

# CFA/VISHNO 2016

## Calcul numérique de la réponse élastodynamique forcée des guides d'onde cylindriques ouverts par approche modale

M. Gallezot, F. Treyssède et L. Laguerre  
IFSTTAR, GERS/GeoEND, Route de Bouaye, 44344 Bouguenais, France  
matthieu.gallezot@ifsttar.fr



LE MANS

Les ondes élastiques guidées représentent un intérêt pour le contrôle non destructif des structures. Ces ondes peuvent se propager sur de longues distances dans un guide fermé. Mais pour un guide ouvert, immergé dans un milieu non borné, les ondes sont susceptibles de s'atténuer selon l'axe du guide en raison du rayonnement de l'énergie dans le milieu environnant. Ces ondes atténuées peuvent être représentées par une superposition de modes à fuite (leaky modes). Le calcul des modes dans un guide enfoui implique un problème spectral non borné, difficile à appréhender sur le plan numérique. Cette difficulté numérique est renforcée par le comportement croissant des modes à fuite dans les directions transverses du guide. Une technique consiste à combiner la méthode des éléments finis semi-analytique (SAFE) et la méthode des couches parfaitement adaptées (PML). Cette méthode a été implémentée assez récemment pour le calcul des courbes de dispersion dans divers types de guides solides. Nous nous intéressons ici au calcul numérique de la réponse forcée des guides élastiques ouverts, dont la géométrie est supposée axisymétrique pour simplifier. Grâce à une relation de biorthogonalité particulière, la réponse sous excitation est décomposée sous la forme d'une somme des modes calculés du guide, constitués des modes à fuite et de modes de rayonnement. Les premiers sont intrinsèques à la physique. Les seconds dépendent principalement des paramètres de la PML, fixés par l'utilisateur. Une comparaison entre la réponse d'un guide ouvert et celle d'un guide fermé est effectuée. La contribution de chaque type de mode est discutée.

## 1 Introduction

Le contrôle non destructif (CND) par ondes guidées présente un intérêt pour les structures allongées, parfois accessibles à une seule de leur extrémité : les ondes se propagent sans atténuation sur une grande distance. Lorsque la structure est enfouie dans un milieu non borné transversalement (guide ouvert), les ondes sont atténuées dans la direction de propagation à cause des pertes par rayonnement dans le milieu environnant, sauf cas particulier des modes piégés. Il est d'autant plus nécessaire de disposer de modèles physiques aidant à la détermination des bonnes conditions de CND [1].

Les modèles analytiques sont limités à des guides de géométrie simple [2, 3, 4, 5, 6]. Le formalisme modal utilisé ici consiste à décomposer la réponse d'un guide sous excitation sur la somme de ses modes. Pour un guide ouvert élastique, la base modale est la somme de modes discrets (modes piégés) et de deux continua de rayonnement [7]. Dans le champ proche du guide, les continua peuvent être approximés par une superposition sur les modes à fuite (leaky modes) [8]. Ces modes n'appartiennent pas à la base modale mais constituent une représentation physique intéressante pour le CND car ils contiennent une information essentielle : l'atténuation dans la direction de propagation. En revanche, ils ont une croissance exponentielle dans la direction transverse [9, 4] ce qui complique à la fois leur interprétation et leur utilisation.

Les modèles numériques permettent de modéliser des guides de section arbitraire. La méthode SAFE (Semi-Analytical Finite Element) permet de restreindre la discrétisation à la section du guide. Pour les guides ouverts, elle a été couplée à des éléments finis de frontières (SAFE-2.5D BEM [10]), à des couches absorbantes (SAFE-AL [11]) et à des couches parfaitement adaptées (SAFE-PML [12, 13]). La PML opère un prolongement analytique dans la direction transverse, ce qui permet d'atténuer les modes à fuite. La SAFE-PML a l'avantage de préserver la linéarité du système aux valeurs propres et nécessite des épaisseurs de couches faibles. Le spectre calculé contient les modes piégés, une partie des modes à fuite ainsi que deux continua discrétisés de modes de rayonnement (résonants principalement dans la PML).

La réponse temporelle des guides d'ondes fermés a été largement étudiée, par exemple par Marzani [14] pour des guides élastiques et visco-élastiques. Ce n'est pas le cas pour

les guides ouverts. Récemment, Inoue et Hayashi [15] ont obtenu la réponse temporelle d'un guide élastique plongé dans un fluide.

Ce papier propose de calculer numériquement la réponse temporelle d'un guide ouvert élastique par une méthode SAFE-PML. Pour simplifier, le guide est axisymétrique. La réponse temporelle d'un guide ouvert est comparée à celle d'un guide fermé. La contribution de chaque mode du spectre est discutée.

## 2 Méthode numérique

### 2.1 Problème élastodynamique axisymétrique

Soit un guide ouvert, défini dans le repère cylindrique  $(\tilde{r}, \theta, z)$  (la notation  $\tilde{\cdot}$  est expliquée par la suite), en régime harmonique de dépendance  $e^{-i\omega t}$ . Le guide, schématisé Figure 1, est composé d'un cœur de rayon  $a$  plongé dans un milieu infini modélisé par une PML tronquée. La formulation variationnelle élasto-dynamique en régime harmonique est donnée par

$$\int_{\tilde{V}} \delta \tilde{\epsilon}^T \tilde{\sigma} d\tilde{V} - \omega^2 \int_{\tilde{V}} \tilde{\rho} \delta \tilde{u}^T \tilde{u} d\tilde{V} = \int_{\tilde{V}} \delta \tilde{u}^T \tilde{f} d\tilde{V} + \int_{\partial \tilde{V}} \delta \tilde{u}^T \tilde{t} d\partial \tilde{V}, \quad (1)$$

où  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{\epsilon}$ ,  $\tilde{\sigma}$  sont les déplacements, déformations et contraintes,  $\rho$  est la masse volumique et  $\delta$  représente le champ variationnel. Les expressions vectorielles des contraintes et déformations sont :  $\tilde{\epsilon} = \{\tilde{\epsilon}_{rr}, \tilde{\epsilon}_{\theta\theta}, \tilde{\epsilon}_{zz}, 2\tilde{\epsilon}_{r\theta}, 2\tilde{\epsilon}_{rz}, 2\tilde{\epsilon}_{z\theta}\}^T$  et  $\tilde{\sigma} = \{\tilde{\sigma}_{rr}, \tilde{\sigma}_{\theta\theta}, \tilde{\sigma}_{zz}, \tilde{\sigma}_{r\theta}, \tilde{\sigma}_{rz}, \tilde{\sigma}_{z\theta}\}^T$ . La loi de comportement du matériau est  $\tilde{\sigma} = \tilde{C}\tilde{\epsilon}$ , où  $\tilde{C}$  est le tenseur des propriétés du matériau. Le matériau peut être élastique ( $\tilde{C}$  à valeurs réelles) ou visco-élastique ( $\tilde{C}$  à valeurs complexes).  $\tilde{f}$  représente les sources volumiques dans le volume  $\tilde{V}$  et  $\tilde{t} = \tilde{\sigma} \cdot \tilde{n}_j$  les contraintes appliquées sur le pourtour et les sections du guide.

L'hypothèse d'axisymétrie permet le découplage des composantes radiale et axiale d'une part, angulaire d'autre part, ainsi qu'une invariance angulaire tels que  $\tilde{u} = \{\tilde{u}_r(\tilde{r}, z, \omega), \tilde{u}_z(\tilde{r}, z, \omega)\}^T$  et  $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ .

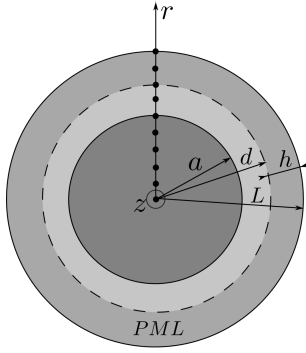


FIGURE 1 – Guide ouvert axisymétrique tronqué par une PML.

## 2.2 Formulation SAFE-PML

Une couche PML d'épaisseur  $h$  est définie à une distance  $d$  du centre du guide. La coordonnée radiale réelle  $r$  est prolongée analytiquement dans le plan complexe telle que

$$\tilde{r}(r) = \int_0^r \gamma(\xi) d\xi. \quad (2)$$

$\gamma(r)$  est une fonction d'atténuation définie par un profil parabolique dans la PML :

$$\gamma(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \leq d \\ 1 + 3(\hat{\gamma} - 1)\left(\frac{r-d}{h}\right)^2 & \text{si } r > d \end{cases} \quad (3)$$

où  $\hat{\gamma}$  est l'atténuation moyenne dans la PML. Une condition de Dirichlet est appliquée à l'extrémité de la PML. L'Eq. (1) s'écrit dans l'espace réel par changement de variable pour toute fonction  $\tilde{g}(\tilde{r})$  :

$$\tilde{g}(\tilde{r}) = g(r), \quad d\tilde{r} = \gamma(r)dr, \quad \frac{d\tilde{g}}{d\tilde{r}} = \frac{dg}{dr} \frac{1}{\gamma(r)}. \quad (4)$$

La méthode SAFE considère une formulation variationnelle surfacique, contrairement à l'Eq. (1) intégrée sur le volume. La surface d'intégration est  $dS = 2\pi\tilde{r}(r)\gamma(r)dr$ . Le champ de déplacement est discrétisé sur des éléments linéiques, tels que sur un élément  $\mathbf{u}(r, z, \omega) = \mathbf{N}^e(r)\mathbf{U}^e(z, \omega)$  où  $\mathbf{N}^e$  est la matrice des fonctions d'interpolations. La relation déformation-déplacement est mise sous la forme  $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B}_r\mathbf{U}^e + \mathbf{B}_z\mathbf{U}_{,z}^e$  avec

$$\mathbf{B}_r = \left[ \frac{1}{\tilde{r}(r)} \mathbf{L}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{L}_0 \frac{1}{\tilde{r}} \right] \mathbf{N}^e, \quad \mathbf{B}_z = \mathbf{L}_z \mathbf{N}^e, \quad (5)$$

où :

$$\mathbf{L}_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Il vient

$$\mathbf{K}_1 \mathbf{U} + (\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_2^T) \mathbf{U}_{,z} - \mathbf{K}_3 \mathbf{U}_{,zz} - \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (7)$$

avec sur un élément de surface  $S_e$ , les matrices élémentaires :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1^e &= \int_{S_e} \mathbf{B}_r^T \mathbf{C} \mathbf{B}_r dS_e, & \mathbf{K}_2^e &= \int_{S_e} \mathbf{B}_r^T \mathbf{C} \mathbf{B}_z dS_e, \\ \mathbf{K}_3^e &= \int_{S_e} \mathbf{B}_z^T \mathbf{C} \mathbf{B}_z dS_e, & \mathbf{M}^e &= \int_{S_e} \rho \mathbf{N}^{eT} \mathbf{N}^e dS_e. \end{aligned} \quad (8)$$

$\mathbf{F}$  regroupe les forces volumiques et surfaciques discrétisées. La transformée spatiale  $\underline{\mathbf{U}}(k, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{U}(z, \omega) e^{-ikz} dz$  est appliquée à l'Eq. (7), ce qui mène au système aux valeurs propres quadratiques suivant :

$$(\mathbf{K}_1 + ik(\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_2^T) + k^2 \mathbf{K}_3 - \omega^2 \mathbf{M}) \underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{F}}. \quad (9)$$

Ce système est classiquement linéarisé [16] sous la forme

$$(\mathbf{A} - k\mathbf{B}) \hat{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{F}}, \quad (10)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -(\mathbf{K}_1 - \omega^2 \mathbf{M}) & -i(\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_2^T) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_3 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{U}} \\ k\underline{\mathbf{U}} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \underline{\mathbf{F}} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

Les matrices  $\mathbf{K}_1^e$ ,  $\mathbf{K}_3^e$  et  $\mathbf{M}^e$  sont symétriques. Pour une pulsation  $\omega$  donnée et sans excitation,  $(\mathbf{A} - k\mathbf{B}) \hat{\mathbf{U}} = \mathbf{0}$  est un problème aux valeurs propres généralisé. Il admet  $2M$  modes par paires,  $(k_m, \underline{\mathbf{U}}_m)$  et  $(-k_m, \underline{\mathbf{U}}_{-m})$ , soit  $M$  modes se propageant dans le sens positif et  $M$  modes se propageant dans le sens négatif [17].

## 2.3 Réponse forcée

La réponse forcée  $\hat{\mathbf{U}}(k, \omega)$  à l'excitation  $\hat{\mathbf{F}}$  est définie par superposition modale sur les  $2M$  modes. La réponse harmonique en tout point du guide  $\mathbf{U}(z, \omega)$  est obtenue par une transformée de Fourier spatiale inverse. A partir de l'application du théorème des résidus de Cauchy sur les modes positifs et à l'aide des relations de biorthogonalité définies en [17], il vient

$$\mathbf{U}(z, \omega) = \sum_{m=1}^M \mathbf{E}_m \mathbf{F}(k_m) e^{ik_m z}. \quad (12)$$

L'excitabilité modale  $\mathbf{E}_m$  est définie par :

$$\mathbf{E}_m = \frac{i\omega}{4Q_{m,-m}} \mathbf{U}_m \mathbf{U}_{-m}^T, \quad (13)$$

où le facteur de normalisation  $Q_{m,-m}$  vaut

$$Q_{m,-m} = \frac{i\omega}{4} (\mathbf{U}_m^T \mathbf{F}_{-m} - \mathbf{U}_{-m}^T \mathbf{F}_m), \quad (14)$$

L'Eq. (14) fait intervenir des forces nodales modales définies par  $\int_S \delta \mathbf{u}_m^T dS = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{F}_m$  [17]. Elles sont exprimées à partir des matrices élémentaires :

$$\mathbf{F}_m = (\mathbf{K}_2^T + ik_m \mathbf{K}_3) \mathbf{U}_m \quad (15)$$

La réponse temporelle en tout point  $\mathbf{U}(z, t)$  est obtenue par l'application de la transformée de Fourier temporelle inverse :  $\mathbf{U}(z, t) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{U}(z, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$ .

## 3 Résultats numériques

### 3.1 Courbes de dispersion

#### 3.1.1 Caractéristiques modales

L'énergie cinétique  $E_k$ , l'atténuation  $\eta$  (dB/m) et la vitesse d'énergie  $v_e$  d'un mode dans un guide ouvert [13]

sont :

$$E_k = \frac{\omega^2}{4} \underline{U}^* \underline{M} \underline{U}, \quad (16)$$

$$\eta = 8,686 \text{Im}(k), \quad (17)$$

$$v_e = \frac{\text{Re} \left\{ -\frac{1}{8} i \omega \underline{U}^* (\underline{K}_2^T + ik \underline{K}_3) \underline{U} \right\}}{\text{Re} \left\{ \omega^2 \underline{U}^* \underline{M} \underline{U} \right\} + \text{Re} \left\{ \underline{U}^* (\underline{K}_1 + ik \underline{K}_2 - ik^* \underline{K}_2^T + k^* k \underline{K}_3) \underline{U} \right\}}, \quad (18)$$

où \* désigne le vecteur transposé conjugué. La vitesse d'énergie est calculée en ne prenant en compte que les degrés de liberté du cœur du guide.

### 3.1.2 Filtrage modal

La direction de propagation des modes piégés et des modes à fuite est déterminée à partir du signe de leur vitesse d'énergie.

Les modes rayonnants sont des modes non physiques car ils résonnent principalement dans la PML. Il est nécessaire de filtrer ces modes afin d'alléger la visualisation des courbes de dispersion. A partir de l'Eq. (16), il est démontré que l'énergie cinétique a une partie imaginaire non nulle dans la PML. Le critère énergétique  $\zeta > \zeta_{min}$  est proposé, avec

$$\zeta = 1 - \frac{\text{Im}(E_k)}{|E_k|}, \quad (19)$$

et  $\zeta_{min}$  est un critère à fixer par l'utilisateur.

### 3.1.3 Validation

TABLEAU 1 – Caractéristiques des matériaux

|        | $\rho$<br>(kg/m <sup>3</sup> ) | $c_L$<br>(m/s) | $c_S$<br>(m/s) | $\xi_L$<br>(Np/λ) | $\xi_S$<br>(Np/λ) |
|--------|--------------------------------|----------------|----------------|-------------------|-------------------|
| Acier  | 7932                           | 5960           | 3260           | 0,003             | 0,008             |
| Enrobé | 1600                           | 2810           | 1700           | 0,043             | 0,1               |
| Tube   | 7800                           | 5900           | 3190           | 0,003             | 0,008             |

Dans le cadre du génie civil, la vitesse de cisaillement dans le cœur est généralement plus élevée que celle du milieu enrobant. Alors, tous les modes sont des modes à fuite à l'exception des ondes d'interface de Stoneley lorsqu'elles existent [18]. Pavlakovic et al. [3] ont étudié le cas de tiges cylindriques en acier plongées dans un milieu enrobant. Pour chaque mode longitudinal, il existe une fréquence pour laquelle l'atténuation est minimale et la vitesse d'énergie maximale. A cette fréquence, l'énergie est concentrée au cœur de la tige et les pertes par fuite sont réduites. Le calcul des amplitudes et fréquences de ces minima est essentiel pour le CND.

Les résultats de la méthode SAFE-PML axisymétrique sont comparés à ceux obtenus dans [3]. Les matériaux sont précisés dans le Tableau 1. Les paramètres de la PML sont  $h = 2a$ ,  $d = 1.1a$ ,  $\hat{\gamma} = 1 + 2i$ . Les courbes de dispersion Figure 2 sont obtenues après un filtrage  $\zeta_{min} = 0.6$ . Pour plus de lisibilité, seuls les maxima et minima de [3] sont affichés. Les courbes montrent que la méthode SAFE-PML

axisymétrique calcule précisément les caractéristiques de dispersion des modes longitudinaux, numérotés de 1 à 12. C'est le cas en particulier pour le mode 12, qui présente une série de lobes et qui est le moins atténué de tous les modes. L'atténuation minimale est alors d'environ 163 dB.mm/m, soit 20,4 dB/m pour un guide de rayon  $a = 8$  mm. Pour des fréquences plus élevées, les effets visco-élastiques deviennent importants et l'amplitude des minima augmente.

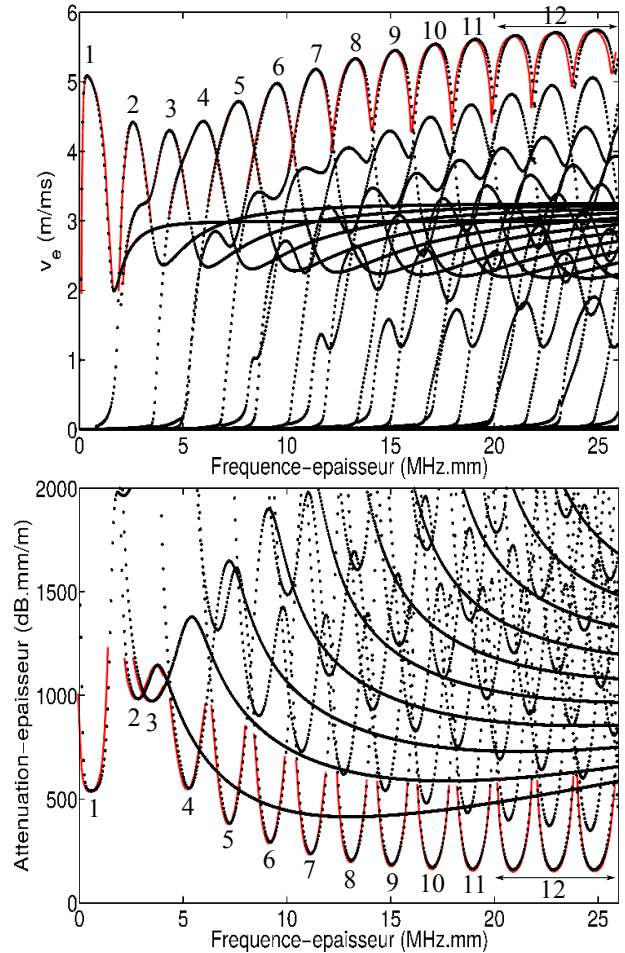


FIGURE 2 – Vitesse d'énergie (haut) et atténuation (bas) des modes longitudinaux d'une tige cylindrique en acier plongée dans un enrobé. Courbes rouges : résultats ref. [3]. Points noirs : résultats SAFE-PML.

## 3.2 Réponse temporelle

La méthode de calcul de la réponse temporelle restant la même que le guide soit fermé ou ouvert, une validation en guide fermé est tout d'abord effectuée par comparaison avec des résultats de la littérature.

### 3.2.1 Validation pour un guide fermé visco-élastique

Marzani [14] a calculé la réponse temporelle d'un tube en acier visco-élastique pour des modes longitudinaux et des modes de torsion à l'aide de la méthode SAFE. Le tube a un rayon intérieur de 51,1810 mm et un rayon extérieur de 57,1500 mm. Les modes longitudinaux sont excités par une force axisymétrique  $F(z, t)$ , appliquée sur le pourtour du guide au point  $z_0$  dans la direction  $z$  telle que

$$F(z, t) = F_0 \delta(z - z_0) f(t). \quad (20)$$

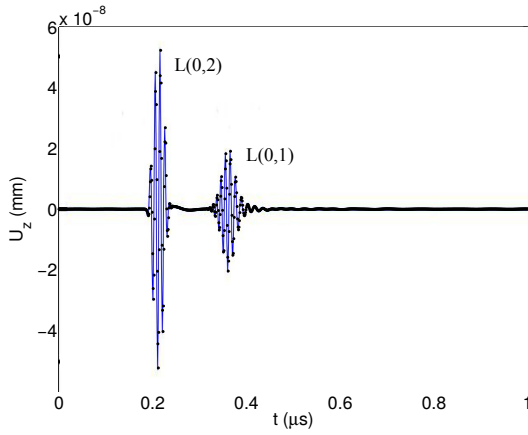


FIGURE 3 – Réponse temporelle axiale  $U_z$  à l'excitation  $F(z, t)$  à une distance  $z - z_0 = 1$  m et en  $r = 51,1810$  mm. Courbe bleue : résultats de Marzani [14]; Points noirs : résultats SAFE-PML axisymétrique.

Le signal d'excitation  $f(t)$  est un sinus de fréquence centrale 100 kHz modulé sur 5 périodes par une fenêtre de Hanning. La fréquence d'échantillonnage est de 1000 kHz.

Pour  $F_0 = -e_z$ , les résultats obtenus sont en accord avec [14]. Ils sont présentés Figure 3 pour la composante axiale du déplacement à 1 m de la source. A la fréquence d'excitation considérée, seuls les modes L(0,1) et L(0,2) sont excités. Le mode L(0,2) est le plus rapide et le moins dispersif. Les résultats ont également été comparés à des distances de 3 m et 5 m à la fois pour les composantes radiales et axiales du déplacement ; ils sont d'une précision similaire.

### 3.2.2 Réponse temporelle d'un guide visco-élastique ouvert

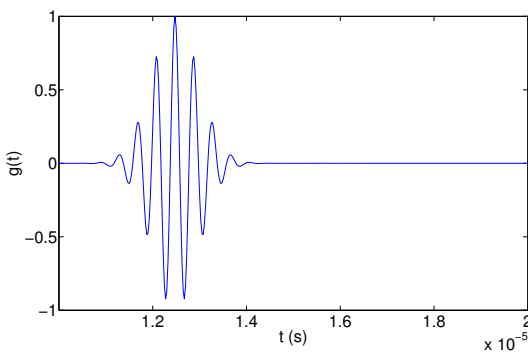


FIGURE 4 – Signal d'excitation temporel  $g(t)$

Un guide ouvert de rayon  $a = 8$  mm similaire à celui étudié en 3.1.3 est soumis à une excitation axiale axisymétrique  $F(r, z, t)$  telle que

$$F(r, z, t) = f(r)g(t)\delta(z - z_0)e_z. \quad (21)$$

La force est répartie radialement dans le guide suivant une gaussienne telle que :

$$f(r) = \begin{cases} e^{-\frac{\pi r^2}{a^2}} & \text{si } r \leq a \\ 0 & \text{si } r > a \end{cases} \quad (22)$$

avec  $\alpha = 2$  mm. Le signal temporel d'excitation  $g(t)$  représenté Figure 4 est un sinus de fréquence centrale

2,5 MHz modulé par une gaussienne sur 8 périodes. Cette fréquence équivaut à une fréquence-épaisseur de 20 MHz.mm, ce qui permet d'exciter préférentiellement le mode 12. La fréquence maximale d'excitation est d'environ 3,6 MHz. La fréquence d'échantillonnage est de 40 MHz.

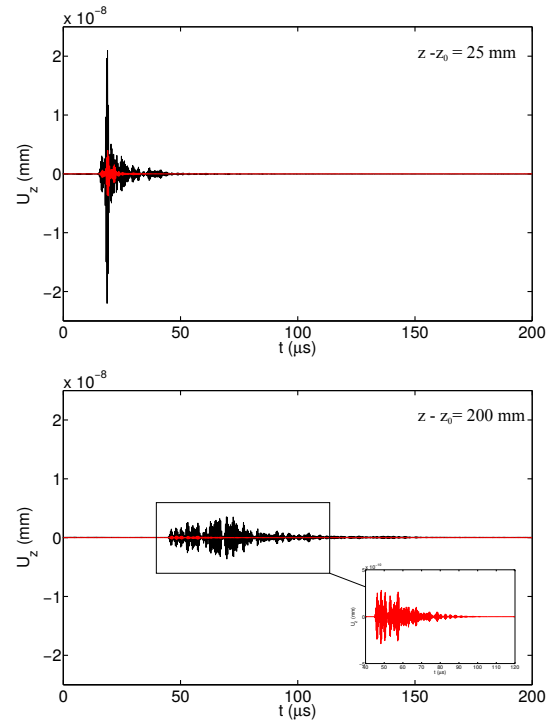


FIGURE 5 – Réponse temporelle axiale  $U_z$  à l'excitation  $F(r, z, t)$  à une distance  $z - z_0 = 25$  mm (en haut) et  $z - z_0 = 200$  mm (en bas), en  $r = 0$ . Courbe noire : guide en acier fermé de rayon  $a$  ; courbe rouge : guide en acier de rayon  $a$  plongé dans de l'enrobé.

La réponse temporelle est calculée par la méthode SAFE-PML. Les paramètres de la PML sont  $h = 2a$ ,  $d = 1.1a$ ,  $\hat{\gamma} = 1 + 2i$ . La réponse est également calculée pour un guide fermé en acier de même rayon. La figure 5 propose une comparaison des signaux temporels  $U_z(z, t)$  obtenus dans les deux configurations.

Les deux signaux ont les mêmes temps d'arrivée. En effet, dans la gamme de fréquence d'excitation, les valeurs de vitesse d'énergie dans les deux guides sont identiques. Au cours de la propagation, le signal en guide fermé est atténué à la fois par les effets visco-élastiques et par la dispersion. Le signal en guide ouvert est en plus atténué par rayonnement. A titre d'exemple, l'atténuation minimale à la fréquence centrale d'excitation est d'environ 60 dB/m pour le guide ouvert contre 10,5 dB/m pour le guide fermé. Les mêmes tendances se retrouvent pour le déplacement radial, dont l'amplitude est initialement plus faible.

La queue du signal est nettement plus atténuée en guide ouvert qu'en guide fermé. Ce phénomène avait déjà été observé en [5]. En effet, en guide ouvert, les modes les plus lents sont les plus atténués et ce beaucoup plus fortement qu'en guide fermé.

D'un point de vue numérique, les réponses temporelles précédentes ont été obtenues par une superposition sur 50 valeurs propres positives (sur un total de 100 calculées au total, positives et négatives). Cette base modale numérique est composée de modes à fuite et de modes de rayonnements.

Ces derniers résonnent principalement dans la PML et sont donc non intrinsèques à la physique du problème. La plupart sont fortement atténués dans la direction de propagation. Néanmoins, en fonction de la gamme de fréquence et du contraste entre le guide et son milieu environnant, certains d'entre eux ont des atténuations de l'ordre de celles des modes à fuite. Leur influence sur la précision de la décomposition modale reste à étudier.

## 4 Conclusion

Un modèle SAFE-PML axisymétrique a été développé. Il permet un calcul rapide des modes de propagation longitudinaux et des caractéristiques modales associées dans un guide ouvert axisymétrique. À l'aide de relations de biorthogonalité particulières, des réponses temporelles ont été calculées à la fois pour un guide fermé et un guide ouvert visco-élastique. La méthode de calcul a pu être validée dans le cas d'un guide fermé. Des travaux sont en cours pour une validation en guide ouvert et pour clarifier l'influence des modes de rayonnement sur les réponses obtenues.

## Remerciements

Cette étude a été financée avec le soutien de la région Pays de la Loire.

## Références

- [1] P. Wilcox, M. J. S. Lowe, P. Cawley, Mode and transducer selection for long range lamb wave inspection, *Journal of Intelligent Material System and Structures* **12**, 553–565 (2001).
- [2] B. Pavlakovic, M. Lowe, D. Alleyne, P. Cawley, Disperse : A general purpose program for creating dispersion curves, dans D. Thompson, D. Chimenti, rédacteurs, *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation*, t. 16 de *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation*, 185–192, Springer US (1997).
- [3] B. Pavlakovic, M. Lowe, P. Cawley, High-frequency low-loss ultrasonic modes in imbedded bars, *Journal of Applied Mechanics - Transactions of the ASME* **68**, 67–75 (2001).
- [4] T. Vogt, M. Lowe, P. Cawley, The scattering of guided waves in partly embedded cylindrical structures, *Journal of the Acoustical Society of America* **113**, 1258–1272 (2003).
- [5] L. Laguerre, A. Grimault, M. Deschamps, Ultrasonic transient bounded-beam propagation in a solid cylinder waveguide embedded in a solid medium, *Journal of the Acoustical Society of America* **121**, 1924–1934 (2007).
- [6] S. Yaacoubi, Éric Ducasse, M. Deschamps, L. Laguerre, Ultrasonic field generated by a transducer non axially located at the end of a cylindrical waveguide surrounded by an elastic medium, *Physics Procedia* **3**, 515 – 521 (2010), international Congress on Ultrasonics, Santiago de Chile, January 2009.
- [7] V. Maupin, The radiation modes of a vertically varying half-space : a new representation of the complete green's function in terms of modes, *Geophysical Journal International* **126**, 762–780 (1996).
- [8] F. Monticone, A. Alu, Leaky-wave theory, techniques, and applications : From microwaves to visible frequencies, *Proceedings of the IEEE* **103**, 793–821 (2015).
- [9] A. Hladky-Hennion, P. Langlet, M. de Billy, Conical radiating waves from immersed wedges, *Journal of the Acoustical Society of America* **108**, 3079–3083 (2000).
- [10] M. Mazzotti, I. Bartoli, A. Marzani, E. Viola, A coupled safe-2.5d bem approach for the dispersion analysis of damped leaky guided waves in embedded waveguides of arbitrary cross-section, *Ultrasonics* **53**, 1227–1241 (2013).
- [11] M. Castaings, M. Lowe, Finite element model for waves guided along solid systems of arbitrary section coupled to infinite solid media, *Journal of the Acoustical Society of America* **123**, 696–708 (2008).
- [12] F. Treysède, K. Nguyen, A.-S. Bonnet-BenDhia, C. Hazard, Finite element computation of trapped and leaky elastic waves in open stratified waveguides, *Wave Motion* **51**, 1093 – 1107 (2014).
- [13] K. L. Nguyen, F. Treysède, C. Hazard, Numerical modeling of three-dimensional open elastic waveguides combining semi-analytical finite element and perfectly matched layer methods, *Journal of Sound and Vibration* **344**, 158–178 (2015).
- [14] A. Marzani, Time-transient analysis response for ultrasonic guided waves propagating in damped cylinders, *International Journal of Solid and Structures* (2008).
- [15] D. Inoue, T. Hayashi, Transient analysis of leaky lamb waves with a semi-analytical finite element method, *Ultrasonics* **62**, 80–88 (2015).
- [16] F. Tisseur, K. Meerbergen, The quadratic eigenvalue problem, *SIAM Rev.* **43**, 235–286 (2001).
- [17] F. Treysède, L. Laguerre, Numerical and analytical calculation of modal excitability for elastic wave generation in lossy waveguides, *J. Acoust. Soc. Am.* **133**, 3287–3837 (2013).
- [18] R. N. Thurston, Elastic waves in rods and clad rods, *Acoustical Society of America Journal* **64**, 1–37 (1978).