

## CFA/VISHNO 2016

**Identification des excitations sur des panneaux par la mesure de leur réponse vibratoire et la Méthode des Champs Virtuels**A. Berry<sup>a</sup> et O. Robin<sup>b</sup><sup>a</sup>Groupe d'Acoustique de l'Université de Sherbrooke, 2500 boul. de l'Université, Sherbrooke, QC, Canada J1K 2R1<sup>b</sup>Groupe d'Acoustique de l'Université de Sherbrooke, 2500 boul. de l'Université, Sherbrooke, Canada J1K 2R1  
alain.berry@usherbrooke.ca

LE MANS

L'identification des chargements dynamiques agissant sur une structure est un problème important dans les situations où des panneaux sont excités par des champs acoustiques diffus ou par des écoulements turbulents, par exemple. Ce travail explore la reconstruction d'excitations déterministes ou aléatoires sur des panneaux en flexion, à partir d'une mesure de leur réponse vibratoire. L'approche utilisée, la Méthode des Champs Virtuels (Virtual Fields Method), est basée sur une forme intégrale de l'équilibre du panneau, dans laquelle des déplacements virtuels par morceaux permettent d'extraire la distribution spatiale des forces externes. La méthode requiert donc que l'opérateur différentiel gouvernant la dynamique de la structure (et les paramètres constitutifs de celle-ci) soit connu a priori. Dans ce travail, la réponse vibratoire du panneau est principalement déterminée par vibrométrie laser Doppler à balayage. Des mesures utilisant la déflectométrie optique par caméra rapide sur des grilles spatiales à haute résolution seront également présentées. Ces mesures sont post-traitées pour extraire les champs de déplacements transverses et de courbures de flexion nécessaires pour obtenir les énergies cinétique et élastique de la structure. La formulation de la Méthode des Champs Virtuels dans les cas de chargements déterministes et aléatoires sera détaillée, et des résultats expérimentaux obtenus sur des panneaux sous divers chargements mécaniques ou acoustiques (source monopolaire ou champ acoustique diffus) seront présentés. La présentation abordera également l'application de la Méthode des Champs Virtuels à l'identification des paramètres constitutifs (rigidité, amortissement) de panneaux.

## 1 Introduction

L'identification des forces dynamiques exercées sur des structures élastiques est un problème pratique important en ingénierie. La méthode FAT (Force Analysis Technique), développée notamment par Guyader et Pézerat [1, 2] consiste à utiliser l'équation d'équilibre de plaques en flexion pour identifier les distributions de pression pariétales. Cette technique peut être alimentée par une mesure continue de la réponse vibratoire par vibrométrie laser Doppler. Une autre approche, développée par les mêmes auteurs, utilise plutôt une forme intégrale de l'équation d'équilibre de la structure [3], ce qui améliore partiellement la robustesse et la précision des résultats. Cette méthode a été appliquée à des poutres et des plaques.

En parallèle, Grédiac et Pierron ont utilisé le Principe des Travaux Virtuels pour identifier les paramètres mécaniques constitutifs de matériaux [4]. Ceci a conduit à l'élaboration de la Méthode des Champs Virtuels (VFM en anglais) [5]. Cette méthode a été appliquée plus récemment à l'identification de chargements dynamiques déterministes [6] ou aléatoires [7] sur des panneaux plans en flexion. Dans ces derniers travaux, la mesure de la réponse vibratoire est obtenue par vibrométrie laser Doppler.

Ce papier étend les travaux précédemment cités dans deux directions spécifiques : (1) l'exploration de la déflectométrie optique [8] comme alternative à la vibrométrie laser Doppler pour la mesure plein champ à haute résolution spatiale de la réponse vibratoire de panneaux ; la déflectométrie est en particulier applicable à des excitations instationnaires. (2) l'extension de la méthode des Champs Virtuels présentée ici à l'identification et la cartographie des rigidités de flexion du panneau ; l'extraction de divers paramètres structuraux a déjà été présentée par d'autres auteurs à partir de l'équation locale du mouvement [9]. Par souci de concision, le cas de chargement aléatoire ne sera pas abordé dans ce papier.

## 2 Méthode des Champs Virtuels pour l'identification des chargements

### 2.1 Concepts généraux

On considère une plaque en flexion pure de surface  $S$ , soumise à un chargement transverse  $q(\mathbf{x}, t)$  [Pa], où  $\mathbf{x}$

désigne un point quelconque de  $S$ . La réponse de la plaque implique deux quantités d'intérêt : le champ de déplacement transverse  $w(\mathbf{x}, t)$  [m] et le champ de courbure  $\mathbf{k}(\mathbf{x}, t)$ , qui dans le cas de flexion pure est donné par l'expression  $\mathbf{k}(\mathbf{x}, t) = -\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\right\}^T w(\mathbf{x}, t)$  ( $T$  dénote la transposition et  $x, y$  sont les coordonnées cartésiennes sur  $S$ ).

Les champs de déplacement et de courbure peuvent être mesurés par vibrométrie laser Doppler ou par déflectométrie optique [8], par exemple. La vibrométrie requiert l'intégration temporelle de la vitesse transverse pour construire le déplacement transverse, et une double dérivation spatiale des déplacements pour produire les courbures. Cette opération de double dérivation peut conduire à amplifier le bruit de mesure. Par contraste, la déflectométrie optique fournit une mesure directe de la pente de flexion locale suivant  $x$  et  $y$  [8, 10] ; en conséquence, des opérations de dérivation et d'intégration spatiales simples sont requises pour générer les courbures et les déplacements, respectivement. Un des avantages anticipés de la déflectométrie optique est donc de permettre une estimation plus précise des champs de courbures de la structure. Dans cet article, la vibrométrie laser Doppler et la déflectométrie optique sont utilisées pour mesurer les champs de déplacement transverse et de courbure de flexion. L'objectif dans cette section est d'extraire le chargement inconnu  $q(\mathbf{x}, t)$  étant donné des mesures de  $w(\mathbf{x}, t)$  et  $\mathbf{k}(\mathbf{x}, t)$  et en supposant que les propriétés mécaniques de la plaque sont connues.

Le principe des travaux virtuels s'écrit [5]

$$\begin{aligned} & h \int_S \rho w^v(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 w(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} d\mathbf{x} + \\ & \frac{h^3}{12} \int_S \mathbf{k}^{vT}(\mathbf{x}) \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \mathbf{k}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \\ & = \int_S w^v(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (1)$$

où  $\rho$  est la masse volumique de la plaque,  $h$  est son épaisseur,  $\mathbf{Q}$  est la matrice élastique  $3 \times 3$ , et  $w^v(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{k}^v(\mathbf{x})$  sont des champs de déplacements et de courbures *virtuelles*. Le déplacement virtuel dans l'équation (1) est une fonction  $C^1$  sur  $S$  ; de plus, si cette fonction est choisie comme étant cinématiquement admissible, le travail des efforts sur le contour de la plaque s'annule dans l'équation (1). À titre

d'exemple, si la plaque est encastrée, les déplacements et pentes virtuelles doivent être nulles sur la frontière pour éliminer les efforts tranchants et moments de flexion aux limites.

Dans le cas d'un chargement harmonique,  $q(\mathbf{x}, t) = \tilde{q}(\mathbf{x}, \omega) \exp(j\omega t)$ , où  $\omega$  est la pulsation et  $j = \sqrt{-1}$ , la réponse de la structure est elle aussi harmonique,  $w(\mathbf{x}, t) = \tilde{w}(\mathbf{x}, \omega) \exp(j\omega t)$  et  $\mathbf{k}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, \omega) \exp(j\omega t)$ . Le principe des travaux virtuels prend donc la forme

$$\begin{aligned} & -\omega^2 h \int_S \rho w^v(\mathbf{x}) \tilde{w}(\mathbf{x}, \omega) d\mathbf{x} + \\ & \frac{h^3}{12} \int_S \mathbf{k}^{vT}(\mathbf{x}) \mathbf{Q}(\mathbf{x}, \omega) \tilde{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, \omega) d\mathbf{x} \\ & = \int_S w^v(\mathbf{x}) \tilde{q}(\mathbf{x}, \omega) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (2)$$

Les pertes structurales sont introduites par la suite dans l'équation (2) par le biais d'une matrice élastique complexe,  $\tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, \omega) + j\omega \mathbf{C}(\mathbf{x}, \omega)$ , où  $\mathbf{C}$  est la matrice d'amortissement  $3 \times 3$  de la plaque. Les équations (1) et (2) sont utilisées dans la suite pour extraire  $q(\mathbf{x}, t)$  ou  $\tilde{q}$  étant donné des mesures de  $w(\mathbf{x}, t)$  et  $\mathbf{k}(\mathbf{x}, t)$  ou  $\tilde{w}(\mathbf{x}, \omega)$  et  $\tilde{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, \omega)$ , et un choix approprié de champs virtuels  $w^v(\mathbf{x})$  et  $\mathbf{k}^v(\mathbf{x})$ .

## 2.2 Champs virtuels

Dans ce travail, les champs virtuels sont choisis comme des fonctions par morceaux sur  $S$ . Le champ virtuel prend des valeurs non nulles sur une fenêtre rectangulaire  $S_v = [a_x \ b_x] \times [a_y \ b_y]$  de la plaque (figure 1), et est nul ailleurs. Le support  $S_v$  sera appelé fenêtre virtuelle par la suite. Pour éliminer comme inconnues les efforts tranchants et moments de flexion sur le contour de  $S_v$ , les champs de déplacements et de pentes virtuels doivent s'annuler sur ce contour. Le déplacement virtuel choisi est basé sur les fonctions d'interpolation Hermite16 utilisées dans la méthode des éléments finis [5]. Au total, 9 noeuds sont définis sur la fenêtre virtuelle, divisant celle-ci en 4 quadrants. Dans le système de coordonnées locales de chaque quadrant  $-1 \leq \xi_1 \leq +1, -1 \leq \xi_2 \leq +1$ , les déplacements virtuels sur le quadrant  $ij$  (figure 1) sont définis par :

$$w_{ij}^v(x, y) = H_{3-j}^0(\xi_1) H_{3-i}^0(\xi_2) \quad (3)$$

où  $H_1^0(\xi_1) = \frac{1}{4}(2 + \xi)(1 - \xi)^2$ ,  $H_2^0(\xi_1) = \frac{1}{4}(2 - \xi)(1 + \xi)^2$  sont les polynômes de Hermite,  $\xi_1 = \frac{4x}{b_x - a_x} + c_1$ ,  $\xi_2 = \frac{4y}{b_y - a_y} + c_2$  et  $c_1, c_2$  sont des constantes définies pour chaque quadrant. Les courbures associées à ces déplacements virtuels s'expriment simplement à partir des polynômes de Hermite et de leurs dérivées spatiales. Les déplacements virtuels et courbures virtuelles correspondants sont illustrés à la figure 2. On constate bien que les déplacements et pentes virtuels sont nuls sur le contour de la fenêtre virtuelle et que le déplacement virtuel est unitaire au noeud central.

Une fois les champs virtuels définis sur  $S_v$ , l'équation (1) peut être utilisée pour extraire le chargement  $q(\mathbf{x}, t)$ ; l'intégration sur  $S$  est maintenant restreinte à la fenêtre virtuelle  $S_v$ ,

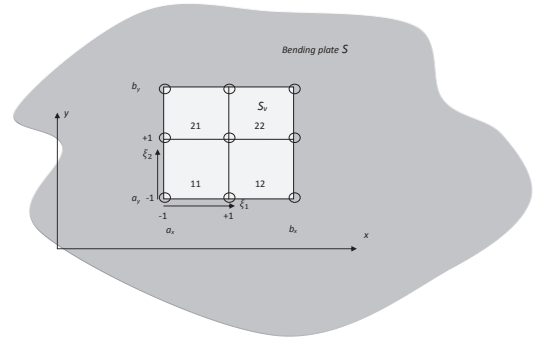


FIGURE 1 – Plaque en flexion pure  $S$  et fenêtre virtuelle  $S_v$ .

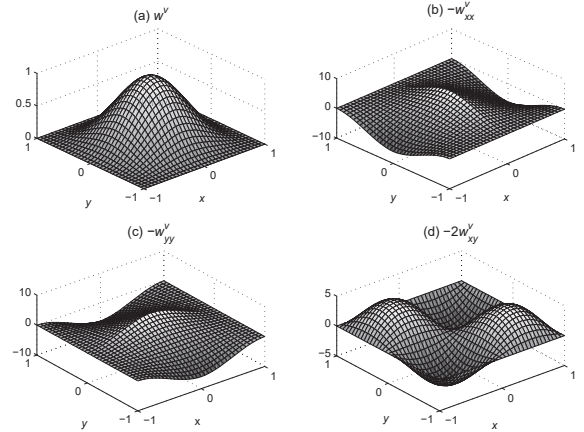


FIGURE 2 – Champs virtuels Hermite16, (a) : déplacement virtuel  $w^v(x, y)$  et courbure virtuelle (b) :  $k_1 = -\frac{\partial^2 w^v(x, y)}{\partial x^2}$ , (c) :  $k_2 = -\frac{\partial^2 w^v(x, y)}{\partial y^2}$ , (d) :  $k_6 = -2\frac{\partial^2 w^v(x, y)}{\partial x \partial y}$ .

$$\begin{aligned} & h \int_{S_v} \rho w^v(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 w(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} d\mathbf{x} + \\ & \frac{h^3}{12} \int_{S_v} \mathbf{k}^{vT}(\mathbf{x}) \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \mathbf{k}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \\ & = \int_{S_v} w^v(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (4)$$

L'équation ci-dessus peut être utilisée pour des fenêtres virtuelles de petite taille décrivant l'ensemble de la plaque, de façon à déterminer  $q$  sur  $S$ . Si le chargement  $q(\mathbf{x}, t)$  est résolu comme une pression uniforme  $q(t)$  sur la fenêtre virtuelle, le terme de droite de l'équation (4) devient  $\int_{S_v} w^v(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = q(t) \int_{S_v} w^v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = q(t) \frac{(b_x - a_x)(b_y - a_y)}{4}$ . Si le chargement  $q(\mathbf{x}, t)$  est résolu comme une force ponctuelle  $f(t)$  appliquée au centre  $\mathbf{x}_c$  de la fenêtre virtuelle, alors  $\int_{S_v} w^v(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{S_v} w^v(\mathbf{x}) f(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c) d\mathbf{x} = f(t)$  puisque  $w^v(\mathbf{x}_c) = 1$ .

## 3 Mesure de la réponse structurale

Deux moyens de mesurer les quantités d'intérêt (champ de déplacement transverse  $w$  et champ de courbures  $\mathbf{k}$ ) sont envisagés ici : la vibrométrie laser Doppler à balayage et la deflectométrie optique.

### 3.1 Vibrométrie laser Doppler

La vibrométrie laser Doppler à balayage ne s'applique que dans le cas de chargements stationnaires. La vitesse vibratoire mesurée en chaque point du maillage de mesure est calculée dans le domaine fréquentiel par FFT. La vitesse transverse est transformée en déplacement par division par  $j\omega$  à chaque fréquence et ce déplacement est lissé spatialement pour éliminer une partie du bruit de mesure en utilisant la fonction Matlab Gridfit. Les courbures de flexion sont ensuite calculées à partir de la version lissée du champ de déplacement en utilisant une simple règle de différentiation double à 3 points. L'étape de lissage du champ de déplacement mesuré s'avère cruciale pour obtenir un champ de courbure fiable en entrée de la méthode d'identification des chargements.

### 3.2 Déflectométrie optique

La déflectométrie optique (aussi appelée méthode de grille réfléchie) apparaît comme un moyen intéressant de mesure plein champ de la réponse structurale, particulièrement pour des chargements instationnaires, puisqu'elle consiste à prendre une série d'images à haute résolution spatiale de la réponse vibratoire sur l'ensemble de la structure. La figure 3 illustre le principe : une caméra rapide observe la réflexion par la plaque d'une grille placée devant celle-ci. La déformation de flexion de la plaque entraîne, via la pente locale  $da$ , un déplacement  $2Lda$  de chaque point de la grille,  $L$  étant la distance entre la plaque et la grille. La mesure requiert un fini miroir de la plaque mesurée (car elle repose sur une hypothèse de réflexion spéculaire), et donne accès aux pentes locales de flexion  $\frac{\partial w}{\partial x}$  et  $\frac{\partial w}{\partial y}$ . Des opérations d'intégration spatiale et de dérivation spatiale sont donc nécessaires pour extraire les champs de déplacement  $w$  et de courbure  $\mathbf{k}$ , respectivement. Un des avantages de la déflectométrie est d'éviter les opérations de double dérivation spatiale requises dans le cas de la vibrométrie laser. En conséquence, aucun lissage des données brutes de pentes locales n'est appliqué ici.

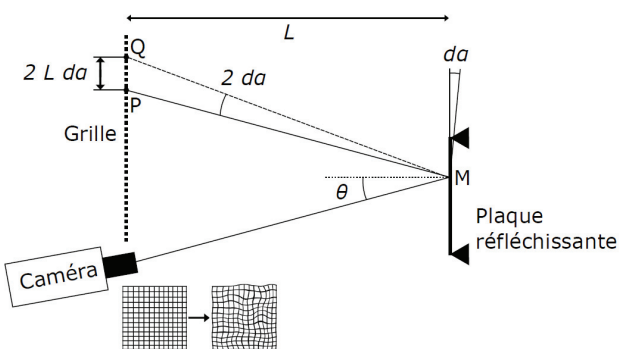


FIGURE 3 – Principe de la déflectométrie optique pour une plaque.

La variation de l'espacement entre les lignes de la grille déformée peut être représentée par un changement de phase dans la périodicité de la grille [11] dans les deux directions. La phase est calculée en effectuant, à l'étape de post-traitement, une transformée de Fourier spatiale discrète de l'image. Une considération importante est que la distance plaque - caméra ou son grossissement doivent

être ajustés pour obtenir un nombre entier  $N$  de pixels par période de grille dans l'image. Pour des raisons pratiques, il est préférable que  $N$  soit au moins égal à 4 afin que la transformée de Fourier spatiale estime bien la phase. Si  $N$  n'est pas entier, un phénomène de Moiré indésirable se produit (interférence spatiale dans l'image entre la grille et le réseau formé par la discrétisation en pixels du CCD).

## 4 Expériences

### 4.1 Protocole expérimental

Les mesures ont été effectuées sur un panneau rectangulaire de dimensions  $0.48 \text{ m} \times 0.42 \text{ m}$  et épaisseur  $h = 3.19 \text{ mm}$ , en aluminium. Le panneau a été monté en conditions de simple appui dans un cadre rigide en acier, inséré dans un baffle en contreplaqué de 4 pieds  $\times$  4 pieds et d'un pouce d'épaisseur et installé dans une chambre anéchoïque; ces conditions assurent des conditions de demi-espace de chaque côté du panneau. Il est à noter que la méthode de reconstruction des efforts ne dépend pas des conditions limites du panneau.

Trois cas d'excitations dynamiques ont été considérés dans les expériences : (i) un pot vibrant électrodynamique (Bruel&Kjaer 4810) connecté au panneau via une tête d'impédance (PCB 208C03); (ii) un marteau d'impact (modèle PCB 086C03) équipé d'une cellule de force; (iii) une source acoustique de débit (source de débit LMS moyenne - haute fréquence) à une faible distance  $z = 0.051 \text{ m}$  de la surface de la plaque, alimentée en bruit blanc. Nous avons vérifié que cette source acoustique se comporte comme une source ponctuelle omnidirectionnelle dans la bande de fréquence 170 - 2000 Hz; sa terminaison est instrumentée par un capteur fournissant une mesure directe de son accélération volumique.

Les mesures plein champ par vibrométrie laser Doppler ont été faites dans les cas d'excitations harmoniques avec un vibromètre Polytec à balayage sur des maillages réguliers de 1 000 à 2 000 points. Les mesures par déflectométrie utilisaient une caméra rapide Photron SA-X2 RV cadencée à 10 000 images/sec avec une discrétisation d'environ 20 000 points sur la zone imagée de la plaque.

### 4.2 Résultats

La figure 4 illustre un résultat de reconstruction des chargements dans le cas d'une source acoustique en champ proche de la plaque. Ce résultat correspond à une fréquence de 1100 Hz extraite de la réponse large bande du panneau. Celle-ci a été mesurée par vibrométrie laser sur un maillage de 37 points  $\times$  27 points. Le chargement a été identifié à l'aide d'une fenêtre virtuelle mobile de  $7 \times 7$  points. La distribution théorique des pressions pariétales complexes en supposant une source d'accélération volumique unitaire en demi-espace est présentée sur la figure 4 pour fin de comparaisons. On constate une bonne reconstruction de la structure spatiale (fronts d'onde) du chargement acoustique par la méthode des champs virtuels. Par ailleurs, les amplitudes de pression reconstruites se comparent raisonnablement bien aux prédictions théoriques.

La figure 5 montre les champs de déplacement transverse mesurés par vibrométrie laser Doppler à balayage sur un maillage de  $43 \times 47$  points de la plaque au complet, et par

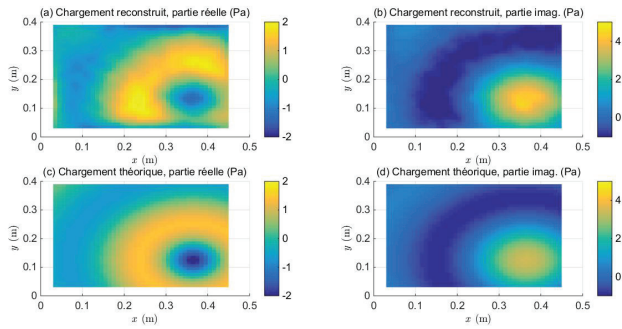


FIGURE 4 – Excitation acoustique par source de débit à 5.1 cm de la plaque, à 1100 Hz. (a) pression reconstruite, partie réelle ; (b) pression reconstruite, partie imaginaire ; (c) pression calculée, partie réelle ; (d) pression calculée, partie imaginaire.

défectométrie optique sur un maillage de  $145 \times 145$  points d'une portion de la plaque. Dans ce dernier cas, le nombre de pixels par période de grille est égal à 7. L'excitation est créée par un pot vibrant dont la position est identifiée par un point noir sur la figure, alimenté par un signal sinusoïdal à 525 Hz. Les champs de déplacement sur la zone commune de mesure sont très comparables, avec des amplitudes en bon accord, ce qui valide la déflectométrie comme un outil efficace de mesure vibratoire. La résolution spatiale permise par cette technique est de plus bien supérieure à la vibrométrie laser, pour un temps d'acquisition considérablement plus faible.

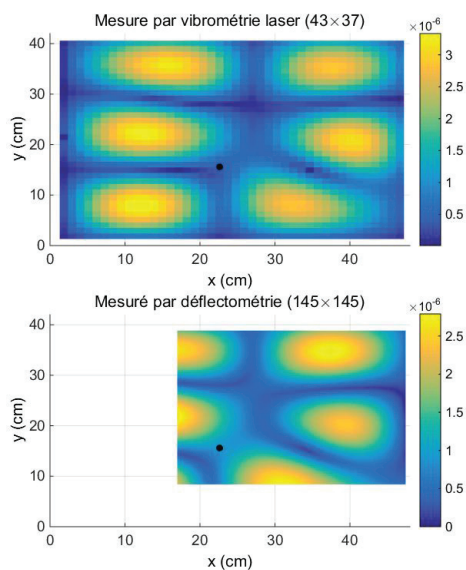


FIGURE 5 – Champ de déplacement transverse mesuré à 525 Hz par vibrométrie laser Doppler (à gauche) et par déflectométrie optique (à droite); échelle d'amplitude en m.

La figure 6 illustre le chargement reconstruit par la Méthode des Champs Virtuels pour une excitation par un pot vibrant alimenté par un signal sinusoïdal à 1313 Hz et d'amplitude pic 3.74 N, mesurée par une cellule de force. Le champ vibratoire est mesuré par déflectométrie optique (comme précédemment, le nombre de pixels par période de grille est égal à 7) et la taille de la fenêtre virtuelle utilisée pour l'identification du chargement est  $25 \times 25$  points, soit environ 5 cm  $\times$  5 cm. La Méthode des Champs Virtuels identifie correctement la position de l'excitation, avec un

niveau d'amplitude de 3.63 N, proche de la mesure directe de la force injectée.

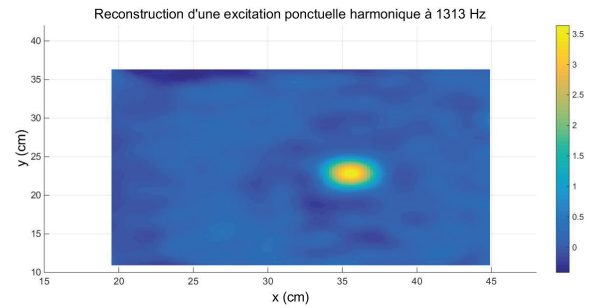


FIGURE 6 – Chargement reconstruit par la Méthode des Champs Virtuels pour une excitation ponctuelle à 1313 Hz d'amplitude pic 3.74 N; échelle d'amplitude en N.

La figure 7 illustre l'application de la méthode à une excitation transitoire, créée par un marteau d'impact sur la plaque, lequel est instrumenté d'un capteur de force. Dans cette situation, le champ d'accélération transverse de la plaque est déduit du champ de déplacement par double différenciation finie, équation (4), avec un échantillonnage temporel de 10 000 images/sec. Il convient de noter qu'une mesure de la réponse vibratoire par vibrométrie laser à balayage dans un cas d'excitation impulsionnelle est impossible.

Le tracé du bas de la figure 7 montre la trace temporelle du déplacement mesuré par déflectométrie optique au point de l'impact, après application de celui-ci à 1ms. Le tracé du haut compare la mesure directe de la force injectée avec la reconstruction de celle-ci par application de la Méthode des Champs Virtuels. On note une excellente concordance, tant sur l'amplitude de la force que sur son évolution temporelle. Ce résultat valide donc l'application de la déflectométrie optique et de la Méthode des Champs Virtuels pour la mesure plein champ de la réponse impulsionnelle d'une plaque, ainsi que l'application de la Méthode des Champs Virtuels pour l'identification de chargements à support temporel limité.

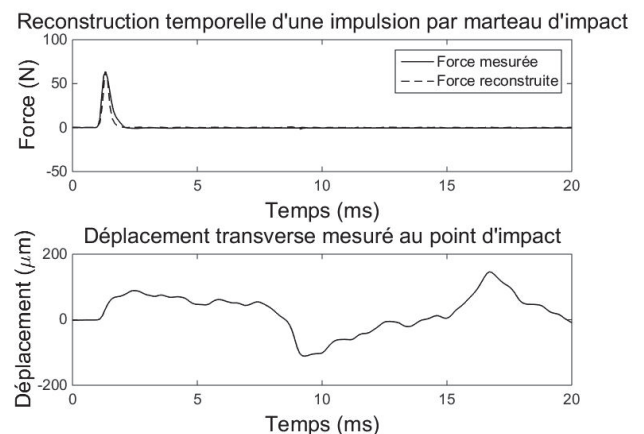


FIGURE 7 – Chargement reconstruit par la Méthode des Champs Virtuels pour une excitation par impact. En haut : trace temporelle de la force mesurée et reconstruite au point d'impact. En bas : déplacement transverse mesuré au point d'impact.

## 5 Méthode des Champs Virtuels pour l'extraction des paramètres structuraux

### 5.1 Formulation

Dans cette section, la Méthode des Champs Virtuels est utilisée pour l'identification et la cartographie des paramètres de rigidité d'une plaque orthotrope, connaissant les chargements externes appliqués. Nous faisons l'hypothèse ici (sans restreindre la généralité de l'approche) que les chargements sont harmoniques. Dans le cadre de l'élasticité plane, la matrice élastique d'une plaque orthotrope, dont les axes d'orthotropie 1 et 2 correspondent aux axes  $x$  et  $y$  est de la forme

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} \tilde{Q}_{11} & \tilde{Q}_{12} & 0 \\ \tilde{Q}_{12} & \tilde{Q}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{Q}_{66} \end{pmatrix} \quad (5)$$

où  $\tilde{Q}_{11} = \frac{\tilde{E}_1}{1-\nu_1\nu_2}$ ,  $\tilde{Q}_{22} = \frac{\tilde{E}_2}{1-\nu_1\nu_2}$ ,  $\tilde{Q}_{12} = \frac{\nu_2\tilde{E}_1}{1-\nu_1\nu_2} = \frac{\nu_1\tilde{E}_2}{1-\nu_1\nu_2}$  et  $\tilde{Q}_{66} = \tilde{G}$ . Dans ces relations,  $\tilde{E}_1$  et  $\tilde{E}_2$  sont les modules d'Young dans les directions principales,  $\tilde{G}$  est le module de cisaillement et  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  sont les coefficients de Poisson. L'amortissement structural est pris en compte pour des sollicitations harmoniques par le biais de modules d'Young et de cisaillement complexes. Il y a donc 4 paramètres (réels ou complexes) qui décrivent entièrement une plaque orthotrope, par exemple  $\tilde{E}_1$ ,  $\tilde{E}_2$ ,  $\tilde{G}$  et  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  étant imposé par la relation de symétrie  $\nu_2\tilde{E}_1 = \nu_1\tilde{E}_2$ .

L'équation d'équilibre dans le cas de la flexion pure en absence de forces externes est

$$\mu \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial t^2} + \tilde{D}_1 \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial x^4} + \tilde{D}_2 \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial y^4} + 2\tilde{D}_{12} \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial x^2 \partial y^2} = 0 \quad (6)$$

où  $\tilde{w}$  est le déplacement transverse complexe,  $\mu$  est la masse surfacique et les rigidités de flexion sont données par  $\tilde{D}_1 = \frac{\tilde{E}_1 h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)}$ ,  $\tilde{D}_2 = \frac{\tilde{E}_2 h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)}$ ,  $\tilde{D}_{12} = \nu_2 \tilde{D}_1 + 2\tilde{D}_{66} = \nu_1 \tilde{D}_2 + 2\tilde{D}_{66}$  et  $\tilde{D}_{66} = \frac{\tilde{G} h^3}{12}$ . Il est important de noter ici que l'équation d'équilibre en flexion pure fait intervenir seulement 3 paramètres :  $\tilde{D}_1$ ,  $\tilde{D}_2$  et  $\tilde{D}_{12}$ , alors que 4 paramètres structuraux sont nécessaires pour décrire complètement une plaque orthotrope. On peut donc anticiper que la Méthode des Champs Virtuels ne permet d'accéder qu'à 3 paramètres structuraux sur les 4 paramètres indépendants.

Considérons de nouveau le principe des travaux virtuels en régime harmonique, exprimé sur une fenêtre virtuelle donnée  $S_v$ ,

$$\begin{aligned} & \frac{h^3}{12} \int_{S_v} \mathbf{k}^v T(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{x}, \omega) \tilde{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, \omega) d\mathbf{x} \\ & = \omega^2 h \int_{S_v} \rho w^v(\mathbf{x}) \tilde{w}(\mathbf{x}, \omega) d\mathbf{x} + \\ & \quad \int_{S_v} w^v(\mathbf{x}) \tilde{q}(\mathbf{x}, \omega) d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (7)$$

où  $\mathbf{k}^v$  and  $\tilde{\mathbf{k}}$  désignent les courbures virtuelles et réelles,  $\tilde{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, \omega) = \{\tilde{k}_1 \ \tilde{k}_2 \ \tilde{k}_6\}^T = -\{\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \ 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\}^T \tilde{w}(\mathbf{x}, \omega)$  et  $\mathbf{k}^v(\mathbf{x}, \omega) = \{k_1^v \ k_2^v \ k_6^v\}^T = -\{\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \ 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\}^T w^v(\mathbf{x}, \omega)$ .

En supposant que la matrice élastique  $\tilde{\mathbf{Q}}$  est constante sur chaque fenêtre virtuelle  $S_v$ , et après quelques manipulations, l'équation (7) peut s'écrire

$$\begin{aligned} & \tilde{D}_{11} \int_{S_v} k_1^v \tilde{k}_1 d\mathbf{x} \\ & + (\tilde{D}_{12} - 2\tilde{D}_6) \int_{S_v} (k_1^v \tilde{k}_2 + k_2^v \tilde{k}_1) d\mathbf{x} \\ & + \tilde{D}_{22} \int_{S_v} k_2^v \tilde{k}_2 d\mathbf{x} + \tilde{D}_6 \int_{S_v} k_6^v \tilde{k}_6 d\mathbf{x} \\ & = \omega^2 h \int_{S_v} \rho w^v(\mathbf{x}) \tilde{w}(\mathbf{x}, \omega) d\mathbf{x} + \int_{S_v} w^v(\mathbf{x}) \tilde{q}(\mathbf{x}, \omega) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (8)$$

L'équation (8) fournit la base de la méthode d'extraction des paramètres élastiques : étant donné un chargement externe connu  $\tilde{q}$ , le champ de déplacement  $\tilde{w}$  et les champs de courbures  $\tilde{k}_i$  sont mesurés et les diverses intégrales sur chaque fenêtre virtuelle sont calculées. Le processus est répété pour un nombre de chargements externes au moins égal au nombre de paramètres de rigidité inconnus  $\tilde{D}$  pour construire un système d'équations linéaires dont la solution fournit les paramètres élastiques sur chaque fenêtre virtuelle.

L'équation (8) laisse à penser que les 4 paramètres  $\tilde{D}_1$ ,  $\tilde{D}_2$ ,  $\tilde{D}_{12}$  et  $\tilde{D}_6$  peuvent en théorie être extraits. Ceci est en contradiction avec la forme de l'équation d'équilibre (6), qui ne fait intervenir que 3 des 4 rigidités de flexion. Cependant, un examen attentif de certains termes de l'équation (8) permet de résoudre cette question. Des opérations de double intégration par parties permettent de montrer que l'équation (8) peut se simplifier sous la forme

$$\begin{aligned} & \tilde{D}_{11} \int_{S_v} k_1^v \tilde{k}_1 d\mathbf{x} + \tilde{D}_{12} \int_{S_v} (k_1^v \tilde{k}_2 + k_2^v \tilde{k}_1) d\mathbf{x} \\ & + \tilde{D}_{22} \int_{S_v} k_2^v \tilde{k}_2 d\mathbf{x} \\ & = \omega^2 h \int_{S_v} \rho w^v(\mathbf{x}) \tilde{w}(\mathbf{x}, \omega) d\mathbf{x} + \int_{S_v} w^v(\mathbf{x}) \tilde{q}(\mathbf{x}, \omega) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (9)$$

Cette dernière équation montre que la constante élastique  $\tilde{D}_6$  ne peut pas être extraite à partir de l'approche proposée. Ceci est cohérent avec le fait que cette constante n'apparaît pas explicitement dans l'équation d'équilibre local (6). De plus, l'équation (9) montre que seules les courbures de flexion  $\tilde{k}_1$  and  $\tilde{k}_2$  sont requises ici (et non  $\tilde{k}_6$ ). Enfin, si la cartographie des paramètres élastiques est restreinte à des régions excluant les chargements externes, alors  $\tilde{q} = 0$  et l'équation (9) se réduit à

$$\begin{aligned} & \tilde{D}_{11} \int_{S_v} k_1^v \tilde{k}_1 d\mathbf{x} + \tilde{D}_{12} \int_{S_v} (k_1^v \tilde{k}_2 + k_2^v \tilde{k}_1) d\mathbf{x} \\ & + \tilde{D}_{22} \int_{S_v} k_2^v \tilde{k}_2 d\mathbf{x} \\ & = \omega^2 h \int_{S_v} \rho w^v(\mathbf{x}) \tilde{w}(\mathbf{x}, \omega) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (10)$$

En conséquence, aucune connaissance des excitations externes n'est requise dans ces régions puisque la condition de vibration libre de la plaque s'y applique.

## 5.2 Un résultat expérimental

Des mesures ont été effectuées sur une plaque composite carbone - époxy de dimensions  $51 \text{ cm} \times 49 \text{ cm} \times 2.3 \text{ mm}$  ayant des fibres unidirectionnelles suivant  $x$ . La plaque, en condition de bords libres a été mise en vibration successivement par 4 actionneurs inertiels à des positions différentes : 3 actionneurs à proximité des bords de la plaque, et un actionneur à proximité du centre, alimentés par un signal large bande. La réponse de la partie centrale du panneau a été mesurée par vibrométrie laser Doppler à balayage sur un maillage régulier de  $29 \times 27$  points ; la région mesurée exclut les 3 positions d'excitation périphériques, mais inclut la 4ème position de l'actionneur, plus près du centre. Dans le cas présent, le système linéaire permettant d'extraire les 3 rigidités de flexion  $\tilde{D}_1$ ,  $\tilde{D}_2$ ,  $\tilde{D}_{12}$  est sur-déterminé puisque 4 positions d'excitation sont considérées.

La figure 8 montre les parties réelles des 3 rigidités de flexion  $\tilde{D}_1$ ,  $\tilde{D}_2$ ,  $\tilde{D}_{12}$  reconstruites par la méthode des Champs Virtuels sur la région mesurée de la plaque. Les valeurs de rigidité obtenues sont proches de celles déduites d'un test ASTM, qui fournit  $\tilde{D}_1 = 117 \text{ Pa.m}^3$ ,  $\tilde{D}_2 = 8.8 \text{ Pa.m}^3$ ,  $\tilde{D}_{12} = 10.4 \text{ Pa.m}^3$ . On peut remarquer en haut à droite une singularité dans les cartographies de rigidité, qui correspond à la position de l'actionneur près du centre du panneau. Cette singularité est attendue puisqu'à cette position, l'équilibre en vibrations libres du panneau ne s'applique pas.

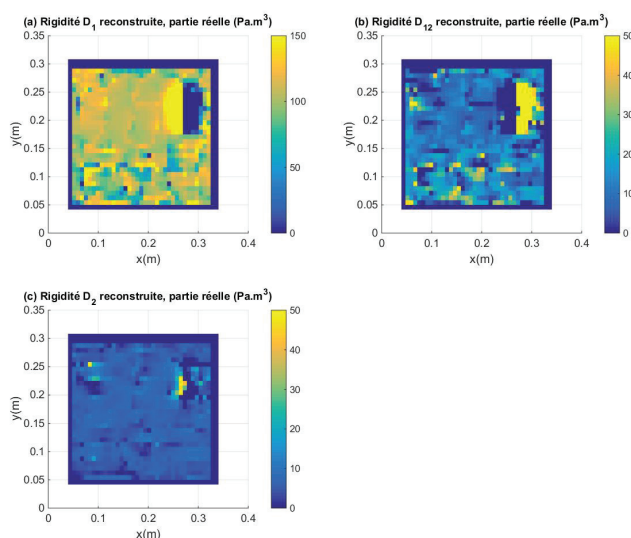


FIGURE 8 – Rigidités de flexion reconstruites pour un panneau orthotrope. (a)  $D_1$  ; (b)  $D_{12}$  ; (c)  $D_2$ .

## 6 Conclusion

Ce papier présente une approche, dite des Champs Virtuels, pour cartographier les forces externes ou les paramètres de rigidité de flexion d'un panneau plan à partir de mesures plein champ de sa réponse vibratoire. Par contraste avec certains travaux antérieurs, notamment la méthode RIFF [1], la méthode des Champs Virtuels est basée sur une formulation variationnelle de l'équilibre ; en conséquence, les quantités d'intérêt requises sont le champ

de déplacement et les champs de courbures de flexion de la structure.

Les mesures plein champ sont envisagées ici via un outil classique - la vibrométrie laser Doppler à balayage - et via une technique qui nous apparait très prometteuse - la déflectométrie optique. Dans le contexte de ce travail, la déflectométrie présente plusieurs avantages : rapidité de la mesure, résolution spatiale élevée et capacité de mesurer des phénomènes instationnaires.

Les résultats présentés confirment la possibilité, à partir de données expérimentales issues de la vibrométrie laser Doppler ou de la déflectométrie optique, de reconstruire précisément les chargements ou les rigidités de flexion de panneaux plans.

## Références

- [1] C. Pézerat, Méthode d'identification des efforts appliqués sur une structure vibrante par résolution et régularisation du problème inverse, thèse de doctorat, INSA-Lyon (1996).
- [2] C. Pézerat et J.L. Guyader, Identification of vibration sources, *Applied Acoustics* **61**, 309-324 (2000).
- [3] S. Chesne, C. Pézerat et J.-L. Guyader, Identification of plate boundary forces from measured displacements, *Journal of Vibration and Acoustics* **130** (2008).
- [4] M. Grédiac, Principe des travaux virtuels et identification [Principle of virtual work and identification], *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* **309**, 7151-7164 (2014).
- [5] F. Pierron et M. Grédiac, *The Virtual Fields Method*, Springer, New York (2012).
- [6] A. Berry, O. Robin et F. Pierron, Identification of dynamic loading on a bending plate using the Virtual Fields Method, *Journal of Sound and Vibration* **333**, 643-659 (2014).
- [7] A. Berry, O. Robin, Identification of spatially-correlated excitations on a bending plate using the Virtual Fields Method, soumis dans *Journal of Sound and Vibration* (2016).
- [8] A. Giraudeau et F. Pierron, Measurement of vibrating plate spatial responses using deflectometry and a high speed camera, *The 9th International Conference on Vibration Measurements by Laser and Noncontact Techniques and Short Course* (2010).
- [9] F. Ablitzer, C. Pézerat, J. Génevaux et J. Bégué, Identification of stiffness and damping properties of plates by using the local equation of motion, *Journal of Sound and Vibration* **33**, 2454-2468 (2014).
- [10] C. Devivier, Identification d'endommagements au sein de plaques composites stratifiées à l'aide de mesures de champs cinématiques, thèse de doctorat, Université de Technologie de Troyes (2012).
- [11] Y. Surrel, Deflectometry : a simple and efficient noninterferometric method for slope measurement, *Xth International Congress on Experimental and Applied Mechanics* (2004).