'adapter les caractéristiques du revêtement de manière à ce que son rayonnement compense la réflexion de l'obstacle. Pour cela, nous centrons notre étude sur le cas d'un cylindre rigide infiniment long, soumis dans un premier temps à des ondes planes sous incidence normale, et recouvert d'un revêtement élastique multicouche. Le comportement vibro-acoustique d'un tel revêtement est d'abord modélisé. Par optimisation génétique, on détermine ensuite les caractéristiques mécaniques et dimensionnelles des couches permettant une atténuation (quasi-)omnidirectionnelle de la diffraction.

## 1 Introduction

Un fort intérêt a été porté ces dernières années au développement de méthodes de furtivité passives, et ce dans tous les domaines de la physique des ondes, aussi bien en électromagnétique, qu'en élastodynamique ou en acoustique. Dans ce dernier domaine, l'objectif de ces dispositifs est de supprimer, ou à défaut minimiser, la pression diffractée, c'est-à-dire la pression produite par l'impact d'une onde incidente sur un obstacle.

Dans le cadre d'applications militaires, on peut chercher à rendre un objet indétectable par des ondes acoustiques (un sous-marin vis-à-vis d'un sonar par exemple). Il existe différentes méthodes de détection active d'objets, basées sur l'émission, la réception et l'analyse d'ondes. On trouve des techniques de localisation par écho, reposant sur l'utilisation d'une source et d'un récepteur. Elles permettent essentiellement d'acquérir des informations sur la distance et la taille d'un objet. Pour s'en prémunir, on peut mettre en place un dispositif opérant un changement de direction de l'onde réfléchie par rapport à sa trajectoire naturelle, ou encore entourer l'objet d'un matériau absorbant [1]. Les années 1960 ont également vu la naissance de méthodes actives, reposant sur l'utilisation de récepteurs et d'émetteurs positionnés à la surface de l'obstacle et permettant l'émission d'une onde en opposition de phase avec l'onde diffractée, provoquant ainsi son annulation. La mise en oeuvre de tels dispositifs reste délicate en conditions réelles, et l'on peut donc chercher à développer des dispositifs passifs permettant une suppression (quasi-)omnidirectionnelle de la diffraction d'ondes acoustiques par un objet.

C'est en 2007 que paraît le premier article traitant de la faisabilité théorique de revêtements passifs permettant de rendre un objet non diffractant. Cummer et Schurig [2] ont alors adapté aux ondes acoustiques la méthode de transformation de coordonnées décrite par Pendry et al. [3] dans le domaine électromagnétique. Ils ont ainsi montré qu'une couche fluide, présentant une densité et une vitesse de propagation du son anisotropes et inhomogènes, pourrait guider l'onde incidente autour de l'obstacle et ainsi éviter toute diffraction. De tels matériaux fluidiques n'existent pas à l'état naturel, mais le développement récent de métamatériaux, aux propriétés macroscopiques inhabituelles, laisse penser que des fluides équivalents pourraient être réalisés, avec des caractéristiques apparentes proches de celles préconisées par la théorie. Le développement de tels métafluides a été un axe de

recherche privilégié ces dernières années. Cheng et al. [4] et Torrent et Sánchez-Dehesa [5] ont par exemple proposé de modéliser le fluide idéal de Cummer par une superposition de couches fluides homogènes et isotropes, en alternant des fluides plus denses et des fluides moins denses que le milieu environnant. Ceci a permis de dépasser le problème lié à l'anisotropie et à l'inhomogénéité du fluide devant entourer l'obstacle. Cependant, ces études sont restées sur un plan uniquement numérique et deux problèmes majeurs apparaissent si l'on souhaite mettre en oeuvre cette idée, à savoir maintenir en contact des fluides de densités différentes sans qu'ils ne se mélangent, et trouver des fluides moins denses que le milieu ambiant si celui-ci est constitué d'air. Dans le même temps, Zhang et al. [6] ont développé un système fluide équivalent à celui de Cummer en se basant sur une analogie acoustique-électrique. Leurs études ont abouti à la réalisation d'un dispositif capable d'atténuer la diffraction d'ultrasons par un cylindre dans l'eau autour de 60 kHz. D'autres techniques, parfois appelées méthodes d'annulation de la diffraction, ont été envisagées. Celles-ci consistent en effet à chercher des moyens d'annuler la diffraction d'une onde par un obstacle, à certaines fréquences, en jouant sur différents principes. Il peut aussi bien s'agir de phénomènes d'interférences destructives entre ondes diffractées par des obstacles entourant l'objet [7], que d'adaptation de surfaces d'impédance sélective en fréquence [8]. Les différents concepts proposés reposent sur une propagation particulière des ondes acoustiques dans le fluide entourant l'obstacle, et aboutissent à la définition de dispositifs fluidiques encombrants et parfois directifs. Nous nous interrogeons donc sur la faisabilité de revêtements passifs élastiques, permettant de réduire la diffraction d'une onde acoustique par un cylindre, et ce quelles que soient la direction de l'onde incidente et la direction d'observation. Le revêtement élastique, excité par l'onde acoustique, émet une onde rayonnée qui s'ajoute, dans le fluide extérieur, à l'onde réfléchie par l'ensemble. L'idée est d'adapter les caractéristiques du revêtement de manière à ce que son rayonnement compense la réflexion de l'obstacle. Pour cela, nous centrons notre étude sur le cas d'un cylindre rigide infiniment long, placé dans de l'eau, recouvert d'un revêtement élastique multicouche et soumis à une onde plane.

Le comportement vibro-acoustique d'un tel revêtement est d'abord modélisé par une approche semi-analytique de type matrice de transfert basée sur une formulation « state space formulation and wave function expansion. » Par optimisation génétique, on détermine ensuite les caractéristiques mécaniques et dimensionnelles des couches permettant une atténuation (quasi-)omnidirectionnelle de la diffraction. Une approche simplifiée ne supposant que la

propagation d'ondes longitudinales est ensuite comparée à l'approche précédente et utilisée pour évaluer l'efficacité d'un matériau avec gradient d'impédance caractéristiques.

Cet article est basé sur les travaux de [9] et [10] conduits à l'Onera.

## 2 Formulation mathématique

Considérons un cylindre rigide de rayon  $a$  placé dans un fluide de masse volumique  $\rho_0$  et de célérité  $c$ . Un revêtement constitué de  $N$  couches de matériaux isotropes ou orthotropes entoure ce dernier. Le cylindre revêtu est soumis à une onde plane de pulsation  $\omega$  sous incidence normale (dépendance temporelle en  $e^{-i\omega t}$ ).

Les systèmes de coordonnées sont choisis de façon à ce que la direction de l'onde incidente coïncide avec l'axe des  $x$  en coordonnées cartésiennes et  $\theta=\pi$  en coordonnées cylindriques.

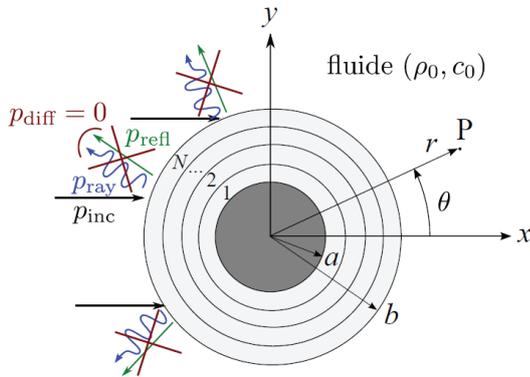


Figure 1: Obstacle cylindrique revêtu soumis à des ondes planes

### 2.1 Champ de pression

Le champ de pression acoustique dans le milieu fluide satisfait l'équation d'Helmholtz :

$$\Delta p + k^2 p = 0 \quad (1)$$

où  $k=\omega/c$  est le nombre d'onde. Ce champ de pression peut être décomposé en deux parties : une pression incidente  $p_{inc}$  et une pression diffractée  $p_{scat}$ , elle même composée de la pression réfléchie  $p_{ref}$  et de la pression rayonnée par la vibration du revêtement  $p_{rad}$ .

Le but est d'annuler la pression diffractée en générant une pression rayonnée de même amplitude et en opposition de phase avec la pression réfléchie.

$$p = p_{inc} + p_{refl} + p_{rad} \quad (2)$$

$$(p_{scat} \rightarrow 0)$$

Dans les développements suivants, les longueurs sont rapportées au rayon de l'obstacle  $a$ , et les pressions et contraintes par  $\rho_0 c^2$ , caractéristique du fluide environnant. La densité de chaque matériau est par ailleurs rapportée à

la densité du fluide  $\rho_0$ . Les quantités adimensionnelles (de symbole tilde) sont exprimées en fonction de la coordonnée radiale  $\xi = r/a$  et du nombre d'onde adimensionnel  $ka$ .

La pression incidente  $\tilde{p}_{inc}$  due à une onde plane d'amplitude  $\tilde{p}_0$  propagée dans la direction des  $x$  positifs peut être représentée par une série de fonctions cylindriques de Bessel d'ordre entier :

$$\tilde{p}_{inc} = \tilde{p}_0 \sum_{n=0}^{+\infty} i^n \varepsilon_n J_n(ka\xi) \cos(n\theta) \quad (3)$$

où

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0, \\ 2 & \text{if } n \geq 1. \end{cases}$$

Le champ diffracté doit satisfaire l'équation d'Helmholtz et la condition de rayonnement de Sommerfeld, soit :

$$\tilde{p}_{scat} = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(ka) H_n(ka\xi) \cos(n\theta) \quad (4)$$

où  $A_n(ka)$  est une inconnue et  $H_n(\cdot)$  la fonction de Hankel cylindrique de 1er type d'ordre  $n$ .

Le coefficient  $A_n(ka)$  est déterminé en utilisant la condition aux limites de surface sur la surface extérieure du revêtement en supposant que la vitesse radiale acoustique à  $\xi_N=b/a$  est égale à la vitesse radiale de la surface externe du revêtement. La projection de l'équation d'Euler linéarisée dans la direction radiale donne une relation entre le déplacement de la surface externe  $\tilde{u}_r^N(\xi_N, ka, \theta)$  et  $A_n(ka)$  :

$$\tilde{u}_r^N(\xi_N, ka, \theta) = \frac{1}{(ka)^2} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \xi} = \quad (5)$$

$$\frac{1}{ka} \sum_{n=0}^{+\infty} [\tilde{p}_0 i^n \varepsilon_n J'_n(ka\xi_N) + A_n(ka) H'_n(ka\xi_N)] \cos(n\theta)$$

Dans le but de calculer  $A_n(ka)$ , et par conséquent  $\tilde{p}_{scat}$ , il est nécessaire d'étudier les vibrations du revêtement excité par une onde plane et d'évaluer  $\tilde{u}_r^N(\xi_N, ka, \theta)$  en utilisant la méthode semi-analytique présentée ci-dessous.

### 2.2 Analyse vibratoire

Dans chaque couche  $j$  considérée comme milieu élastique, Les équations du déplacement exprimées en terme de contraintes en coordonnées polaires :

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_{rr}^j}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \tilde{\sigma}_{r\theta}^j}{\partial \theta} + \frac{1}{\xi} (\tilde{\sigma}_{rr}^j - \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^j) = -\tilde{\rho}_j (ka)^2 \tilde{u}_r^j, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_{r\theta}^j}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^j}{\partial \theta} + \frac{2}{\xi} \tilde{\sigma}_{r\theta}^j = -\tilde{\rho}_j (ka)^2 \tilde{u}_\theta^j.$$

où  $\tilde{\rho}_j$  est la densité du matériau de la couche  $j$ , et  $(\tilde{u}_r, \tilde{u}_\theta)$  et le déplacement correspondant. Pour un matériau orthotrope dans une configuration de « déformation plane » la loi de Hooke peut s'exprimer de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_{rr}^j \\ \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^j \\ \tilde{\sigma}_{r\theta}^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{c}_{11}^j & \tilde{c}_{12}^j & 0 \\ \tilde{c}_{12}^j & \tilde{c}_{22}^j & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{c}_{33}^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr}^j \\ \varepsilon_{\theta\theta}^j \\ 2\varepsilon_{r\theta}^j \end{pmatrix} \quad (7)$$

Les coefficients  $\tilde{c}_{pq}$  de la matrice de raideur réduite sont donnés en annexe A. Les déformations  $\varepsilon_{pq}$  sont relatives aux déplacements par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^j &= \frac{\partial \tilde{u}_r^j}{\partial \xi}, \\ \varepsilon_{\theta\theta}^j &= \frac{1}{\xi} \frac{\partial \tilde{u}_\theta^j}{\partial \theta} + \frac{\tilde{u}_r^j}{\xi}, \\ \varepsilon_{r\theta}^j &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\xi} \frac{\partial \tilde{u}_r^j}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{u}_\theta^j}{\partial \xi} - \frac{\tilde{u}_\theta^j}{\xi} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Dans le cas d'un matériau orthotrope, le système obtenu par substitution de (7), (8) dans (6) n'est pas aisément résolu analytiquement. Une méthode similaire à celle employée par Chen [11], Hasheminejad [12] et Jamali [13], est utilisée ici. Il s'agit d'une approche par matrice de transfert basée sur une sur une formulation d'état.

Les équations (6), (7) et (8) s'écrivent comme suit:

$$\frac{\partial \mathbf{Y}^j}{\partial \xi} = \mathbf{M}^j \mathbf{Y}^j \quad (9)$$

avec  $\mathbf{Y}^j = (\tilde{u}_\theta^j, \tilde{u}_r^j, \tilde{\sigma}_{rr}^j, \tilde{\sigma}_{r\theta}^j)$  le vecteur d'état et  $\mathbf{M}^j$  une matrice complexe 4x4 explicitée en annexe B.

$\mathbf{Y}^j$  est exprimé à l'aide de coefficients modaux comme suit, avec un exemple de modes de diffraction visualisés en figure 2 :

$$\mathbf{Y}^j = \begin{pmatrix} \tilde{u}_\theta^j \\ \tilde{u}_r^j \\ \tilde{\sigma}_{rr}^j \\ \tilde{\sigma}_{r\theta}^j \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} \tilde{u}_{\theta,n}^j(\xi) \sin(n\theta) \\ \tilde{u}_{r,n}^j(\xi) \cos(n\theta) \\ \tilde{\sigma}_{rr,n}^j(\xi) \cos(n\theta) \\ \tilde{\sigma}_{r\theta,n}^j(\xi) \sin(n\theta) \end{pmatrix} \quad (10)$$

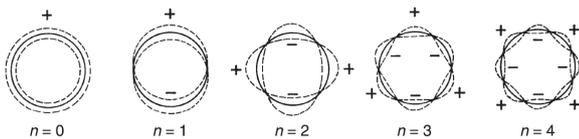


Figure 2 : 1<sup>ers</sup> modes de diffraction de cylindre

L'orthogonalité des fonctions trigonométriques induit :

$$\frac{\partial \mathbf{V}_n^j}{\partial \xi} = \mathbf{P}_n^j(\xi) \mathbf{V}_n^j \quad (11)$$

où  $\mathbf{V}_n^j = (\tilde{u}_{\theta,n}^j, \tilde{u}_{r,n}^j, \tilde{\sigma}_{rr,n}^j, \tilde{\sigma}_{r\theta,n}^j)^T$  est le vecteur d'état modal avec  $P_n^j$  défini en annexe C.

Les couches sont supposées suffisamment minces pour que la matrice  $P_n^j(\xi)$  soit constante au sein de chaque couche et puisse être évaluée à  $\xi = \xi_{j-1}$ , l'interface intérieure de la couche  $j$ . Aussi,

$$\mathbf{V}_n^j(\xi) = \exp[(\xi - \xi_{j-1}) \mathbf{P}_n^j(\xi_{j-1})] \mathbf{V}_n^j(\xi_{j-1}) \quad (12)$$

où

$$\xi_{j-1} \leq \xi \leq \xi_j \text{ et } j = 1, 2, \dots, N$$

En appliquant cette équation à  $\xi = \xi_j$ , il est possible, pour chaque couche, d'exprimer le vecteur d'état à la surface extérieure ( $\xi_N = b/a$ ) par rapport à la surface intérieure ( $\xi_0 = 1$ ) :

$$\mathbf{V}_n^N(\xi_N) = \mathbf{T}_n \mathbf{V}_n^1(\xi_0) \quad (13)$$

avec

$$\mathbf{T}_n = \prod_{j=N}^1 \exp[\tilde{h}_j \mathbf{P}_n^j(\xi_{j-1})] \quad (14)$$

la matrice de transfert modale globale et  $\tilde{h}_j$ , l'épaisseur de la couche considérée.

L'application des conditions aux limites aux surfaces intérieure et extérieure du revêtement permet le calcul de  $\tilde{u}_r^N(\xi_N)$ , et par conséquent de la pression dans le milieu fluide :

$$\begin{aligned} \tilde{p}(\xi, ka, \theta) &= \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ \tilde{p}_0 i^n \varepsilon_n \left( J_n(ka\xi) - \frac{J'_n(ka\xi_N)}{H'_n(ka\xi_N)} H_n(ka\xi) \right) + ka \frac{u_{r,n}^N(\xi_N)}{H'_n(ka\xi_N)} H_n(ka\xi) \right] \cos(n\theta) \end{aligned} \quad (15)$$

### 3 Procédure de minimisation

Des techniques d'optimisation ont été employées pour trouver les caractéristiques dimensionnelles et mécaniques des couches élastiques conduisant à la réduction de la diffraction.

Ces paramètres qui constituent les variables d'optimisation sont, de façon générale, pour chaque couche :

- l'épaisseur  $h$ ,
- les modules d'young dans chaque directions  $E_r$ ,  $E_\theta$ ,  $E_z$ ,
- le module de cisaillement  $G_{r\theta}$ ,
- les coefficients de poisson  $\nu_{r\theta}$ ,  $\nu_{\theta z}$ ,  $\nu_{rz}$ ,
- la densité  $\rho$ ,
- le facteur de perte structural  $\eta$ .

L'étude a toutefois été restreinte à des revêtements constitués de couches isotropes pour limité le nombre de variables d'optimisation.

Un algorithme génétique (SOGA du logiciel DAKOTA) a été couplé avec l'approche vibro-acoustique décrite ci-dessus. Des simulations ont été conduites pour déterminer les paramètres des couches minimisant la fonction objectif définie par :

$$F_{obj,1} = \frac{\sigma_{sc}^{(cloaked)}}{\sigma_{sc}^{(uncloaked)}} \quad (16)$$

avec

$$\sigma_{sc} = \int_S \frac{\langle I_{sc} \rangle}{\langle I_{inc} \rangle} dS \quad (17)$$

dépendant de l'intensité acoustique active diffractée dans la direction radiale  $I$  avec et sans revêtement :

$$I = -i\omega p u_r \quad (18)$$

En supposant le fluide environnant comme non-absorbant, la loi de conservation de l'énergie acoustique permet de disposer de la puissance acoustique diffractée par l'obstacle par intégration de l'intensité normale sur n'importe quelle surface autour de celui-ci.

Le gain en diffraction  $\sigma_{gain}$  pourvu par le revêtement peut être exprimé en décibel comme suit :

$$\sigma_{gain} = 10 \log_{10} \left( \frac{\sigma_{sc}^{(cloaked)}}{\sigma_{sc}^{(uncloaked)}} \right) \quad (19)$$

Enfin, de façon à réduire la diffraction sur une bande de fréquence et non plus une fréquence pure, une 2<sup>ème</sup> fonction objectif a été proposée comme suit :

$$F_{obj,2} = \int_{f_1}^{f_2} \frac{\sigma_{sc}^{(cloaked)}}{\sigma_{sc}^{(uncloaked)}} df \quad (20)$$

## 4 Application

La figure suivante montre le diagramme de directivité de diffraction d'un cylindre en champ lointain, soumis à une onde plane, pour différentes valeurs de nombre adimensionnel  $ka$ .

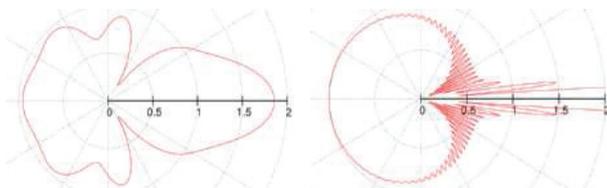


Figure 3 : Diagramme de directivité en champ lointain – (a)  $ka=1$ , (b)  $ka=10$

On peut noter que, si pour un  $ka=1$ , la directivité est représentative de différents modes de contributions équivalentes, pour un  $ka=10$ , le mode fondamental ( $n=0$ , cf figure 2) semble par contre dominant en particulier du côté de l'onde incidente, soit entre  $90^\circ$  et  $270^\circ$ .

Appliqué à la furtivité des sous-marins, on met ainsi en évidence (Figure 4) pour un nombre d'onde élevé ( $ka=60$ ) une réduction potentielle de la diffraction de la coque (-20 dB), supposée cylindrique, avec des revêtements composés de deux couches isotropes, soit une couche relativement épaisse d'élastomère et une couche extérieure, plus fine, d'acier (Tableau 1). Dans le cas présent, le revêtement est appliqué à un cylindre de rayon 4.4 m et optimisé à une fréquence de 3255 Hz avec la fonction objectif  $F_{obj,1}$  telle que :

$$\sigma_{sc} = \int_{90^\circ}^{270^\circ} \frac{\langle I_{sc} \rangle}{\langle I_{inc} \rangle} r d\theta \quad (21)$$

, soit intégré sur le demi-espace amont.

Tableau 1 : Exemple de revêtement bicouches isotropes ( $a=4.4$  m, optimisation  $f_0=3255$  Hz)

Couche	h (mm)	E (Mpa)	$\rho$ ( $\text{kg/m}^3$ )	$\nu$	$\eta$ (%)
intérieure	33	7.31	1425	0.48	10
extérieure	2	$210 \cdot 10^3$	7820	0.3	0.1

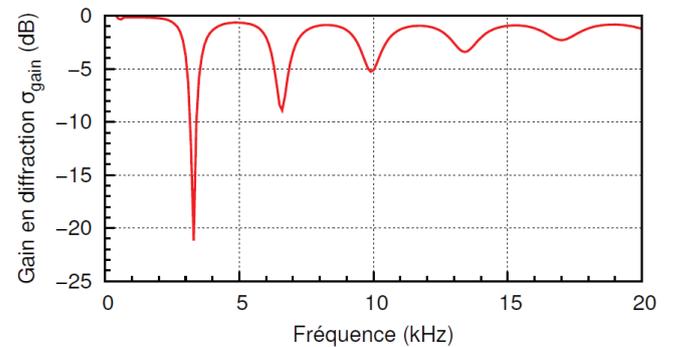


Figure 4 : Variation du gain en diffraction en fonction de la fréquence pour un revêtement bicouches isotropes (cf. Tableau 1).

Ces configurations ne permettent toutefois pas de supprimer la zone d'ombre à l'arrière de l'obstacle, zone correspondant toutefois à un angle solide restreint (Figure 5).

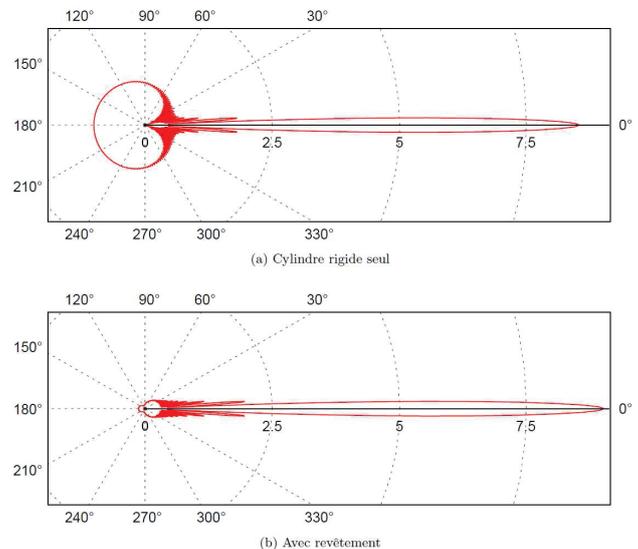


Figure 5 : Diagrammes de directivité obtenus pour  $ka=60$ , sans revêtement (a) et avec le revêtement bi-couche isotrope élastomère / acier.

L'étude paramétrique menée sur ce cas a permis de mettre en évidence l'influence importante du module d'Young, du coefficient de Poisson et de l'épaisseur de la couche intérieure sur le résultat, et des conséquences pratiques peuvent être tirées des tendances dégagées.

Les sonars n'émettant pas des ondes planes progressives harmoniques mais des signaux de durée finie (ex. Figure 6), qui plus est, étalés en fréquence, il est nécessaire de proposer un revêtement réactif temporellement (ex. Figure 7) mais également plus "large-bande" de fréquence.

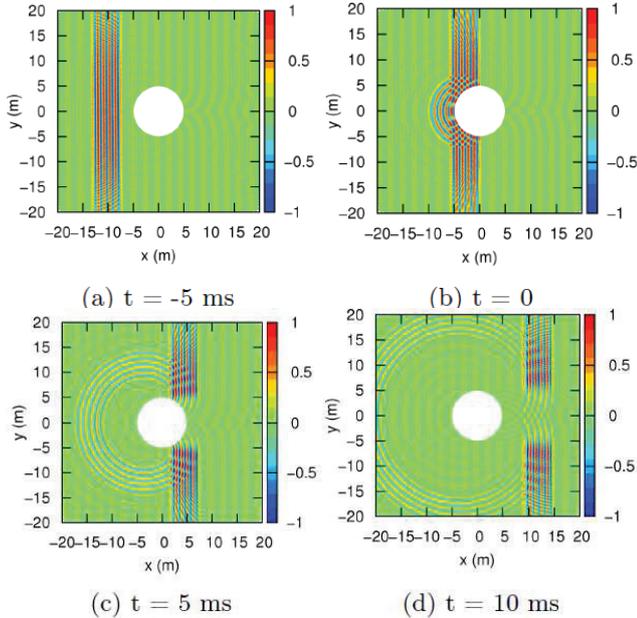


Figure 6 : Simulation des profils de pression (partie réelle) au cours du temps autour d'un obstacle rigide de 5 m de rayon pour un burst à 1300 Hz ( $ka=27$ ).

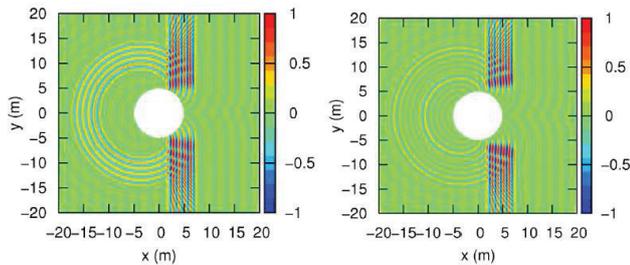


Figure 7 : Simulation des profils de pression (partie réelle) à un instant donné autour d'un obstacle rigide et revêtu de 5 m de rayon pour un burst à 1300 Hz ( $ka=27$ ).

Une optimisation a été menée sur la bande de fréquence 500-2500 Hz avec la fonction objectif  $F_{obj,2}$ .

Le nombre de couches a été fixé à 6, en supposant l'épaisseur de chaque couche constante. Les paramètres  $E$ ,  $\rho$  et  $h$  ont été bornés comme suit :

- $E \in [0.5; 100] \text{ Mpa}$ ,
- $\rho \in [500; 5000] \text{ kg/m}^3$ ,
- $h_{total} \in [1; 200] \text{ mm}$ .

Il apparaît ainsi qu'un nombre de couches plus élevé avec augmentation de la rigidité et de la masse volumique sur les couches extérieures permet d'augmenter la bande de fréquence d'intérêt (Figure 8) tout en conservant une réduction importante de la diffraction (ex. Tableau 2).

Tableau 2 : Exemple de revêtement à 6 couches isotropes ( $a=5 \text{ m}$ , optimisation pour  $f_0 \in [500; 2500] \text{ Hz}$ ).

Couche	h (mm)	E (Mpa)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\nu$	$\eta$ (%)
1	11	0.55	1160	0.3	10
2	11	2.0	1310	0.3	10
3	11	3.1	1460	0.3	10
4	11	7.6	1500	0.3	10
5	11	23.6	2480	0.3	10
6	11	47.0	4550	0.3	10

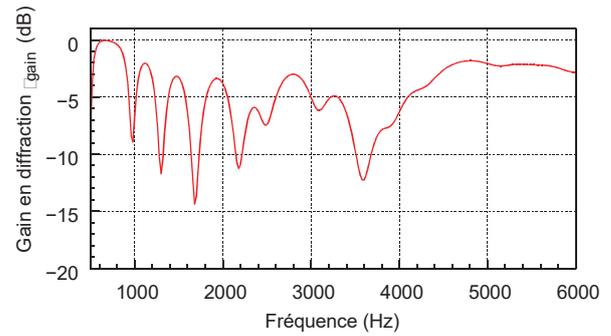


Figure 8 : Variation du gain en diffraction en fonction de la fréquence pour un revêtement à 6 couches isotropes (cf. Tableau 2).

De manière à pouvoir conduire une optimisation avec un nombre de couches plus élevés, un modèle simplifié ne supposant que la propagation d'ondes longitudinales (inspiré par [14]) au sein d'un milieu élastique placé devant une paroi rigide plane est introduite.

Il s'agit de décrire une évolution de l'impédance à la surface de chaque couche  $j$  à partir des impédances caractéristiques  $Z_c$  et des fréquences de résonance associées  $f_{res}$  :

$$Z_{j+1} = Z_{c,j+1} \left( 1 - i \frac{\eta_j}{2} \right) \frac{Z_j \coth \left( \pi \frac{f}{f_{res,j}} \left( -\frac{\eta_j}{2} + i \right) \right) - Z_{c,j+1} \left( 1 - i \frac{\eta_j}{2} \right)}{Z_{c,j+1} \left( 1 - i \frac{\eta_j}{2} \right) \coth \left( \pi \frac{f}{f_{res,j}} \left( -\frac{\eta_j}{2} + i \right) \right) - Z_j}$$

$$Z_1 = Z_{c,1} \left( 1 - i \frac{\eta_1}{2} \right) \coth \left( \pi \frac{f}{f_{res,1}} \left( -\frac{\eta_1}{2} + i \right) \right)$$
(22)

où

$$Z_{c,j+1} = \sqrt{\rho_{j+1} \frac{E_{j+1} (1 - \nu_{j+1})}{(1 + \nu_{j+1})(1 - 2\nu_{j+1})}}$$

$$f_{res,j} = \frac{1}{2h_j} \sqrt{\frac{E_j (1 - \nu_j)}{\nu_j (1 + \nu_j)(1 - 2\nu_j)}}$$

, puis de prendre en compte l'incidence de l'onde vis à vis de l'obstacle avec une discretisation fine du revêtement par éléments plans satisfaisant l'équation (22) (Figure 9).

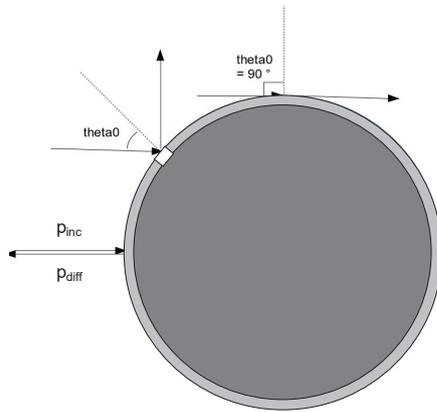


Figure 9 : Obstacle cylindrique revêtu décomposé par éléments plans (rectangle blanc), de positions définies par l'angle  $\theta_0$ .

La procédure de calcul direct consiste alors à calculer le coefficient de réflexion en puissance, intégré sur l'angle solide restreint de  $[-30^\circ, 30^\circ]$  par rapport à la direction de l'onde incidente.

On peut noter, sur la figure 10, pour un revêtement dont les caractéristiques sont définies dans le tableau 2, que la variation du gain en diffraction est proche du résultat obtenu par le modèle complet avec intégration sur un angle solide plus étendu (Figure 8). Cela peut s'expliquer par le fait que le mode fondamental devient rapidement prépondérant avec l'augmentation de  $ka$ .

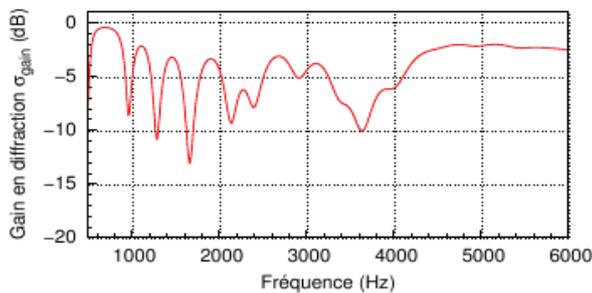


Figure 10 : Variation du gain en diffraction en fonction de la fréquence pour un revêtement à 6 couches isotropes (cf. Tableau 2) avec modèle simplifié pour  $\theta_0 \in [-30^\circ; 30^\circ]$ .

Le modèle simplifié, dont la mise en oeuvre nécessite un temps de calcul très réduit, peut permettre des optimisations avec un nombre de couches élevé.

On a pu également constater, lors de phases préliminaires d'optimisation, que l'impédance caractéristique  $Z_{c,j}$  de couches élémentaires  $j$  d'un revêtement multicouche peut suivre une évolution représentative d'une fonction polynomiale lorsque  $j$  augmente. De fait, proposer une solution de revêtement avec une fonction d'évolution spatiale permet de réaliser l'optimisation avec un nombre réduit de paramètres, quel que soit le nombre de couches.

Les figures 11 et 12 montrent ainsi les variations du gain en diffraction pour deux fonctions polynomiales, en supposant que  $\rho$  et  $h$  sont fixés par couche :

$$Z_c(r) = a_1 + a_2 \left( \frac{r-a}{b-a} \right)^{a_3} \quad (23)$$

$$Z_c(r) = a_1 + a_2 \left( \frac{r-a}{r_0-a} \right)^{a_3} \quad \text{pour } r < r_0 \quad (24)$$

$$Z_c(r) = Z_c(r_0) + a_4 \frac{r-r_0}{b-r_0} \quad \text{pour } r > r_0$$

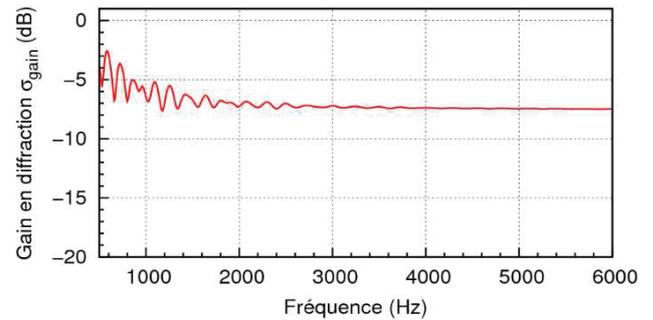


Figure 11 : Variation du gain en diffraction en fonction de la fréquence pour un revêtement multicouche d'impédance caractéristique suivant l'équation (23) tel que  $a_1=100$ ,  $a_2=885000$ ,  $a_3=1.25$ .

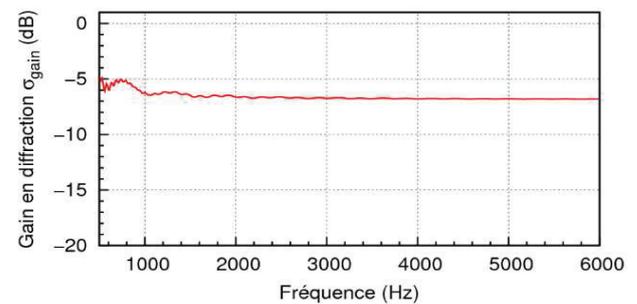


Figure 12 : Variation du gain en diffraction en fonction de la fréquence pour un revêtement multicouche d'impédance caractéristique suivant l'équation (24) tel que  $a_1=0.7$ ,  $a_2=25.0$ ,  $a_3=3.0$ ,  $a_4=780$ ,  $r_0-a=0.084(b-a)$ .

Ces types d'évolution en impédance caractéristique à travers l'épaisseur fournissent un gain en diffraction relativement constant, soit autour de 7-8 dB, dès  $ka \sim 20$ .

## 5 Conclusion

Un code de modélisation du comportement vibro-acoustique d'un matériau multicouche élastique a été mis en place pour étudier des configurations bidimensionnelles, avec un matériau cylindrique infiniment long, excité par une onde plane dont la direction de propagation appartient aux plans de section droite du cylindre. L'outil a été couplé à un algorithme génétique, et des revêtements multicouche élastiques permettant une réduction de la diffraction ont été recherchés par optimisation. Pour des nombres d'onde élevés dans l'eau ( $ka > 20$ ), un phénomène résonnant, conduisant à une forte réduction de la diffraction en amont du cylindre, peut se produire en utilisant un revêtement composé de 2 couches isotropes. Ces configurations ne permettent pas de supprimer la zone d'ombre à l'arrière de l'obstacle, zone correspondant toutefois à un angle solide restreint. L'étude paramétrique menée sur ces cas a permis de mettre en évidence l'influence importante du gradient

d'impédance caractéristique dans le matériau. En supposant que le mode fondamental de diffraction du cylindre est prépondérant pour les  $ka$  élevés, une approche simplifiée basée sur la propagation d'ondes longitudinales au sein du multicouche couplée à l'algorithme génétique. Des solutions "large-bande de fréquence" ont été déduites de lois d'impédance caractéristique pré-définies.

## Remerciements

Cette étude a été menée avec l'aide de la Direction générale de l'armement et de la région Midi-Pyrénées.

## Références

- [1] H. Meng, J. Wen, Linmei Lv, X. Wen., Analysis of absorption performances of anechoic layers with steel plate backing, *J. Acoust. Soc. Am.* 132, 69 (2012).
- [2] S.A. Cummer, D. Schurig, One path to acoustic cloaking, *New J. Phys.* 9, 45 (2007).
- [3] J.B. Pendry, D. Schurig, D.R. Smith, Controlling electromagnetic fields, *Science* 312 (2006).
- [4] Y.Cheng, F.Yang, J.Y.Xu, X.J.Liu, A multilayer structured acoustic cloak with homogeneous isotropic materials., *Applied Physics Letters* 92(151913) (2008).
- [5] D. Torrent, J. Sánchez-Dehesa, Acoustic cloaking in two-dimensions : a feasible approach, *New Journal of Physics*, 10(063015) (2008).
- [6] S. Zhang, C. Xia, N. Fang, Broadband acoustic cloak for ultrasound waves, *Phys. Rev. Lett.* 106, 024301 (2011).
- [7] V.M. García-Chocano, L. Sanchis, A. Díaz-Rubio, J. Martínez-Pastor, F. Cervera, R. Llopis-Pontiveros, J. Sánchez-Dehesa, Acoustic cloak for airborne sound by inverse design, *Appl. Phys. Lett.* 99, 074102 (2011).
- [8] A. Alù, Mantle cloak : invisibility induced by a surface, *Physical Review B*, 80(245115) (2009).
- [9] C. Dutrion, *Développement de métamatériaux acoustiques furtifs*, Thèse de Docteur en Energétique et Dynamique des fluides, ISAE (2014).
- [10] A. Berthou, *Furtivité acoustique sous-marine par revêtement élastique passif*, Ecole Polytechnique (2015).
- [11] W.Q. Chen, Z.G. Bian, H.J. Ding, Three-dimensional vibration analysis of fluid-filled orthotropic FGM cylindrical shells, *Int. J. Mech. Sci.* 46: 159-171 (2004).
- [12] S.M. Hasheminejad, M. Rajabi, Acoustic scattering characteristics of a thick-walled orthotropic cylindrical shell at oblique incidence, *Ultrasonics* 47: 32-48 (2007).
- [13] J. Jamali, M.H. Naei, F. Honarvar, M. Rajabi, Acoustic scattering from functionally graded cylindrical shells, *J. Mech.* 27, 2: 227-243 (2011).
- [14] Y.-C. Chang, L.-J. Yeh, M.-C. Chiu, G.-J. Lai, Shape optimization on constrained single-layer sound absorber by using GA method and mathematical

gradient methods, *Journal of Sound and Vibration* 286, 941-961 (2005).

## Annexe A

La matrice de rigidité de coefficients  $C_{pq}$  est obtenue par inversion de la matrice de compliance de coefficients  $S_{pq}$ .

$$\begin{aligned} s_{11} &= \frac{1}{E_r(1-i\eta)} \left( 1 - \nu_{rz}^2 \frac{E_z}{E_r} \right) & c_{11} &= \frac{s_{22}}{s_{11}s_{22} - s_{12}^2} \\ s_{12} &= \frac{-1}{E_r(1-i\eta)} \left( \nu_{r\theta} - \nu_{rz}\nu_{\theta z} \frac{E_z}{E_\theta} \right) & c_{12} &= \frac{-s_{12}}{s_{11}s_{22} - s_{12}^2} \\ s_{22} &= \frac{1}{E_\theta(1-i\eta)} \left( 1 - \nu_{\theta z}^2 \frac{E_z}{E_\theta} \right) & c_{22} &= \frac{s_{11}}{s_{11}s_{22} - s_{12}^2} \\ s_{33} &= \frac{1}{G_{r\theta}(1-i\eta)} & c_{33} &= \frac{1}{s_{33}} \end{aligned} \quad (A.1)$$

Les coefficients  $c_{pq}$  sont rapportés à  $\rho_0 c^2$  pour donner les coefficients  $\tilde{c}_{pq}$ .

## Annexe B

$M^j =$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\xi} & -\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 & \frac{1}{\tilde{c}_{33}^j} \\ -\frac{\tilde{c}_{12}^j}{\tilde{c}_{11}^j} \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \theta} & -\frac{1}{\xi} \frac{\tilde{c}_{12}^j}{\tilde{c}_{11}^j} & \frac{1}{\tilde{c}_{11}^j} & 0 \\ \frac{\tilde{e}_{22}^j}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \theta} & -\tilde{\rho}_j(ka)^2 + \frac{\tilde{e}_{22}^j}{\xi^2} & \frac{1}{\xi} \left( \frac{\tilde{c}_{12}^j}{\tilde{c}_{11}^j} - 1 \right) & -\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ -\tilde{\rho}_j(ka)^2 + \frac{\tilde{e}_{22}^j}{\xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} & -\frac{\tilde{e}_{22}^j}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \theta} & -\frac{\tilde{c}_{12}^j}{\tilde{c}_{11}^j} \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{2}{\xi} \end{pmatrix} \quad (B.1)$$

$$\text{avec } \tilde{e}_{22}^j = \tilde{c}_{22}^j - \frac{(\tilde{c}_{12}^j)^2}{\tilde{c}_{11}^j} \quad (B.2)$$

## Annexe C

$P_n^j =$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\xi} & \frac{n}{\xi} & 0 & \frac{1}{\tilde{c}_{33}^j} \\ -\frac{\tilde{c}_{12}^j}{\tilde{c}_{11}^j} \frac{n}{\xi} & -\frac{1}{\xi} \frac{\tilde{c}_{12}^j}{\tilde{c}_{11}^j} & \frac{1}{\tilde{c}_{11}^j} & 0 \\ -n \frac{\tilde{e}_{22}^j}{\xi^2} & -\tilde{\rho}_j(ka)^2 + \frac{\tilde{e}_{22}^j}{\xi^2} & \frac{1}{\xi} \left( \frac{\tilde{c}_{12}^j}{\tilde{c}_{11}^j} - 1 \right) & -\frac{n}{\xi} \\ -\tilde{\rho}_j(ka)^2 + n^2 \frac{\tilde{e}_{22}^j}{\xi^2} & n \frac{\tilde{e}_{22}^j}{\xi^2} & \frac{\tilde{c}_{12}^j}{\tilde{c}_{11}^j} \frac{n}{\xi} & -\frac{2}{\xi} \end{pmatrix} \quad (C.1)$$