

CFA/VISHNO 2016

Modèle de Jones généralisé pour l'étude d'une interface rugueuse

D. Meier^a, H. Franklin^a, M. Predoi^b, M. Rousseau^c et J.-L. Izbicki^a
^aLOMC, UMR 6294 Université du Havre, 75 rue de Bellot, 76600 Le Havre, France
^bUniversité Polytechnique de Bucarest, Splaiul Independenței 313, 060042 Bucarest, Roumanie
^cIJLRA UMR 7190 UPMC, Université Paris 06, 75005 Paris, France
dominique.meier62@gmail.com



LE MANS

L'étude d'une rugosité d'interface par un modèle phénoménologique fait l'objet du travail proposé. Une plaque présentant une rugosité sur une de ses interfaces est immergée dans un fluide parfait. La rugosité est modélisée par une forme géométrique simple : une aspérité périodique triangulaire. Pour une multicouche plane comportant un joint de colle mince entre deux plaques d'aluminium il avait été montré que la rupture cohésive du joint pouvait être modélisée par des constantes de Jones. Une identification du modèle « plaques réunies par un joint de colle » et du modèle « plaques assemblées » mais avec des conditions d'interface de type Jones entraînait le fait que les constantes de Jones devaient dépendre de la fréquence et être complexes. Dans le système étudié, une constante complexe est nécessaire à l'interface rugosité/eau, deux paramètres réels sont donc nécessaires. La description d'une rugosité nécessite, elle aussi, deux paramètres indépendants. Les conditions d'interface étant écrites, le coefficient de transmission est calculé analytiquement. Au voisinage d'une résonance isolée, une approximation de Breit-Wigner est exploitée. Pour un type de rugosité, une simulation numérique est réalisée. L'étude des résonances obtenues permet alors de déterminer les paramètres du modèle théorique.

1 Introduction

Les surfaces planes présentent parfois des imperfections, des rugosités artificielles qui vont intervenir dans différents domaines, dont celui des collages par exemple.

Dans la plupart des cas, les études sont menées selon une direction privilégiée Ox qui est celle de l'interface. Pour une plaque d'épaisseur moyenne notée H , la surépaisseur $h_r(x)$ évaluée à partir de H décrit les imperfections de la surface, Figure 1. L'amplitude de $h_r(x)$ reste faible (comparée à H) pour la plupart des rugosités, leurs effets pourront donc être considérés comme une perturbation de la théorie classique des plaques immergées.

Les imperfections géométriques des plaques planes immergées modifient le comportement des ondes qui s'y propagent, notamment celui des modes de Lamb. Ceux-ci sont affectés à la fois par les lentes variations d'épaisseur de la plaque ainsi que par la rugosité (variations rapides mais de faible amplitude).

Vlasie et Rousseau [1] ont étudié les caractéristiques de deux plaques élastiques collées en attribuant à la couche de colle un comportement rhéologique similaire au modèle de Jones [8]. La couche de colle, mince par nature, couple les comportements oscillants des deux plaques. Le comportement de cette couche a été modélisé avec succès par une distribution surfacique de ressorts de constante de raideur K_L pour les compressions normales (perpendiculaires aux plaques).

Nagy et Adler [2, 3] ont étudié l'atténuation des ondes réfléchies et transmises par une plaque d'aluminium immergée dans de l'eau, mais uniquement sous incidence normale. Nagy a étendu son étude sur différents types d'interfaces rugueuses en comparant théorie et expérience. Duclos *et al* [4] utilisent le formalisme résonant pour décrire la propagation de l'onde de Rayleigh à l'interface solide liquide. Cette approche est similaire à celle utilisée dans ce travail. Drinkwater *et al* [5] ont étudié le comportement du coefficient de réflexion pour des ondes incidentes normales à l'interface entre deux plaques d'aluminium rugueuses. Dans ce travail, les études porteront sur le coefficient de transmission du côté de l'interface non rugueuse. Ce choix se justifie par le fait que l'on évite les effets de diffraction que l'on retrouve nécessairement du côté de la face rugueuse.

Dans ce travail, la rugosité réelle est simplifiée. Elle est remplacée par un motif géométrique triangulaire périodique simple. La méthode des éléments finis est exploitée pour simuler la diffusion acoustique par la plaque. Pour chaque

mode de Lamb, le coefficient de transmission de l'onde de pression, noté t_1 , est déterminé par la méthode des Eléments Finis (MEF), il est tracé et étudié en fonction de l'angle d'incidence noté θ .

À partir des résultats numériques, et pour chaque mode résonant, la position angulaire du pic définie par la valeur maximale de t_1 et sa largeur à mi-hauteur sont déterminées par la méthode des moindres carrés via une anamorphose de l'expression de $t_1(\sin\theta)$.

Ces résultats sont alors comparés à ceux obtenus par l'analyse modale classique en considérant la constante de raideur de la distribution de ressorts K_L comme complexe.

L'objectif majeur de ce travail est de montrer que l'on peut caractériser une interface rugueuse par un modèle rhéologique associé à une interface plane. Cette dernière étant plus rapide et plus simple que les démarches d'analyse classiques des rugosités.

2 Simulation numérique de la diffusion acoustique par une plaque rugueuse

On considère une plaque plane dont l'interface supérieure présente un défaut triangulaire de géométrie simple et périodique. Cette plaque est immergée dans de l'eau, considérée comme un fluide parfait (pas de viscosité). La hauteur h_r (Figure 1) du défaut sera considéré comme un paramètre variable, mais sa valeur reste petite devant l'épaisseur moyenne de la plaque, $h_r \ll H$. La largeur L_x d'un motif est comparable à la longueur d'onde de l'onde de Lamb.

On impose à la surpression $p(x,z)$ d'être périodique dans la direction horizontale $p(0,z) = p(L_x,z)e^{ik_x L_x}$, dans les deux domaines fluides. La même périodicité est imposée pour les champs de déplacements dans la plaque : $\vec{U}(0,z) = \vec{U}(L_x,z)e^{ik_x L_x}$. On admet que cette périodicité, qui est exacte dans le cas des plaques non rugueuses, reste valable dans le cas des faibles perturbations géométriques. Les conditions de passage aux deux interfaces fluide-solide sont : continuité des accélérations normales, continuité entre la surpression et la composante normale de la contrainte ($-p = \sigma_{zz}$), continuité de la contrainte tangentielle ($\sigma_{xz} = 0$). Les deux domaines fluides sont théoriquement infinis. Ils sont modélisés en imposant des conditions de rayonnement d'ondes planes, ou par des

Perfectly Matched Layers (PML), avec des résultats quasi-identiques.

On considère, dans tout ce travail un problème plan (2D). La plaque est en acier de masse volumique $\rho_s = 7800 \text{ kg/m}^3$, les célérités des ondes longitudinale et transversale sont alors $C_L = 6020 \text{ m/s}$ et $C_T = 3220 \text{ m/s}$. La masse volumique de l'eau est prise égale à 1000 kg/m^3 et la vitesse du son dans l'eau est $c_e = 1500 \text{ m/s}$. L'épaisseur de la plaque vaut $H = 5 \text{ mm}$.

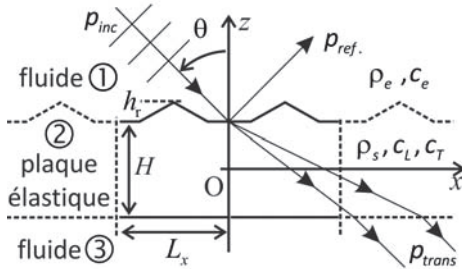


Figure 1 : plaque plane immergée présentant un défaut périodique simple.

La simulation numérique par EF a été menée à l'aide d'un logiciel commercial [6]. Un détail du maillage est présenté sur la Fig. 2. La taille maximale d'une arête d'une maille est de 0,2 mm.

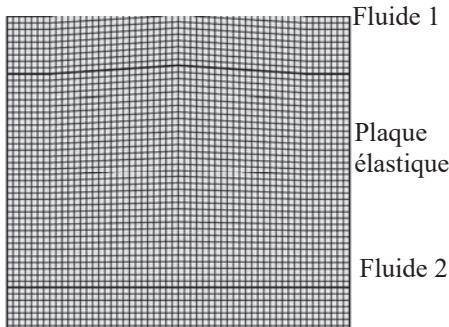


Figure 2 : maillage d'une cellule de largeur L_x .

Une onde plane progressive harmonique incidente $p_{inc} = p_0 e^{i(\vec{k}_{inc} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ se propage dans le fluide jusqu'à atteindre la plaque sous l'angle θ (Fig. 1). Dans le but d'identifier les modes de Lamb, le coefficient de transmission t_1 est d'abord calculé pour la plaque plane sur une large gamme angulaire [7] (Fig. 3). Dans cette présentation la fréquence d'étude a été fixée à 600 kHz, pour chaque mode, les courbes correspondant aux différentes valeurs de h_r sont tracées (par exemple, pour le mode A_1 , Fig. 4).

Pour chaque mode et pour différentes valeurs de h_r une centaine de valeurs de t_1 sont prises en compte autour d'une résonance. Autour d'un pic, le coefficient de transmission, pour une résonance considérée comme isolée s'exprime selon le modèle de Breit-Wigner [7] par :

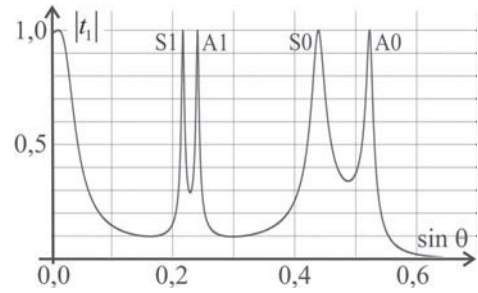


Figure 3 : module du coefficient de transmission t_1 en fonction de $\sin \theta$ à 600 kHz.

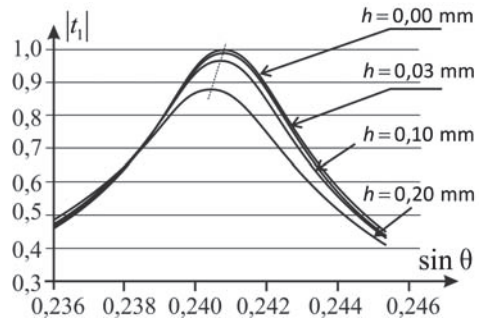


Figure 4 : module du coefficient de transmission t_1 en fonction de $\sin \theta$ pour quelques valeurs de h_r .

$$t_1 = \frac{\text{Constante}}{(\sin \theta - \sin \theta_{\max}) - i\gamma / 2} \quad (1)$$

où $\sin \theta_{\max}$ est le sinus de l'angle du maximum du pic de résonance et γ sa largeur à -3 dB . Ces deux grandeurs caractérisent une résonance et l'on a $|t_1| \leq 1$. La détermination de leur valeur se fait par la méthode des moindres carrés *via* une anamorphose à partir d'une sélection d'une centaine de points autour du maximum (voir Fig 4b). Le coefficient de corrélation correspondant vaut, au minimum 0,999 pour les cas présentés.

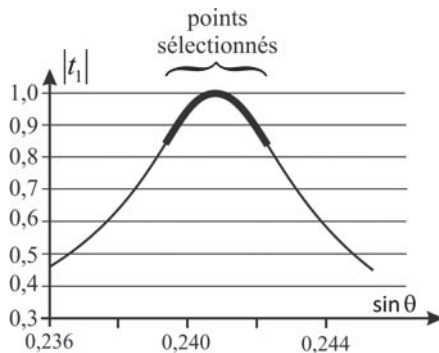


Figure 4b : détail des points sélectionnés pour déterminer les caractéristiques d'un pic résonant.

Les caractéristiques des pics pour les modes A_1 et S_1 à 600 kHz ont été déterminées pour chaque valeur de h_r .

Pour chaque mode, les valeurs de $\sin\theta_{\max}$ et de γ sont relevées en fonction de h_r et les grandeurs relatives suivantes sont déterminées :

$$\eta_0 = 100 \frac{\sin\theta_{\text{plaque plane}} - \sin\theta_{\max}}{\sin\theta_{\text{plaque plane}}}, \quad (2)$$

$$\eta_\gamma = 100 \frac{\gamma_{\text{plaque plane}} - \gamma}{\gamma_{\text{plaque plane}}}. \quad (3)$$

où $\theta_{\text{plaque plane}}$ correspond à l'angle de résonance en absence de rugosité. L'évolution de ces deux paramètres est tracée en fonction de h_r correspondant aux figures 5 et 6. L'évolution de ces deux paramètres va servir de base de comparaison pour déterminer les paramètres du modèle rhéologique. Mais on peut d'ores et déjà noter que la largeur à mi-hauteur évolue de façon notable (environ 15%, Fig. 5) alors que la position angulaire du pic de résonance est peu affectée par la rugosité (environ 0,2% Fig. 6).

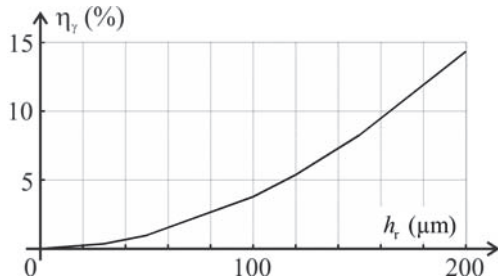


Figure 5 : variation relative de la largeur à mi-hauteur du mode A_1 à 600 kHz.

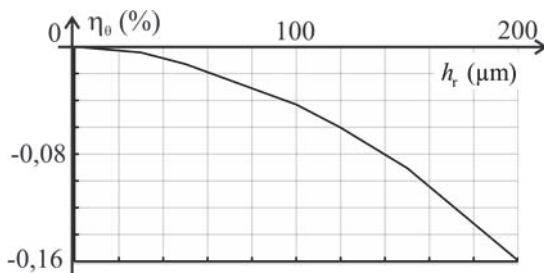


Figure 6 : variation relative du sinus de l'angle du maximum du pic de résonance pour le mode A_1 à 600 kHz.

3 Modèle rhéologique

Dans le cadre de l'étude rhéologique, l'interface rugueuse étudiée précédemment est remplacée par une interface plane avec des conditions aux limites adaptées. Dans le modèle de Jones [8], une distribution surfacique de ressorts modélise le comportement de l'interface (voir Fig. 7).

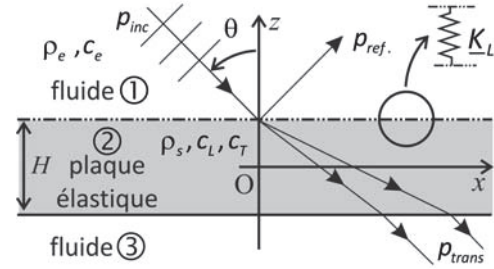


Figure 7 : modèle rhéologique de la plaque rugueuse.

Dans ce travail, nous considérons la constante de raideur comme une grandeur complexe, elle est notée \underline{K}_L et elle fait intervenir deux paramètres : K'_L et β selon :

$$\underline{K}_L = K'_L (1 + i\beta) \quad (4)$$

La partie réelle K'_L qui correspond à la constante de Jones utilisée de façon classique et qui intervient dans les analyses précédentes [9].

Dans la suite, le fluide étant parfait, les conditions aux limites adaptées, en $+H/2$ et $-H/2$ (voir Fig. 1) s'écrivent :

$$\begin{cases} -p_1 = \underline{K}_L (u_{z2} - u_{z1}) \\ \sigma_{zz2} = -p_1 \\ \sigma_{xz2} = 0 \end{cases} \quad (5a)$$

$$\begin{cases} u_{z2} = u_{z3} \\ \sigma_{zz2} = -p_3 \\ \sigma_{xz2} = 0 \end{cases} \quad (5b)$$

L'équation 5b traduit les conditions aux limites d'une interface classique solide/fluide puisqu'en $-H/2$ il n'y a pas de rugosité.

Une onde plane progressive incidente excite la plaque sous l'angle θ , elle s'écrit $p_{inc} = p_0 e^{i(\vec{k}_{inc} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ avec $\vec{k}_{inc} : (k_x, k_{1z}) = (k_1 \sin\theta, -k_1 \cos\theta)$ correspondant au vecteur d'onde, ω est la fréquence angulaire, $k_1 = \omega/c_1$ le nombre d'onde dans le fluide et p_0 l'amplitude de l'onde. On introduit la grandeur adimensionnée suivante : $\bar{k}_x = k_x/k_1 = \sin\theta$. À partir des équations 5a et 5b, le coefficient de transmission t_1 est déterminé selon :

$$t_1 = \frac{\pm \frac{i}{2} \gamma / e^-}{\underbrace{\left[\bar{k}_x - \bar{k}_{x,\max} - \frac{i}{2} \gamma \right]}_{\text{plaque plane}} + \frac{i}{4} \gamma (1 - 1/e^-)} \quad (6)$$

où γ correspond à la largeur à mi-hauteur d'un pic résonant pour une plaque plane, $\bar{k}_{x,\max} = \sin\theta_{\max}$ correspond au sinus de l'angle du maximum du coefficient de transmission et le terme e^- qui fait intervenir la constante

de Jones complexe : $e^- = 1 - i \underbrace{\left(\frac{\rho_e c_e \omega}{\cos \theta_{\max}} \frac{1}{K'_L} \right)}_{\alpha} \frac{1}{1 + i\beta}$. Pour

éviter de surcharger l'écriture, on pose $\alpha = \left(\frac{\rho_e c_e \omega}{\cos \theta_{\max}} \frac{1}{K'_L} \right)$.

Au dénominateur de l'Eq (6) le terme entre crochets correspond au cas d'une plaque plane (voir Eq. (1)). Le terme $\frac{1}{e^-}$ au numérateur et le terme en $\frac{1}{4}\gamma(1-1/e^-)$ au dénominateur s'interprètent comme des termes perturbateurs dus à la rugosité.

Le dénominateur du coefficient de transmission peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\bar{k}_x - \bar{k}_{x,\max} - \underbrace{\frac{\gamma\alpha}{4|e^-|^2}}_{(1)} - i \frac{1}{4}\gamma \underbrace{\left(1 + \frac{1-\alpha}{|e^-|^2} \right)}_{(2)} \quad (7)$$

Le terme (1) traduit la variation de la position du maximum angulaire du pic résonant. Le terme (2) traduit l'évolution de la largeur à mi-hauteur de la résonance.

À partir des courbes établies dans le cadre de la simulation numérique, les variables K'_L et β sont déterminées par la méthode des moindres carrés (via une anamorphose). Dans chaque cas, une centaine de points autour du maximum sont sélectionnés. Il faut noter que les coefficients de corrélation pour chaque courbe sont supérieurs à 0,9999. Ces valeurs valident le modèle de l'expression du coefficient de transmission (Eq. (6)). Ces dernières valeurs sont plus proches de l'unité que celles obtenues pour le modèle de Breit-Wigner.

On obtient, par exemple, à 600 kHz pour le mode A_1 , les résultats indiqués dans le Tableau 1.

h_r (μm)	K'_L ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$)	β
0	∞	0
30	$1,55 \cdot 10^{14}$	-0,084
50	$5,14 \cdot 10^{13}$	-0,13
100	$1,52 \cdot 10^{13}$	-0,18
120	$1,08 \cdot 10^{13}$	-0,19
150	$7,2 \cdot 10^{12}$	-0,20

Tableau 1 : Valeurs des variables K'_L et β pour le mode A_1 à 600 kHz.

Le terme β est un terme correctif de faible valeur numérique qui traduit l'évolution de la position angulaire du pic. Il intervient aussi dans la diminution de l'amplitude du coefficient de transmission. Ces deux dernières

évolutions sont peu significatives, de l'ordre de quelques pourcents ou moins, suivant les modes et la fréquence (voir Fig. 6 pour l'angle maximal de résonance).

Il faut noter que, dans l'expression du dénominateur (Eq. (7)), la partie réelle de la constante de Jones K'_L traduit l'élargissement du pic de résonance. L'évolution des valeurs numériques de K'_L (Tab. (1)) est comparable à celle obtenue par l'analyse faite dans le plan complexe dans le cadre d'une publication précédente [9].

Dans cette publication l'étude des caractéristiques des pics résonants avait été faite dans le plan complexe. À partir des conditions aux limites (Eq. (5a) et (5b)), on établit le système linéaire d'équations reliant les amplitudes des ondes qui se propagent dans les fluides et la plaque. Le déterminant de ce système dépend de ω (qui est fixé), du vecteur d'onde \underline{k}_x et de la constante de Jones K'_L . Les zéros du déterminant de ce système permettent d'accéder aux caractéristiques des résonances angulaires sous la forme : $\underline{k}_x = k'_x + j k''_x$. La recherche de ces solutions est faite dans le plan complexe par la méthode de Newton-Raphson. Il est alors possible de relier les caractéristiques des pics résonants au vecteur d'onde complexe par la relation suivante :

$$\sin \theta = \underline{k}_x / k_F \quad (7)$$

Avec $k_F = \omega / c_{\text{eau}}$, le vecteur d'onde de l'onde ultrasonique dans l'eau. Pour des valeurs de K'_L supérieures à $10^{14} \text{ N} \cdot \text{m}^{-3}$ les caractéristiques obtenues correspondent à celles d'une plaque plane. L'évolution de la partie imaginaire des zéros du déterminant est tracée en fonction de K'_L à la figure 7 pour le mode A_1 à 600 kHz. On constate que les variations relatives de la partie imaginaire sont de l'ordre de 15% lorsque K'_L varie de $10^{14} \text{ N} \cdot \text{m}^{-3}$ à $10^{13} \text{ N} \cdot \text{m}^{-3}$. Ce domaine de variation est comparable à celui obtenu dans le cadre de cette étude. On constate, ici aussi, que les valeurs de K'_L diminuent lorsque la rugosité augmente. La courbe de la figure 7 doit être lue en partant des fortes valeurs de K'_L correspondant à la plaque plane vers les valeurs plus faibles K'_L correspondant à une rugosité plus importante.

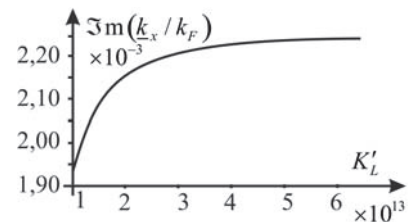


Figure 8 : évolution de la partie imaginaire des zéros du déterminant en fonction de K'_L pour le mode A_1 à 600 kHz.

5 Conclusion

Le modèle rhéologique proposé traduit bien l'évolution du coefficient de transmission pour le modèle de rugosité proposé. Il donne des résultats comparables pour les modes

S_1 et A_2 aux fréquences de 700 kHz et de 800 kHz. On ne peut pas monter plus haut en fréquence pour la simple raison que l'on est obligé de raffiner le maillage du calcul par éléments finis en conséquence. Cela induirait des temps de calculs de plus en plus longs. C'est ce qui justifie la mise au point du modèle rhéologique de substitution qui lui peut être utilisé quelle que soit la fréquence.

Références

- [1] V. Vlasie-Belloncle, M. Rouseau, Ultrasonics, Empirical rheological model for rough or grooved bonded interfaces, 47, 10-14, 2007.
- [2] P. Nagy, L. Adler, : Attenuation of reflected and transmitted ultrasonic waves through a rough interface. In : ULTRASONICS SYMPOSIUM, Denver, pp.1083-1086 (1987)
- [3] P. Nagy, L. Adler, Surface roughness induced attenuation of reflected and transmitted ultrasonic waves, J. Acoust. Soc. Am. 82(1) (1987) 193-197.
- [4] J. Duclos, J.-L. Izbicki, O. Lenoir, J. Conoir, Resonant formalism for the liquid-solid interface Rayleigh mode, Acta Acoustica 2 (1994) 375-378.
- [5] B. Drinkwater, R. Dwyer-Joice, P. Cawley, A study of the interaction between ultrasound and partially contacting solid-solid interface, Proc. R. Soc. London 452 (1996).
- [6] COMSOL Multiphysics – www.comsol.com
- [7] R. Fiorito, W. Madigosky, H. Überall, Resonance theory of acoustic waves interacting with an elastic plate, J. Acoust. Soc. Am., 66, 1857-1866, 1979.
- [8] J.P. Jones, J.S. Whittier, Waves at flexibly bonded interface, J. Appl. Mech, 34, 905-908, 1967.
- [9] D. Meier, Hervé Franklin, Jean-Louis Izbicki, Mihai Prédoi, Martine Rouseau, Physics Procedia, Volume 70, 110-113, 2015.