

CFA/VISHNO 2016

Homogénéisation numérique en élastodynamique des matériaux hétérogènes périodiques

T.-T. Dang, H. Le Quang, H. Nassar et Q.-C. He
Université Paris-Est Marne-la-Vallée, 5 Bd. Descartes, 77454 Marne-La-Vallée Cedex 2,
France
quang-hung.le@u-pem.fr



LE MANS

La théorie d'homogénéisation élastodynamique des matériaux hétérogènes initiée par Willis il y a environ une trentaine d'années a récemment reçu une très grande attention. D'après cette théorie qui est mathématiquement exacte, la loi constitutive homogénéisée est non locale en espace et en temps ; le tenseur des contraintes dépend non seulement du tenseur des déformations mais aussi de la vitesse ; la quantité du mouvement dépend à la fois de la vitesse et du tenseur des déformations, faisant apparaître en général une masse anisotrope. Ces propriétés constitutives effectives, qui pourraient être surprenantes d'un point de vue mécanique classique, se révèlent en fait très utiles pour la conception de métamatériaux acoustiques et de capes acoustiques. Ce travail consiste essentiellement à proposer et développer une approche numérique efficace basée sur la méthode des éléments finis pour déterminer les propriétés élastodynamiques effectives des matériaux périodiquement hétérogène. Cette approche sont d'abord élaborée pour une microstructure périodique 3D quelconque et ensuite implantées pour une microstructure périodique 2D quelconque. A l'aide de la méthode numérique élaborée, la théorie de Willis est appliquée au calcul élastodynamique sur un milieu infini hétérogène et celui homogénéisé.

1 Introduction

En 1997, Willis a proposé dans [1] une forme formelle de la loi constitutive effective pour l'homogénéisation élastodynamique linéaire des matériaux hétérogènes. Par rapport à la théorie dynamique classique, la théorie Willis a fait sensation quand il a confirmé que, à l'échelle macroscopique, le tenseur des contraintes dépend non seulement du tenseur des déformations, mais aussi de la vitesse. En outre, sa théorie affirme également, que la quantité de mouvement dépend à la fois de la vitesse et le tenseur des déformations. La prémisse de cette théorie remonte à la première moitié des années quatre-vingt. Contrairement aux auteurs précédents, Willis [2] a utilisé non seulement un champ de polarisation classique mais aussi un nouveau champ de polarisation dynamique, en considérant la relation, à l'échelle microscopique, entre le champ de polarisation dynamique et la vitesse ainsi que le comportement élastique entre la contrainte et la déformation. La solution de l'équation de mouvement peut être exprimée en termes des champs de polarisations et de la fonction de Green. Cette nouvelle approche a permis de traiter un problème de diffusion des ondes élastiques dans le cas d'un milieu hétérogène comprenant une seule inclusion [2] puis pour le cas de plusieurs inclusions [3].

Outre ces études analytiques effectuée dans les cas simples, par exemple, avec des matériaux composites stratifiés [4, 5, 6], quelques schémas numériques ont été également proposés pour calculer les propriétés effectives élastodynamiques. Dans les travaux de Nemat-Nasser et Srivastava [7, 8, 9], en introduisant un milieu de référence et en considérant que le champ de polarisation est uniforme par morceaux, les estimations des propriétés élastodynamiques effectives des composites peuvent être déterminées. En 2012, par troncation des produits de convolution entre les champs microscopiques et l'opérateur de Green dans l'espace de Fourier de l'équation du mouvement, Norris [10] a obtenu un ensemble fini d'équations algébriques au lieu d'un ensemble infini d'équations différentielles. Les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice associée obtenues permettent ensuite de déterminer les courbes de dispersion. Ces deux contributions pionnières pour l'homogénéisation numérique en élastodynamique, mais, néanmoins, la première méthode ne peut pas être bien adaptée à des géométries complexes de cellule de base tandis que l'efficacité de la seconde méthode dépend fortement du contraste entre les phases des composites. Pour surmonter ces difficultés, dans cet article, nous proposons une méthode systématiquement basée sur la méthode des éléments

finis (MEF) pour calculer les propriétés élastodynamiques effectives des milieux périodiquement hétérogènes. Ayant aucune restriction concernant le maillage, la méthode proposée est bien adaptée à la fois avec des géométries complexes et contrastes forts. L'idée principale de cette approche consiste à exprimer la solution des équations du mouvement en termes de deux tenseurs de localisation qui sont associés aux chargements. Ces tenseurs de localisation sont numériquement déterminés en prescrivant des charges indépendantes sur une cellule de base avec prise en compte des conditions aux limites. Ici, nous proposons utiliser un champ de déformation libre, comme celui a été introduit par Fietz et Shvets dans [11] en électromagnétisme et aussi utilisé par Willis [12] et Nassar et al. [6]. Tout d'abord, ce champ de déformation libre devient une charge complémentaire qui permet aux équations soient bien posées et, deuxièmement, elle permet que la loi constitutive effective de Willis devient unique.

Ce papier est composé de trois parties. Tout d'abord, nous rappelons les équations constitutives à l'échelle microscopique puis nous donnons la définition des champs macroscopiques dans le contexte de l'onde de Bloch. Une discussion sur l'unicité la loi constitutive effective de Willis est aussi présentée dans cet partie. Ensuite, la deuxième partie est consacrée à la présentation de notre schéma numérique, qui est basé sur la MEF et sur la relation de dispersion qui est obtenue grâce à une analyse spectrale. Finalement, nous présentons une validation en appliquant la méthode proposée au cas avec un composite uni-directionnel qui a été traité par Nemat-Nasser et Srivastava dans [8].

2 Equations constitutives

2.1 Lois constitutives locales

Nous considérons un milieu élastique périodiquement hétérogène Ω en dimension d ($d = 1, 2$ ou 3). Les champs de déplacement, vitesse, déformation, quantité de mouvement et contrainte sont notés respectivement par $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$ et $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$. Ces champs cinématiques de déplacement, vitesse et déformation doivent vérifier les relations suivantes :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \otimes^s \mathbf{u}, \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} \quad (1)$$

où le symbole $\nabla \cdot$ désigne l'opérateur de divergence, le point superposé indique la dérivée par rapport au temps et l'exposant (s) signifie la symétrisation. Le tenseur de contrainte $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ et la quantité de mouvement $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$ sont

liés aux champs de déformation et de vitesse par les lois constitutives locales suivantes :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{p} = \rho \mathbf{v} \quad (2)$$

où \mathbb{C} est le tenseur de rigidité local d'ordre quatre et ρ est la masse volumique locale du milieu hétérogène.

Puisque le milieu en question est périodiquement hétérogène, il existe donc d vecteurs indépendants \mathbf{b}_i avec $i = 1, 2, \dots, d$ pour que

$$\mathbb{C}(\mathbf{x} + \mathbf{b}_i) = \mathbb{C}(\mathbf{x}), \quad \rho(\mathbf{x} + \mathbf{b}_i) = \rho(\mathbf{x}) \quad (3)$$

pour tout vecteur de position $\mathbf{x} \in \Omega$. Par conséquence, le milieu périodiquement hétérogène en question peut être caractérisé par son tenseur de rigidité \mathbb{C} et sa masse volumique ρ qui sont définis sur une cellule de base parallélépipède \mathcal{T} dont $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{x}_0 + \mathbf{b}_d\}$ sont les sommets et \mathbf{x}_0 est un vecteur arbitraire.

Avec une force volumique $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ appliquée à Ω , l'équation de mouvement est de la forme :

$$\text{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \dot{\mathbf{p}}. \quad (4)$$

Dans le but de remplacer le milieu hétérogène en question par un milieu homogène équivalent, Willis [1] a proposé les lois de comportement et l'équation de mouvement de ce milieu homogène équivalent avec prise en compte un grand nombre des caractéristiques de la microstructure du milieu hétérogène original. Ces lois de comportement obtenues sont alors considérées comme les lois de comportement effectives du milieu hétérogène initial. L'approche est basée sur la construction de certains champs macroscopiques qui sont des champs microscopiques correspondants moyennés. Les lois de comportement effectives obtenues sont généralement non locales dans l'espace et dans le temps. Par conséquent, les propriétés effectives dépendront du nombre d'onde \mathbf{k} et la fréquence ω de la charge appliquée. Notre but est de calculer, pour chaque couple (\mathbf{k}, ω) , les valeurs des propriétés effectives en utilisant la méthode des éléments finis.

2.2 Lois constitutives effectives

2.2.1 Onde de Bloch

Considérons maintenant le cas où le milieu hétérogène en question est soumis à une force volumique $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ qui est sous la forme d'une onde de Bloch, c'est-à-dire que $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{f}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)}$ avec $\tilde{\mathbf{f}}$ étant un vecteur d'amplitude constant.

L'hypothèse sur la périodicité de Ω garantit que les champs de solution $\boldsymbol{\phi} \in \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\sigma}\}$ ont la même forme que la force volumique appliquée, c'est-à-dire que $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\boldsymbol{\phi}}(\mathbf{x}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)}$ avec $\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\mathbf{x})$ étant un champ périodique.

En introduisant $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\boldsymbol{\phi}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)}$ dans (1) et (4), on obtient

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \tilde{\mathbf{u}}, \quad \tilde{\mathbf{v}} = -i\omega \tilde{\mathbf{u}}, \quad (5)$$

et

$$(\nabla + i\mathbf{k}) \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \tilde{\mathbf{f}} = -i\omega \tilde{\mathbf{p}} \quad (6)$$

avec

$$\tilde{\mathbf{p}} = \rho \tilde{\mathbf{v}}. \quad (7)$$

L'équation de mouvement simplifiée ci-dessus doit être résolue sur tout domaine Ω . Cependant, grâce à la périodicité des domaines concernés, il suffit de chercher des solutions

sur une cellule de base \mathcal{T} avec des conditions aux limites périodiques suivantes :

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}), \quad (8)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = -\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}), \quad (9)$$

pour tout couple \mathbf{x} et \mathbf{y} situés sur les deux faces opposées de la frontière $\partial\mathcal{T}$ de \mathcal{T} et \mathbf{n} est la normale unitaire extérieure à $\partial\mathcal{T}$.

2.2.2 Champs macroscopiques

Les champs macroscopiques sont définis par la moyenne spatiale des amplitudes périodiques de l'onde de Bloch sur \mathcal{T} , à savoir

$$\Phi(\mathbf{x}, t) \equiv \tilde{\Phi} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)} \equiv \frac{1}{|\mathcal{T}|} \int_{\mathcal{T}} \tilde{\phi} d\mathbf{y} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)} \equiv \langle \tilde{\phi} \rangle e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)}, \quad (10)$$

où $|\mathcal{T}|$ désigne le volume de \mathcal{T} , le symbol $\langle \bullet \rangle$ correspond à la valeur moyenne spatiale de $\bullet \in \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\sigma}\}$ sur \mathcal{T} . Les définitions ci-dessus des champs macroscopiques sont identiques avec ceux présentés dans [13] dans le contexte d'homogénéisation électromagnétique. Elles correspondent également à la moyenne d'ensemble utilisée par Willis [1] pour un milieu aléatoire.

En utilisant le théorème de la divergence et en tenant compte de la périodicité, la moyenne spatiale des équations (5) et (6) nous amène aux équations de compatibilité et de mouvement suivantes à l'échelle macroscopique :

$$\tilde{\mathbf{E}} = i\mathbf{k} \otimes^s \tilde{\mathbf{U}}, \quad \tilde{\mathbf{V}} = -i\omega \tilde{\mathbf{U}}, \quad (11)$$

et

$$i\mathbf{k} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} + \tilde{\mathbf{f}} = -i\omega \tilde{\mathbf{P}}. \quad (12)$$

Nous remarquons que la force volumique macroscopique est égale à celle microscopique.

2.2.3 Loi de comportement effective

D'après Willis [1], la loi de comportement effective ou macroscopique peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} \\ \tilde{\mathbf{P}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}^e & \mathcal{S}^1 \\ \mathcal{S}^2 & \rho^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{E}} \\ \tilde{\mathbf{V}} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Ci-dessus, \mathbb{C}^e est le tenseur élastique effectif d'ordre quatre, ρ^e est le tenseur effectif de densité de masse d'ordre deux, \mathcal{S}^1 et \mathcal{S}^2 sont deux tenseurs effectifs de couplage d'ordre trois. Ces tenseurs dépendent généralement de \mathbf{k} et ω .

Cependant, puisque les champs $\tilde{\mathbf{V}}$ et $\tilde{\mathbf{E}}$ sont dépendants, à savoir

$$i\mathbf{k} \otimes^s \tilde{\mathbf{V}} = -i\omega \tilde{\mathbf{E}}, \quad (14)$$

la loi de comportement effective (13) n'est donc pas unique. Cette remarque a été mentionnée par Fietz ans Shvets [11], Nemat-Nasser and Srivastava [8] et Willis [12]. De plus, la non-unicité de la loi de comportement effective se présente aussi dans le fait que, avec seulement d valeurs indépendantes de la forces volumiques $\tilde{\mathbf{f}}$, il est donc insuffisant pour déterminer les $d(d+3)/2 \times d(d+3)/2$ composantes indépendantes de \mathbb{C}^e , \mathcal{S}^1 , \mathcal{S}^2 et ρ^e . Dans le but d'avoir une loi de comportement unique, une charge supplémentaire doit être prescrite de manière que la déformation et la vitesse deviennent indépendantes. Ici, nous

suivons une proposition faite par Willis [12], inspiré par un schéma de Fietz et Shvets [11], nous introduisons une charge généralisée sous la forme d'un champ de déformation libre $\tilde{\gamma}$. La relation contrainte-déformation devient

$$\tilde{\sigma} = \mathbb{C} : (\tilde{\varepsilon} - \tilde{\gamma}). \quad (15)$$

Par conséquent, la loi de comportement effective s'écrit sous la nouvelle forme :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Sigma} \\ \tilde{\mathbf{P}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}^e & \mathcal{S}^1 \\ \mathcal{S}^2 & \rho^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\gamma} \\ \tilde{\mathbf{V}} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Maintenant, $\tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\gamma}$ et $\tilde{\mathbf{V}}$ deviennent indépendants. Enfin, nous notons que la déformation libre $\tilde{\gamma}$ possède $d(d+1)/2$ composantes indépendantes qui, en plus des d composantes indépendantes de $\tilde{\mathbf{f}}$, nous permettent de déterminer toutes les $d(d+3)/2 \times d(d+3)/2$ composantes de \mathbb{C}^e , \mathcal{S}^1 , \mathcal{S}^2 et ρ^e .

3 Schéma de résolution basé sur la MEF

Dans cette section, un algorithme basé sur la MEF est utilisé pour calculer les propriétés élastodynamiques effectives du matériau hétérogène en question. Tout d'abord, les tenseurs des propriétés élastodynamiques effectives sont établis à l'aide de deux tenseurs de localisation concernés. Puis les formulations forte et faible, ainsi que le schéma de discrétisation, qui sont nécessaires pour le calcul sont ensuite présentés.

3.1 Loi de comportement effective exprimée par les tenseurs de localisation

En appliquant le principe de superposition et en utilisant les deux tenseurs de localisation, \mathcal{A} d'ordre trois et \mathbf{B} d'ordre deux, le champ de déplacement $\tilde{\mathbf{u}}$ peut s'exprimer par la formule suivante :

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) : \tilde{\gamma} + \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \tilde{\mathbf{f}}, \quad (17)$$

où $\mathcal{A}(\mathbf{x})$ et $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ dépendent aussi de \mathbf{k} et ω . Puisque $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\mathbf{f}}$ sont indépendantes, alors $\mathcal{A}(\mathbf{x})$ et $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ sont déterminés de manière unique. Le champ de déformation $\tilde{\varepsilon} - \tilde{\gamma}$ et le champ de vitesse $\tilde{\mathbf{v}}$ peuvent s'écrire en fonction de $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\mathbf{f}}$ par

$$\begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon} - \tilde{\gamma} \\ \tilde{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \mathcal{A} - \mathbf{I} & (\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \mathbf{B} \\ -i\omega\mathcal{A} & -i\omega\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\gamma} \\ \tilde{\mathbf{f}} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Le champ de contrainte $\tilde{\sigma}$ et le champ de quantité de mouvement $\tilde{\mathbf{p}}$ sont liés aux $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\mathbf{f}}$ par

$$\begin{bmatrix} \tilde{\sigma} \\ \tilde{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{C} : [(\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \mathcal{A} - \mathbf{I}] & \mathbb{C} : [(\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \mathbf{B}] \\ -\omega^2 \rho \mathcal{A} & -\omega^2 \rho \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\gamma} \\ \tilde{\mathbf{f}} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Les calculs de la moyenne sur \mathcal{T} de (18) et (19) nous conduisent à

$$\begin{bmatrix} \mathbb{C}^e & \mathcal{S}^1 \\ \mathcal{S}^2 & \rho^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbb{C} : [(\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \mathcal{A} - \mathbf{I}] \rangle & \langle \mathbb{C} : [(\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \mathbf{B}] \rangle \\ -\omega^2 \langle \rho \mathcal{A} \rangle & -\omega^2 \langle \rho \mathbf{B} \rangle \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \langle (\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \mathcal{A} - \mathbf{I} \rangle & \langle (\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \mathbf{B} \rangle \\ -i\omega \langle \mathcal{A} \rangle & -i\omega \langle \mathbf{B} \rangle \end{bmatrix}^{-1}. \quad (20)$$

3.2 Algorithme de résolution

Le schéma d'homogénéisation numérique peut être résumé comme suit :

- Choisir un couple (\mathbf{k}, ω) .
- Résoudre des problèmes aux limites élémentaires définis par (5)-(7), (15), (8) et (9) avec $d(d+3)/2$ cas de chargements différents : $(\tilde{\gamma} = \mathbf{e}_i \otimes^s \mathbf{e}_j, \tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{0})$ et $(\tilde{\gamma} = 0, \tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{e}_i)$.
- Avec le champ de déplacement obtenu $\tilde{\mathbf{u}}$, calculer ensuite $\tilde{\mathbf{v}}$, $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\mathbf{p}}$ et $\tilde{\sigma}$.
- Par la moyenne, calculer les champs macroscopiques correspondants $\tilde{\mathbf{E}}$, $\tilde{\mathbf{V}}$, $\tilde{\mathbf{P}}$ et $\tilde{\Sigma}$. En utilisant la relation (17), déterminer toutes les composantes des deux tenseurs de localisation \mathcal{A} et \mathbf{B} .
- Calculer les tenseurs des propriétés effectives \mathbb{C}^e , \mathcal{S}^1 , \mathcal{S}^2 et ρ^e selon (20).

3.3 Formulations forte et faible

Par combinaison des équations (5)-(7) et (15), l'équation de mouvement peut s'exprimer en fonction du champ de déplacement inconnu $\tilde{\mathbf{u}}$ comme suit :

$$(\nabla + i\mathbf{k}) \cdot \langle \mathbb{C} : [(\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\gamma}] \rangle + \tilde{\mathbf{f}} = -\omega^2 \rho \tilde{\mathbf{u}}, \quad (21)$$

où le champ de déplacement $\tilde{\mathbf{u}}$ doit vérifier les conditions aux limites périodiques ci-dessous :

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}), \quad (22)$$

$$[(\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) - \tilde{\gamma}] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = -[(\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) - \tilde{\gamma}] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}). \quad (23)$$

Nous notons que \mathbf{x} et \mathbf{y} sont les deux points situés sur les deux faces opposées de la frontière $\partial\mathcal{T}$ de \mathcal{T} et \mathbf{n} désigne la normale unitaire extérieure à $\partial\mathcal{T}$.

Soit $\delta\tilde{\mathbf{u}}$ une fonction de test vérifiant les conditions aux limites (22) et (23). En multipliant (21) avec $\delta\tilde{\mathbf{u}}^*$ et en appliquant le théorème de la divergence avec prise en compte des conditions aux limites périodiques sur $\partial\mathcal{T}$, nous obtenons

$$\langle [\delta\tilde{\mathbf{u}}^* \otimes^s (-\nabla + i\mathbf{k})] : \mathbb{C} : [(\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\gamma}] \rangle + \langle \delta\tilde{\mathbf{u}}^* \cdot \tilde{\mathbf{f}} \rangle = -\omega^2 \langle \delta\tilde{\mathbf{u}}^* \cdot \rho \tilde{\mathbf{u}} \rangle. \quad (24)$$

Dans la formulation faible, le champ de déplacement solution est cherché tel que

$$\langle [\delta\tilde{\mathbf{u}} \otimes^s (\nabla + i\mathbf{k})]^* : \mathbb{C} : [(\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \tilde{\mathbf{u}}] - \omega^2 \langle \delta\tilde{\mathbf{u}}^* \cdot \rho \tilde{\mathbf{u}} \rangle \rangle = \langle \delta\tilde{\mathbf{u}}^* \cdot \tilde{\mathbf{f}} \rangle + \langle [\delta\tilde{\mathbf{u}} \otimes^s (\nabla + i\mathbf{k})]^* : \mathbb{C} : \tilde{\gamma} \rangle \quad (25)$$

pour tout $\delta\tilde{\mathbf{u}}$ vérifiant (22) et (23).

3.4 Discrétisation

Le champ de déplacement $\tilde{\mathbf{u}}$ est construit par la combinaison des fonctions de forme comme suit :

$$\{\tilde{\mathbf{u}}\} = [\mathbf{N}] \{\tilde{\mathbf{u}}_{\text{Nodes}}\}, \quad (26)$$

où $[\mathbf{N}]$ est la matrice des fonctions de forme et $\{\tilde{\mathbf{u}}_{\text{Nodes}}\}$ est le vecteur des déplacements nodaux. La discrétisation $\{\tilde{\varepsilon}\}$ du tenseur de déformation est fournie par

$$\{\tilde{\varepsilon}\} = [\mathbf{Y}] \{\tilde{\mathbf{u}}_{\text{Nodes}}\} + i[\mathbf{k}][\mathbf{N}] \{\tilde{\mathbf{u}}_{\text{Nodes}}\}. \quad (27)$$

Dans cette équation, $[\mathbf{Y}]$ est la matrice des dérivées des fonctions de forme $[\mathbf{N}]$ et $[\mathbf{k}]$ est la matrice du vecteur d'onde. Par exemple, dans le cas bi-dimensionnel, en utilisant les fonctions de forme de type d'élément triangulaire, les expressions de $[\mathbf{N}]$, $[\mathbf{Y}]$ et $[\mathbf{k}]$ sont les suivantes :

$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} N_1(\mathbf{x}) & 0 & N_2(\mathbf{x}) & 0 & N_3(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & N_1(\mathbf{x}) & 0 & N_2(\mathbf{x}) & 0 & N_3(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad (28)$$

$$[\mathbf{Y}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1(\mathbf{x})}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2(\mathbf{x})}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3(\mathbf{x})}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1(\mathbf{x})}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2(\mathbf{x})}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3(\mathbf{x})}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1(\mathbf{x})}{\partial y} & \frac{\partial N_1(\mathbf{x})}{\partial x} & \frac{\partial N_2(\mathbf{x})}{\partial y} & \frac{\partial N_2(\mathbf{x})}{\partial x} & \frac{\partial N_3(\mathbf{x})}{\partial y} & \frac{\partial N_3(\mathbf{x})}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (29)$$

$$[\mathbf{k}] = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \\ k_y & k_x \end{bmatrix}. \quad (30)$$

La formulation faible définie par l'équation (25) devient alors

$$([\mathbf{K}] - \omega^2[\mathbf{M}])\{\tilde{\mathbf{u}}\} = \{\mathbf{F}\} \quad (31)$$

avec

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}] &= \langle ([\mathbf{Y}] + i[\mathbf{k}][\mathbf{N}])^{*T} [\mathbf{C}] ([\mathbf{Y}] + i[\mathbf{k}][\mathbf{N}]) \rangle, \\ [\mathbf{M}] &= \langle [\mathbf{N}]^{*T} [\rho] [\mathbf{N}] \rangle, \\ \{\mathbf{F}\} &= \langle ([\mathbf{Y}] + i[\mathbf{k}][\mathbf{N}])^{*T} [\mathbf{C}] \{\tilde{\gamma}_{\text{Nodes}}\} \rangle + \langle [\mathbf{N}]^{*T} \{\tilde{\mathbf{f}}_{\text{Nodes}}\} \rangle, \end{aligned} \quad (32)$$

où $\{\tilde{\gamma}_{\text{Nodes}}\}$ et $\{\tilde{\mathbf{f}}_{\text{Nodes}}\}$ sont respectivement les déformations libres et forces volumiques nodales. Nous constatons que la matrice de rigidité définie par (32) est Hermitienne, c'est-à-dire $[\mathbf{K}]^T = [\mathbf{K}]^*$.

La condition de périodicité du champ de déplacement sur le bord est prise en compte en imposant

$$\{\tilde{\mathbf{u}}\}^+ = \{\tilde{\mathbf{u}}\}^- \quad (33)$$

où les signes "+" et "-" désignent les noeuds homologues du maillage au bord de la cellule de base. Cette condition a été également imposée par Nemat-Nasser et Srivastava [8]. L'équation (33) peut se réécrire sous la forme équivalente suivante :

$$[\mathbf{P}]\{\tilde{\mathbf{u}}_{\text{Nodes}}\} = \mathbf{0}, \quad (34)$$

où $[\mathbf{P}]$ est une matrice déterminée à partir de l'équation (33).

Pour prendre en compte de condition (34), nous appliquons ensuite la méthode de multiplicateur Lagrange avec variables Λ , l'équation (31) est de la nouvelle forme suivante :

$$\begin{aligned} &\left(\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{P}^T \\ \mathbf{P} & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_{\text{Nodes}} \\ \Lambda \end{bmatrix} \\ &\equiv ([\mathbf{K}_{\text{glob}}] - \omega^2[\mathbf{M}_{\text{glob}}]) \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_{\text{Nodes}} \\ \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (35)$$

Cette dernière équation nous permet de calculer, pour un couple (\mathbf{k}, ω) donné, le vecteur des déplacements nodaux $\{\tilde{\mathbf{u}}_{\text{Nodes}}\}$ et de déterminer ensuite le champ de déplacement $\tilde{\mathbf{u}}$.

3.5 Courbe de dispersion

Les propriétés élastodynamiques effectives \mathbb{C}^e , \mathcal{S}^1 , \mathcal{S}^2 et ρ^e du milieu hétérogène en question dépendent généralement de ω . Pour étudier cette dépendance, nous considérons dans cette section le cas où une onde libre se propage dans ce milieu hétérogène. En mettant $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ ce qui correspond à $\tilde{\gamma} = \mathbf{0}$ et $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{0}$ dans l'équation (35), on obtient une équation permettant de déterminer le champ de déplacement solution de l'onde libre considérée. Cependant, pour que la solution de cette équation soit non-triviale au sens que la solution soit non-nulle, il faut que

$$\det([\mathbf{K}_{\text{glob}}] - \omega^2[\mathbf{M}_{\text{glob}}]) = 0. \quad (36)$$

Cette condition, appelé condition de dispersion, relie le nombre d'onde \mathbf{k} à la fréquence ω de l'onde libre. Pour chaque valeur de \mathbf{k} , de nombreuses fréquences ω (un nombre infini réduit à un nombre fini en raison de discrétisation) permettent que l'onde se propage de façon libre dans le milieu hétérogène en question. Les courbes présentant la relation entre le nombre d'onde \mathbf{k} et la fréquence ω sont dites courbes de dispersion.

À titre d'exemple, nous présentons à la figure 2 les courbes de dispersion pour un composite bi-phasique uni-directionnel (voir la figure 1). La longueur et les propriétés des phases 1 et 2 sont choisies telles que $L = 5\text{mm}$, $E_1 = 1\text{GPa}$, $E_2 = 200\text{GPa}$, $\rho_1 = 1.5 \times 10^{-3}\text{kg/m}^3$ et $\rho_2 = 3 \times 10^{-3}\text{kg/m}^3$. Les courbes de dispersion obtenues par la méthode numérique basée sur MEF sont ensuite comparées avec celles déterminées par Andrianov et al. [14] avec la méthode analytique. Nous constatons à partir de la figure 2 que les résultats obtenus par les méthodes numérique et analytique sont bien cohérents. Ceci constitue une première validation de la méthode numérique utilisée.

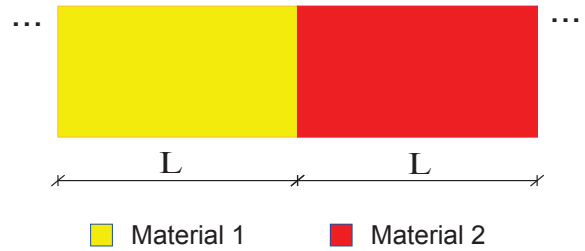


FIGURE 1 – Une cellule de base d'un composite bi-phasique uni-directionnel.

4 Exemples numériques

Dans cette section, afin d'illustrer les résultats obtenus pour les propriétés élastodynamiques effectives du composite en question par utilisation de la méthode numérique établie dans les sections précédentes, nous considérons le premier exemple numérique concernant un composite uni-directionnel constitué de trois phases (voir la figure 3). La cellule de base est formée de cinq couches. La couche centrale est la plus rigide et la plus dense avec un module d'Young $E_1 = 3.10^{13} \text{ (Pa)}$ et une densité $\rho_1 = 8000 \text{ (kg/m}^3\text{)}$. Les deux couches juxtaposées à cette dernière sont très souples par rapport aux autres avec $E_2 = 3.10^8 \text{ (Pa)}$ et ont des épaisseurs identiques pour avoir

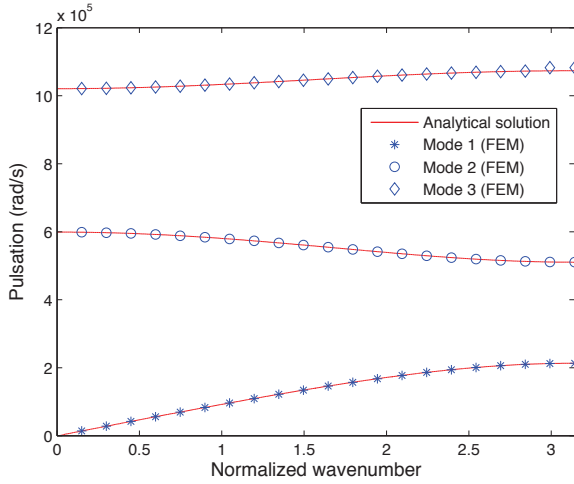


FIGURE 2 – Courbes de dispersion obtenues par les méthodes numérique et analytique.

une cellule symétrique. Les deux couches extérieures sont les plus épaisses, ayant $E_3 = 8.10^{11}$ (Pa) et $\rho_3 = 1000$ (kg/m^3).

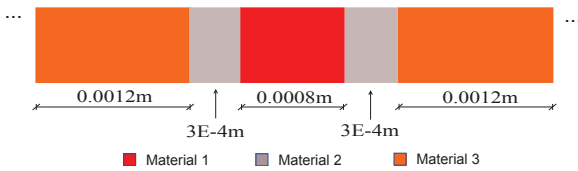


FIGURE 3 – Une cellule de base du composite tri-phasique uni-directionnel avec microstructure symétrique.

Dans le cas où la déformation libre est égale à zéro, $\tilde{\gamma} = \mathbf{0}$, en utilisant la relation (14) entre les champs de déformation et de vitesse macroscopiques, la loi de comportement effective (13) se réduit aux équations suivantes dans le cas uni-directionnel :

$$\tilde{\Sigma} = C^e \tilde{E} + S^1 \tilde{V} = \left(C^e - \frac{\omega}{k} S^1 \right) \tilde{E}, \quad (37)$$

$$\tilde{P} = S^2 \tilde{E} + \rho^e \tilde{V} = \left(-\frac{k}{\omega} S^2 + \rho^e \right) \tilde{V}. \quad (38)$$

Ces équations sont équivalentes à celles utilisées par Nemat-Nasser et Srivastava [8] :

$$\tilde{E} = D^e \tilde{\Sigma}, \quad \tilde{P} = R^e \tilde{V} \quad (39)$$

où D^e et R^e sont respectivement le module de souplesse effectif et la masse effective qui sont définis par

$$D^e = \frac{1}{C^e - \frac{\omega}{k} S^1}, \quad R^e = -\frac{k}{\omega} S^2 + \rho^e. \quad (40)$$

Nous représentons aux figures 5 et 6, le module de souplesse effectif et la masse effective en fonction de la fréquence pour deux premiers modes 1 et 2 correspondant aux deux courbes de dispersion dessinées dans la figure 4. Ces courbes de dispersion calculées par MEF sont bien identiques avec celles trouvées par Nemat-Nasser et Srivastava [8]. Les valeurs du module de souplesse effectif et de la masse effective calculées par la méthode numérique

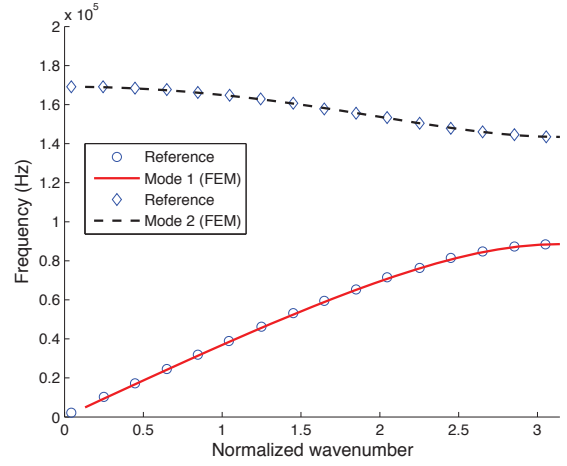


FIGURE 4 – Courbe de dispersion du composite tri-phasique uni-directionnel avec microstructure symétrique.

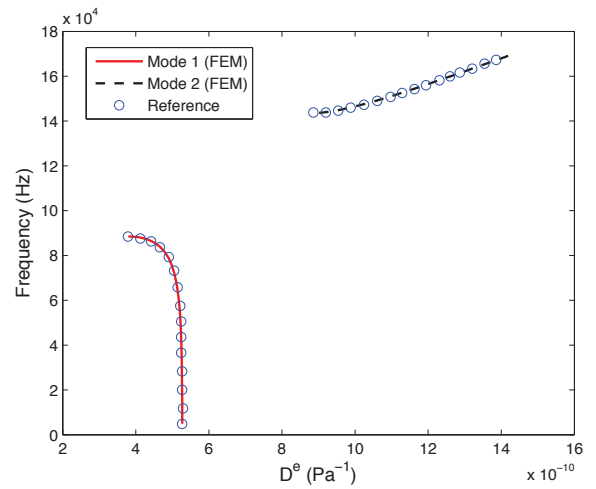


FIGURE 5 – le module de souplesse effectif D^e en fonction de la fréquence.

basée sur MEF sont ensuite comparées avec celles de références obtenues par Nemat-Nasser et Srivastava [8]. Nous pouvons constater à partir des figures 5 et 6 que les nos résultats obtenus par MEF sont bien identiques à celles de Nemat-Nasser et Srivastava [8]. Ces observations nous donnent encore une validation de notre méthode numérique.

Dans le deuxième exemple, le composite est aussi constitué de trois phases dont les propriétés des phases sont identiques à celles utilisées dans le premier exemple. Cependant, les trois phases sont réparties de façon asymétrique (voir la figure 7). Les courbes de dispersion sont illustrées à la figure 8. Encore une fois, les courbes de dispersion calculées par MEF sont exactement les mêmes que celles trouvées par Nemat-Nasser et Srivastava [8]. Par utilisation les lois de comportement effectif proposées par Nemat-Nasser et Srivastava [8] comme suit :

$$\tilde{E} = \bar{D} \tilde{\Sigma} + \bar{T}^1 \tilde{V}, \quad \tilde{P} = \bar{T}^2 \tilde{\Sigma} + \bar{R} \tilde{V}, \quad (41)$$

où les modules effectifs \bar{D} , \bar{T}^1 , \bar{T}^2 , and \bar{R} sont définis par

$$\bar{D} = (C^e)^{-1}, \quad \bar{T}^1 = -(C^e)^{-1} S^1, \quad (42)$$

$$\bar{T}^2 = S^2 (C^e)^{-1}, \quad \bar{R} = \rho^e - S^2 (C^e)^{-1} S^1. \quad (43)$$

Pour chaque couple (k, ω) des courbes de dispersion, les propriétés effectives ont été calculées et dessinées dans les

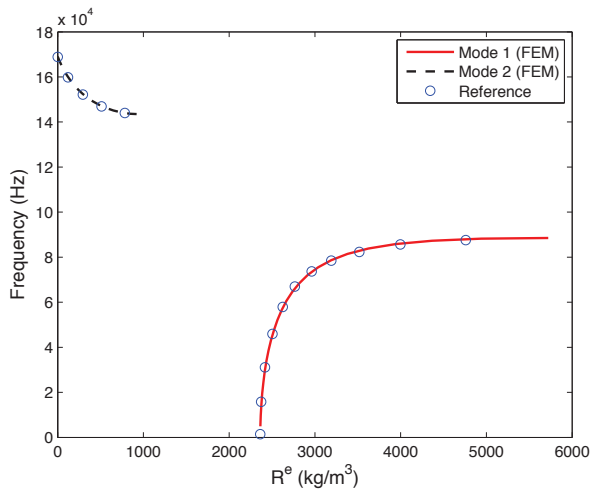
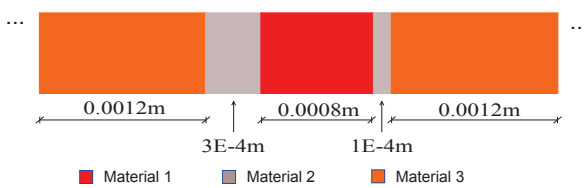
FIGURE 6 – la masse effective R^e en fonction de la fréquence.

FIGURE 7 – Une cellule de base du composite tri-phasique uni-directionnel avec microstructure asymétrique.

figures 9, 10, 11 et 12. Nous pouvons observer à partir des figures 9, 10, 11 et 12 que \bar{D} et \bar{R} sont réelles tandis que \bar{T}^1 et \bar{T}^2 sont complexes et vérifient la relation $\bar{T}^1 T^2 = \bar{T}^2 T^1$. Ces résultats coïncident bien avec ceux de Nemat-Nasser et Srivastava [8].

5 Conclusions et remarques

Dans ce travail, nous avons développé une méthode numérique basé sur le MEF en vue de déterminer les paramètres effectifs dans la loi constitutive élastodynamique effective formulée par Willis pour un milieu hétérogène périodique. Notre schéma numérique est général et peut être appliqué à tout type de cellule de base dans un milieu périodique. Par ailleurs, le coût numérique impliqué est abordable et l'efficacité de la méthode a été confrontée à la fois des résultats analytiques et numériques. La validité de la procédure d'homogénéisation proposée est fortement dépendante de la fréquence. Ce schéma numérique à base de MEF peut être appliqué à des microstructures complexes. En particulier, il peut être utilisé pour l'optimisation de microstructures afin de concevoir des métamatériaux acoustiques, avec une application sur les domaines de l'isolation phonique et acoustique sous-marine. Grâce à la généralité de la méthode, ce schéma numérique peut être étendu à l'homogénéisation dynamique des microstructures périodiques viscoélastiques ou plus généralement à des matériaux non linéaires. Cette méthode peut également être adaptée au cas des milieux poreux.

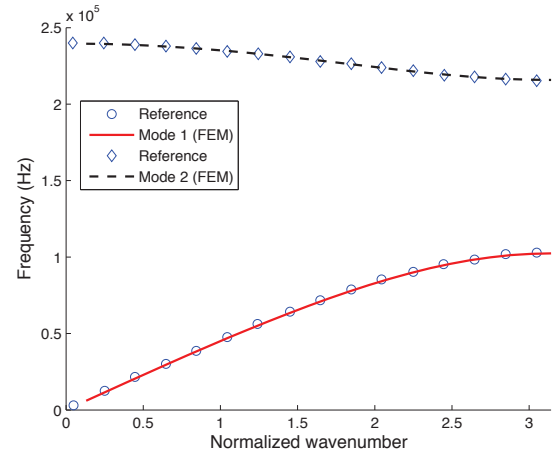
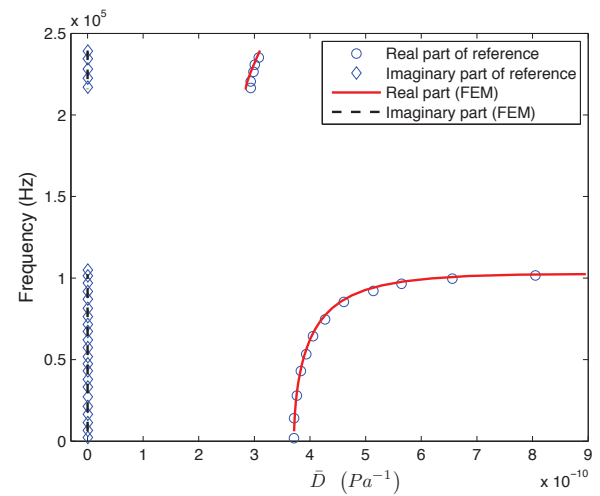
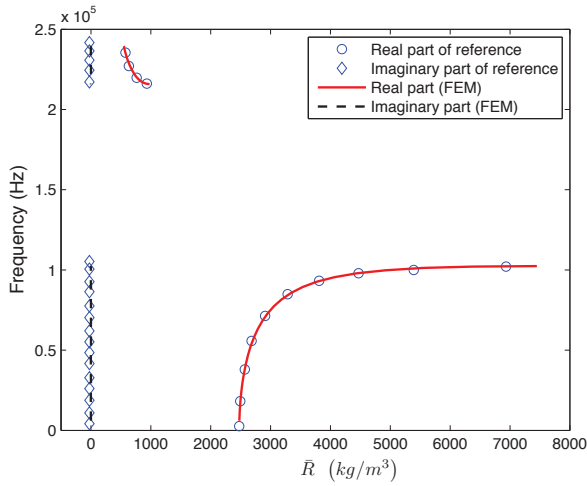
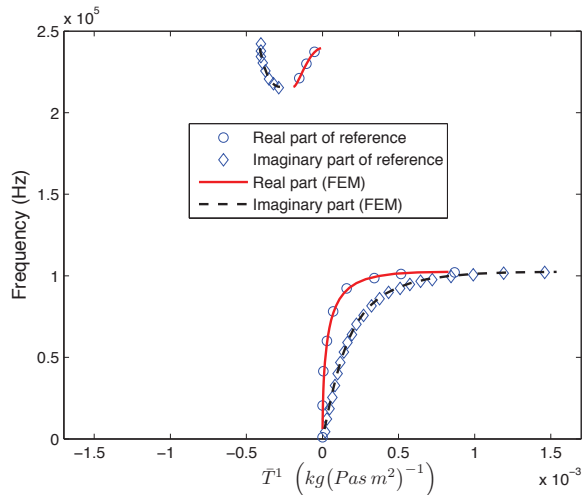
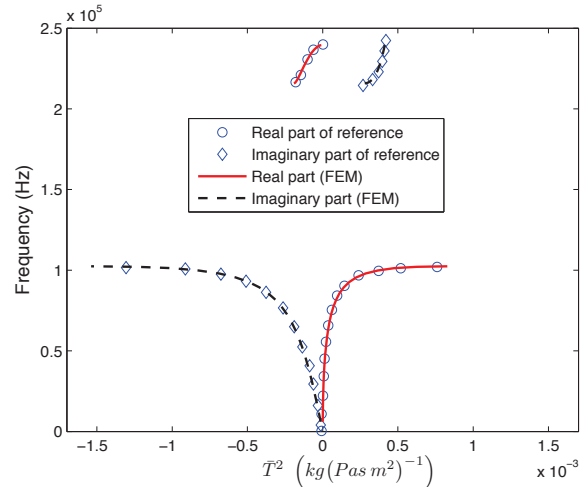


FIGURE 8 – Courbe de dispersion du composite tri-phasique uni-directionnel avec microstructure asymétrique.

FIGURE 9 – le module de souplesse effectif \bar{D} en fonction de la fréquence.

Références

- [1] J. R. Willis, *Dynamics of composites*, Continuum Micromechanics, Vienna, Austria : Springer.
- [2] J. R. Willis, A polarization approach to the scattering of elastic wave-I. Scattering by a single inclusion, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **28**, 287-305 (1980).
- [3] J. R. Willis, A polarization approach to the scattering of elastic wave-II. Multiple scattering from inclusions. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **28**, 307-327 (1980).
- [4] J. R. Willis, Exact effective relations for dynamics of a laminated body, *Mechanics of Materials* **41**, 385-393 (2009).
- [5] A. L. Shuvalov, A. A. Kutsenko, A. N. Norris, O. Poncelet, Effective Willis constitutive equations for periodically stratified anisotropic elastic media, *Proceedings of the Royal Society A* **467**, 1749-1769 (2011).

FIGURE 10 – la masse effective \bar{R} en fonction de la fréquence.FIGURE 11 – le module de couplage effectif \bar{T}^1 en fonction de la fréquence.FIGURE 12 – le module de couplage effectif \bar{T}^2 en fonction de la fréquence.

- [11] C. Fietz, G. Shvets, Current-driven metamaterial homogenization, *Physica B* **405**, 2930-2934 (2010).
- [12] J. R. Willis, Effective constitutive relation for waves in composites and metamaterials, *Proceedings of the Royal Society A* **467**, 1865-1879 (2011).
- [13] A. V. Amirkhizi, S. Nemat-Nasser, Microstructurally-based homogenization of electromagnetic properties of periodic media, *Comptes Rendus Mécanique* **336**, 24-33 (2008).
- [14] I. V. Andrianov, V. I. Bolshakov, V. V. Danishevs'ky, D. Weichert, Higher order asymptotic homogenization and wave propagation in periodic composite materials, *Proceedings of the Royal Society A* **464**, 1181-1201 (2008).

- [6] H. Nassar, Q. C. He, N. Auffray, Willis elastodynamic homogenization theory revisited for periodic media, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **77**, 158-178 (2015).
- [7] S. Nemat-Nasser, J. R. Willis, A. Srivastava, A. V. Amirkhizi, Homogenization of periodic elastic composites and locally resonant sonic materials, *Physical Review B* **83**, 104103 (2011).
- [8] S. Nemat-Nasser, A. Srivastava, Overall dynamic constitutive relations of layered elastic composites, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **59**, 1953-1965 (2011).
- [9] A. Srivastava, S. Nemat-Nasser, Overall dynamic properties of three-dimensional periodic elastic composites, *Proceedings of the Royal Society A* **468**, 269-287 (2011).
- [10] A. N. Norris, A. L. Shuvalov, A. A. Kutsenko, Analytical formulation of three-dimensional dynamic homogenization for periodic elastic systems, *Proceedings of the Royal Society A* **468**, 1629-1651 (2011).