

CFA/VISHNO 2016

Application du contrôle actif sur un gong d'opéra chinois

M. Jossic^a, B. Chomette^a, A. Mamou-Mani^b et D. Roze^b

^aInstitut Jean le Rond d'Alembert (CNRS, UMR 7190), Case courrier 162, 4 place
Jussieu, F-75252 Paris, France

^bIrcam STMS (CNRS, UMR 9912), 1 place Igor Stravinsky, 75004 Paris, France
marguerite.jossic@dalembert.upmc.fr



LE MANS

Les instruments de musique de la famille des gongs se caractérisent par un comportement dynamique non linéaire induit par la géométrie de l'instrument et leurs vibrations à grande amplitude. Dans le cas du gong d'opéra chinois, le *xiaoluo*, cette non-linéarité se traduit par une variation de certaines fréquences avec l'amplitude de vibration et l'apparition de fréquences supplémentaires aux fréquences propres (distorsion harmonique et combinaison de fréquences propres principalement). L'objectif des travaux présentés est de contrôler la dynamique du gong afin de modifier le son résultant en utilisant des techniques de contrôle actif. En première approche, l'application d'un contrôle modal linéaire, basé sur une identification linéaire et un contrôleur sur l'état modal de l'instrument permet un contrôle en amortissement du mode fondamental à de faibles niveaux d'excitation. Les résultats expérimentaux obtenus montrent que le contrôle agit également sur le comportement non linéaire du gong pour des niveaux d'excitation plus importants. Plus particulièrement, le contrôle modal du mode fondamental agit non seulement sur celui-ci, mais également sur les harmoniques générées par le comportement non linéaire. Les résultats expérimentaux sont finalement comparés à la simulation d'un contrôle modal appliqué sur le modèle d'un oscillateur de duffing correspondant au mode fondamental du gong.

1 Introduction

Établir des liens entre les paramètres physiques objectifs d'un instrument de musique et le son qu'il produit, attribut subjectif qui est formulé par l'oreille musicale, est une question centrale en acoustique musicale. Le contrôle actif modal, en permettant la modification des paramètres modaux (fréquences, amortissements) de structures données, se révèle être un outil remarquable pour modifier le son produit par un instrument. Ainsi, il a été appliqué avec succès à une table d'harmonie de guitare [1] et une clarinette simplifiée [5].

Les différentes caractéristiques sonores des instruments de la famille des gongs dépendent pour l'essentiel de non-linéarités géométriques qui apparaissent dès que l'amplitude avec laquelle l'instrument est excité est assez grande [3]. Ainsi, le gong d'opéra chinois *xiaoluo* a la particularité de produire un glissement fréquentiel ascendant de son mode fondamental dès qu'il est frappé fortement en son centre [2]. Ce glissement fréquentiel peut représenter des variations de plusieurs dizaines de Hz et est caractéristique de certains comportements faiblement non linéaires, comme par exemple les oscillateurs de Duffing [10]. Ce comportement s'accompagne de l'apparition de fréquences non modales dues à des résonances internes entre modes linéaires, ou à de la distorsion de modes [9].

Un exemple de ces phénomènes, dans le cas d'une excitation avec une mailloche en feutre, est illustré sur la Figure 1 : à faible amplitude d'excitation, le mode fondamental du gong ne varie pas en fréquence, et des phénomènes de distorsion harmonique sont visibles. Pour de fortes amplitudes d'excitation, le spectre est plus dense : de nouvelles composantes non-modales apparaissent, et le mode fondamental opère un glissement fréquentiel ascendant.

Le but de cette étude est d'appliquer un contrôle modal linéaire au gong *xiaoluo*, à la fois en régime de faibles amplitudes et de fortes amplitudes. Les résultats montrent que le contrôle modal en amortissement du mode fondamental de l'instrument, en régime de fortes amplitudes, ne permet pas de contrôler le glissement fréquentiel. Toutefois, le contrôle modal linéaire mis en oeuvre agit à la fois sur le mode ciblé et sur les composantes fréquentielles issues de son comportement non linéaire. Ces résultats expérimentaux sont supportés par des études en simulation.

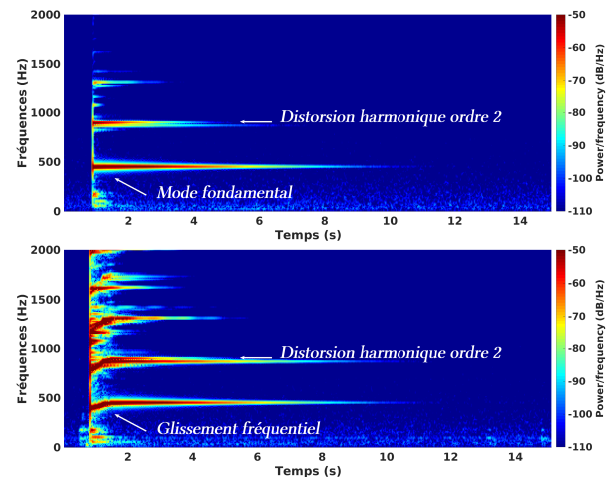


FIGURE 1 – Spectrogrammes sonores du gong xiaoluo frappé en son centre avec une mailloche en feutre, en régime de faibles amplitudes (haut) et fortes amplitudes (bas).

2 Théorie du contrôle modal

2.1 Modèle d'état

Le contrôle actif modal repose sur une formulation dans l'espace d'état de l'équation différentielle du mouvement des systèmes vibratoires. Celle-ci, une fois discrétisée et projetée sur la base modale, se réduit à un système de n équations différentielles (n correspondant au nombre de modes considérés) :

$$\ddot{q}_i(t) + 2\xi_i\omega_i\dot{q}_i(t) + \omega_i^2q_i(t) = f_i \quad 1 \leq i \leq n \quad (1)$$

où les (ω_i) , (ξ_i) et (f_i) représentent respectivement les n fréquences propres, les n amortissements propres et les n perturbations projetées dans la base modale. La formulation dans l'espace d'état consiste à définir un vecteur d'état $X = [q(t); \dot{q}(t)]^T$ permettant de mettre le système (1) de n équations différentielles du second ordre sous la forme d'une unique équation du premier ordre :

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Gw(t) \quad (2)$$

La matrice A contient alors les paramètres modaux (ω_i) et (ξ_i) et la matrice G les perturbations (f_i) . On désigne par $w(t)$ la perturbation imposée au système (un coup de mailloche par exemple). Les $2n$ pôles (p_i) du système, déterminés par la condition de nullité du déterminant $\det(\lambda I - A)$, s'écrivent :

$$p_i = -\xi_i\omega_i \pm j\omega_i\sqrt{1 - \xi_i^2} \quad (3)$$

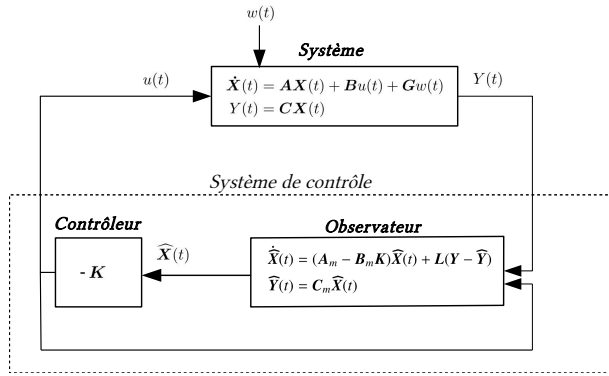


FIGURE 2 – Schéma du système de contrôle au complet.

2.2 Système de contrôle

Un système de contrôle peut être adjoint au système vibratoire décrit par l'équation (2) ; celle-ci devient alors :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{X}}(t) &= A\hat{X}(t) + Bu(t) + Gw(t) \\ Y(t) &= C\hat{X}(t) \end{aligned} \quad (4)$$

Les matrices B et C contiennent respectivement les caractéristiques des actionneurs et des capteurs, et le scalaire $u(t)$ désigne la commande de contrôle. Les matrices A , B et C sont identifiées à l'aide d'un algorithme Rational Fraction Polynomial (RFP) [8]. Dans le cas d'un contrôle par retour d'état, la commande s'écrit $u(t) = -K\hat{X}(t)$, où K est le gain de commande, et \hat{X} désigne l'estimation du vecteur X par un observateur de Luenburger [4]. Ce dernier est caractérisé par le gain L et est décrit par :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{X}}(t) &= (A_m - B_m K)\hat{X}(t) + L(Y - \hat{Y}) \\ \hat{Y}(t) &= C_m \hat{X}(t) \end{aligned} \quad (5)$$

Les matrices A_m , B_m et C_m désignent respectivement les matrices du système, des actionneurs et des capteurs modélisés dans l'observateur. L'introduction de la commande u modifie les pôles du système : ils correspondent non plus au spectre de la matrice A mais à celui de la matrice $A - BK$. Les pôles cibles du système sont déterminés à l'aide des amortissements et pulsations cibles et de la relation (3), et les gains K et L à l'aide d'un algorithme de placement de pôles. La Figure 2 présente le schéma du système de contrôle au complet.

3 Dispositif expérimental

3.1 Analyse modale préliminaire

Une analyse modale expérimentale du gong a été réalisée afin d'identifier les modes propres destinés à être contrôlés. Elle a été effectuée en excitant le gong à côté de son centre avec un marteau d'impact. Le gong est posé à l'horizontale sur deux blocs de mousse, garantissant dans une moindre mesure la préservation de conditions aux limites libres, comme en situation de jeu. Le signal de vitesse verticale est mesuré grâce à un vibromètre laser placé à la verticale de l'instrument. La surface du gong a été discrétisée en un quadrillage de 429 points. Pour chacun d'eux, la fonction de transfert est calculée à partir de la

mesure des signaux du marteau d'impact et du vibromètre. Les cinq premières déformées opérationnelles issues de cette analyse modale sont présentées Figure 3. Elles sont comparées aux déformées opérationnelles obtenues pour le gong instrumenté (voir 3.2). Le mode fondamental, contrôlé dans la suite de l'étude, se situe à 448 Hz, et est principalement localisé au centre du gong. Ces déformées opérationnelles sont comparables à celles trouvées par Tsai et al. sur un gong *xiaoluo* [11].

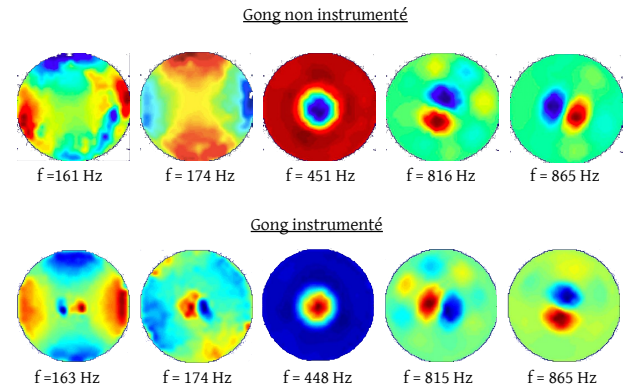


FIGURE 3 – Déformées opérationnelles du gong xiaoluo sans et avec instrumentation (capteur + actionneur).

3.2 Instrumentation

La chaîne de contrôle développée (Figure 2) utilise un seul capteur et un seul actionneur. Un capteur piézoélectrique Micro Fiber Composite et un actionneur électrodynamique HIAX11C005-12 ont été choisis. Ils sont colocalisés sur la couronne du gong, le capteur étant positionné sur la face supérieure du gong, et l'actionneur sur la face inférieure (Figure 4). Ce positionnement sur la couronne évite une perturbation trop importante du mode fondamental, localisé au centre du gong (Figure 3).

Le contrôleur et l'observateur sont constitués par le système COALA [7]. Les matrices A_m , B_m , C_m , K et L , sont calculées en amont comme expliqué à la section 2 et importées sur le serveur de la plateforme. La boucle de contrôle est réalisée à une fréquence d'échantillonnage de 20 000 Hz.

Deux systèmes d'excitation du gong sont disponibles : un balayage sinus, envoyé dans l'actionneur placé sur la couronne du gong, et une excitation impulsionnelle à l'aide



FIGURE 4 – Photographies du gong instrumenté. A gauche : Localisation du capteur MFC sur le gong et position de frappe de la mailloche (croix rouge). A droite : position de l'actionneur sur le gong, colocalisé avec le capteur.

d'une mailloche en feutre, au centre (Figure 4). Le gong est suspendu à la verticale par une cordelette, attachée à un système mécanique permettant une frappe reproductible pour différentes quantités de mouvement de la mailloche - correspondant à différents angles de départ.

4 Contrôle en amortissement du mode fondamental en faibles amplitudes.

Cette section présente les résultats expérimentaux et les résultats de simulation d'un contrôle en amortissement linéaire du mode fondamental ($f = 448$ Hz) en régime de faibles amplitudes. Le nombre de modes contenus dans le modèle d'état et l'observateur est de 9. Cette valeur correspond à une limite haute afin de s'affranchir des éventuels problèmes de *spillover* (amplification par le contrôle des modes non modélisés).

4.1 Résultats expérimentaux

Le gong est excité avec un balayage sinus variant de 80 Hz à 2000 Hz, *via* l'actionneur positionné sur le gong. Les fonctions de transfert entre l'actionneur et le capteur pour différentes valeurs de contrôle en amortissement sont représentées Figure 5 (a). Un algorithme RFP est ensuite appliqué à chaque fonction de transfert afin d'identifier les amortissements du gong contrôlé. Les résultats de cette identification sont exprimés en variation (%) de l'amortissement sans contrôle et sont indiqués dans le Tableau 1. Les amortissements atteints sont inférieurs aux amortissements cibles. D'autre part, la fréquence du mode contrôlé se décale (de l'ordre de -0.2%) avec l'augmentation de la valeur du contrôle en amortissement. Ce décalage est l'objet de recherches en cours. La Figure 6 présente un exemple des spectrogrammes du son du gong *xiaoluo* non contrôlé et contrôlé avec une augmentation d'amortissement de 400%. Dans les deux cas, l'instrument est frappé en son centre avec une mailloche en feutre dont la quantité de mouvement est d'environ 1kg.m.s^{-1} .

TABLEAU 1 – Variations d'amortissement cibles du contrôle (en % de l'amortissement sans contrôle), comparées à celles obtenues dans le cas expérimental et en simulation.

Cible	-70%	-60%	-50%	+50%	+100%	+200%	+400%
Exp.	-54%	-40%	-36%	+25%	+48%	+107%	+235%
Simu	-65%	-57%	-44%	+54%	+107%	+215%	+411%

4.2 Simulation

Des simulations à partir d'un modèle d'état linéaire du gong, décrit par l'équation (5), ont été mises en oeuvre et comparées aux résultats expérimentaux. Ces simulations ont été réalisées avec un solveur Runge Kutta, à la fréquence d'échantillonnage de 20 000 Hz. Un balayage sinus (80 Hz - 2000 Hz) est utilisé en entrée du modèle. Les fonctions de transfert issues de ces simulations sont présentées sur la Figure 5 (b). De même que précédemment, les amortissements atteints sont identifiés à l'aide de

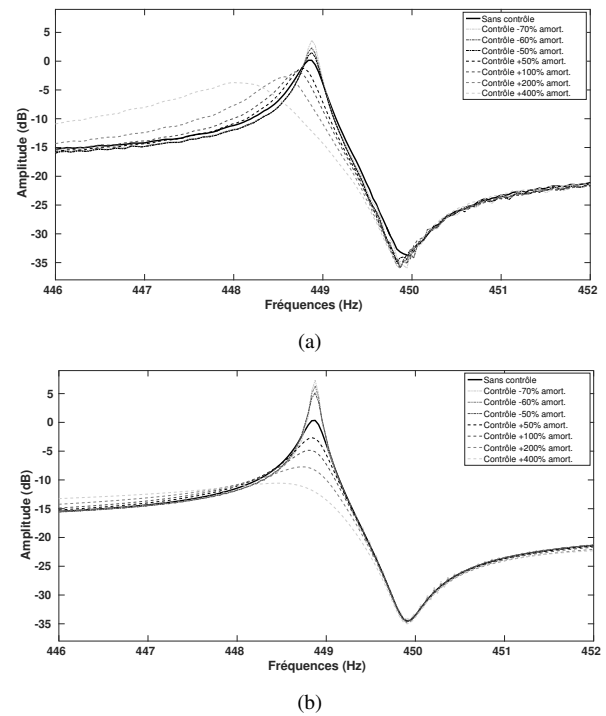


FIGURE 5 – (a) Fonction de transfert expérimentale (b) Fonction de transfert issue des simulations, pour différentes valeurs de contrôle en amortissement.

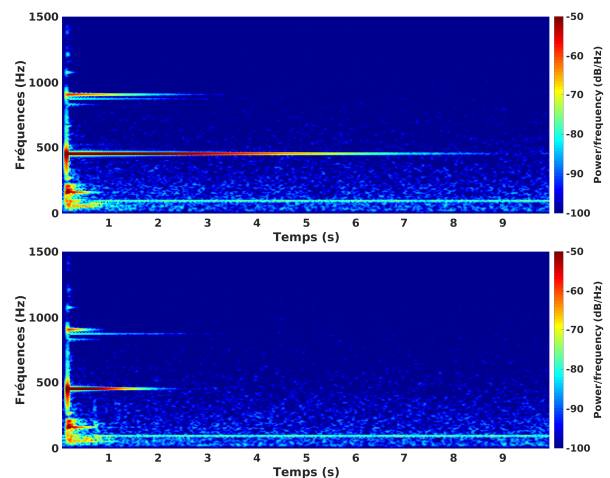


FIGURE 6 – Spectrogrammes du son du gong lorsqu'il est frappé avec une mailloche en feutre, dans le cas non contrôlé (haut) et contrôlé avec un amortissement de +400% du mode fondamental (bas).

l'algorithme RFP. Ils sont comparés aux amortissements expérimentaux dans le Tableau 1. Dans l'ensemble, les amortissements obtenus en simulation sont proches des amortissements cibles (10% d'erreur au maximum).

5 Contrôle en amortissement du mode fondamental en fortes amplitudes.

5.1 Vers un contrôle des phénomènes non linéaires

Les différents résultats présentés dans la section précédente sont issus d'une excitation en balayage sinus effectuée depuis la couronne par l'actionneur. Cette section s'intéresse au signal du capteur lorsque le gong est excité en son centre par une mailloche en feutre, en régime de faibles amplitudes. Cette configuration, plus proche de la configuration de jeu réelle, excite de manière préférentielle les modes situés au centre du gong - dont le mode fondamental à 448 Hz. Le spectre du signal mesuré par le capteur diffère de manière significative de celui reçu lors de l'excitation en balayage sinus (Figure 7). En effet, frapper le gong en son centre excite plus efficacement le mode fondamental, et favorise l'apparition d'un régime avec glissement fréquentiel. Ainsi, des fréquences non-modales sont observées dans le spectre, et ce dès les amplitudes de vibration les plus faibles ; ces fréquences sont issues de résonances non linéaires entre modes ou de distorsions harmoniques, en particulier de la distorsion du mode fondamental. La Figure 7 présente une comparaison du spectre au capteur lorsque le gong est excité par un balayage sinus *via* l'actionneur, ou par un coup de mailloche au centre. Lorsque le gong est frappé en son centre avec une mailloche, une fréquence non-modale est observée ; elle correspond à la distorsion à l'ordre 2 du mode fondamental à 448 Hz, avec une fréquence deux fois plus élevée (896 Hz).

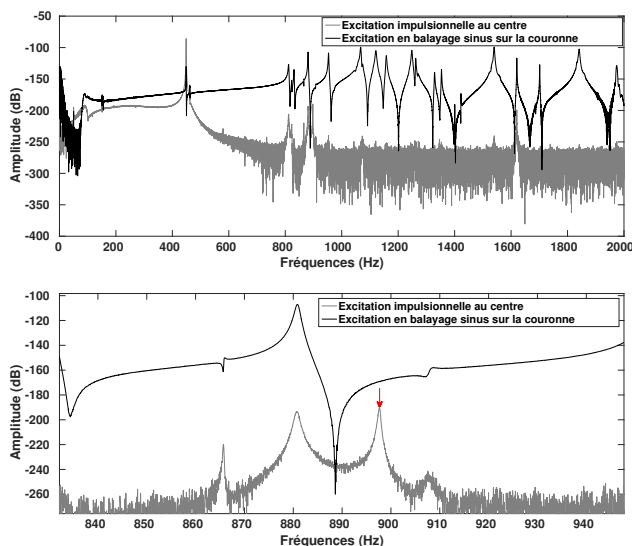


FIGURE 7 – Haut : Comparaison des spectres du signal au capteur lorsque le gong est excité en son centre par une mailloche en feutre (en gris) ou en balayage sinus par l'actionneur situé sur la couronne (en noir). Bas : Exemple de fréquence non modale observée (voir flèche).

Un contrôle linéaire en amortissement du mode fondamental est réalisé en excitant le gong à l'aide de la mailloche. La fréquence issue de la distorsion non linéaire est alors amortie au même titre que le mode fondamental dont elle est issue. La Figure 8 illustre ce phénomène, pour un contrôle en amortissement de +400%. Le spectre du

signal du capteur montre que la distorsion harmonique à 896 Hz est amortie du même nombre de dB que le mode fondamental à 448 Hz. Ce résultat a été vérifié pour d'autres valeurs de contrôle en amortissement : le Tableau 2 illustre la différence d'amplitude en dB entre la configuration avec et sans contrôle, pour les fréquences 448 Hz et 896 Hz, et pour différentes valeurs de contrôle en amortissement. Les atténuations en dB pour la configuration avec et sans contrôle sont comparables pour le mode fondamental et la composante à 896 Hz.

Ce résultat constitue une première illustration expérimentale du contrôle de fréquences non linéaires - donc non incluses dans le modèle du contrôleur modal contenu dans la matrice A - par un contrôleur linéaire. Il ouvre la possibilité, à partir du contrôle de modes linéaires, de contrôler des fréquences correspondant à des phénomènes non linéaires issus de ces modes contrôlés.

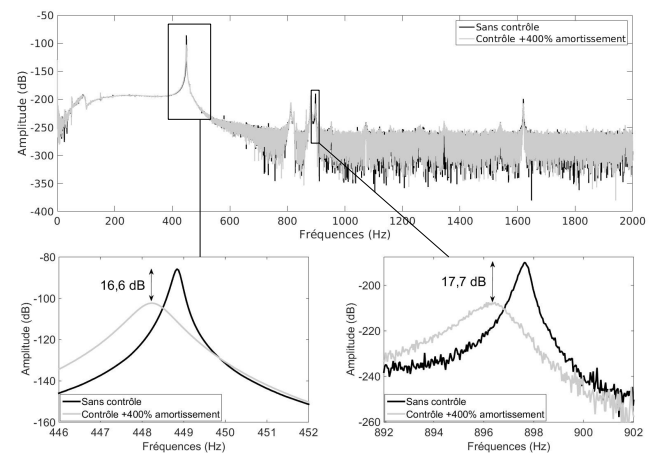


FIGURE 8 – Spectre du signal au capteur lorsque le gong *xiaoluo* est frappé en son centre avec une mailloche, pour une configuration sans contrôle et avec un contrôle linéaire en amortissement de +400%. Le mode fondamental (en bas à gauche) ainsi que la résonance non linéaire à la fréquence double (en bas à droite) sont amorties du même nombre de dB environ.

TABLEAU 2 – Différence d'amplitude, pour le mode fondamental et sa résonance non linéaire à la fréquence double, entre la configuration sans contrôle et avec contrôle en amortissement, pour différentes configurations de contrôle.

Cible	+50%	+100%	+200%	+400%
Mode 448 Hz	-3.3dB	-4.5dB	-9.1dB	-16.6dB
Résonance à 896 Hz	-3.7dB	-3.8dB	-10dB	-17.7dB

5.2 Contrôle linéaire en fortes amplitudes

5.2.1 Résultats expérimentaux

Les considérations présentées au paragraphe précédent nécessitent d'être complétées par une étude plus approfondie de l'action du contrôleur linéaire sur le système non linéaire que constitue le gong. Cette section présente une étude du

contrôle linéaire du gong en régime de fortes amplitudes. L'excitation est réalisée au centre à l'aide de la mailloche : la puissance et la localisation de l'actionneur ne permettent pas d'atteindre des niveaux d'excitation suffisants pour observer une variation de fréquence du mode fondamental. Le modèle d'état et l'observateur contiennent 6 modes. Un contrôle modal linéaire +400% en amortissement est réalisé pour différents angles de frappe. Les résultats indiquent que le contrôleur linéaire ne contrôle que la fin de la vibration, correspondant à la partie linéaire du signal, en deça d'une certaine amplitude de vibration, notée ici a_{lin} . Un exemple est montré sur la Figure 9 : les spectrogrammes du son du gong non contrôlé et contrôlé sont représentés, pour un coup de mailloche dont la quantité de mouvement est d'environ 17 kg.m.s^{-1} . Dans ce cas, le contrôle n'affecte pas la partie non linéaire du mode à 448 Hz (le glissement en fréquence) mais seulement la partie linéaire au bout de 0.5 seconde environ.

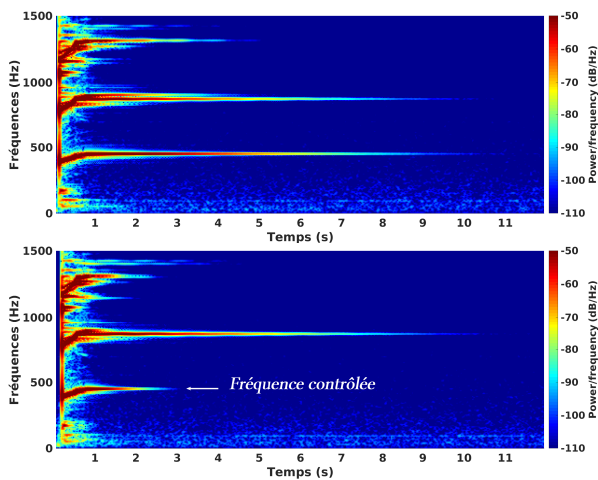


FIGURE 9 – Spectrogrammes du son du gong non contrôlé (haut) et du gong contrôlé avec un amortissement de +400% (bas) pour une frappe de quantité de mouvement d'environ 17 kg.m.s^{-1} (régime de fortes amplitudes)

Afin de caractériser les observations qualitatives réalisées sur les spectrogrammes (Figure 9), les enveloppes des signaux temporels sans contrôle (noir) et avec contrôle (rouge) mesurés par le capteur ainsi que la commande envoyée par l'actionneur sont évaluées Figure 10 pour différentes quantités de mouvement de frappe. Ces signaux sont filtrés par un filtre basse-bande de Butterworth d'ordre 3 dans la bande de fréquences [400 460] qui contient le glissement du mode fondamental. Les deux enveloppes sont confondues jusqu'à un certain temps à partir duquel elles décroissent avec chacune un amortissement différent (séparateur en pointillés sur la Figure 10). Cette séparation des deux courbes est interprétée comme l'instant à partir duquel le contrôleur agit véritablement sur le système, c'est à dire l'instant où la fréquence à contrôler (448 Hz) est effectivement présente dans le signal - auparavant, le glissement fréquentiel ne contient que des fréquences inférieures. Cette interprétation semble corroborée par le fait que cet instant coïncide avec le maximum de la commande de contrôle (en bleu), et une amplitude de vibration a_{lin} autour de 0.12 V qui ne dépend pas de la quantité de mouvement avec laquelle le gong est frappé.

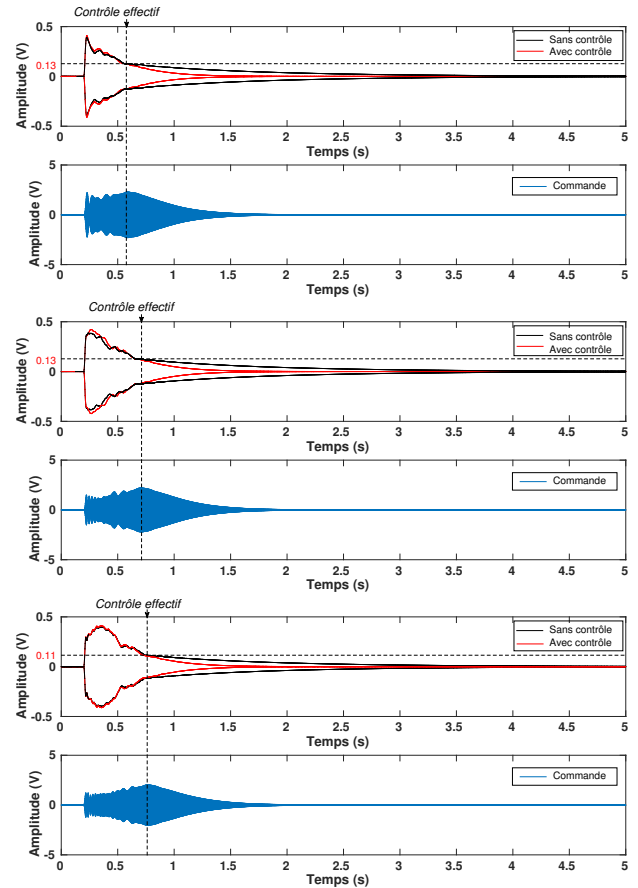


FIGURE 10 – Enveloppe du signal au capteur sans contrôle (en noir) et avec contrôle (en rouge) ainsi que la commande de contrôle (en bleu) pour différentes frappes de quantité de mouvement (de haut en bas) $p = 11 \text{ kg.m.s}^{-1}$, $p = 14 \text{ kg.m.s}^{-1}$, $p = 16 \text{ kg.m.s}^{-1}$.

5.2.2 Simulation

Afin de valider les résultats expérimentaux présentés précédemment, un modèle d'oscillateur de Duffing à un degré de liberté, avec terme quadratique ajouté, a été développé. Sa fréquence est prise égale à 448 Hz, et un contrôleur linéaire imposant un contrôle en amortissement de +400% lui est ajouté. L'équation dynamique de cet oscillateur, sans contrôle, s'écrit :

$$\ddot{x}(t) + 2\xi_0\omega_0\dot{x}(t) + \omega_0^2x(t) + \beta x^2(t) + \Gamma x^3(t) = F \quad (6)$$

où ξ_0 et ω_0 sont le taux d'amortissement et la pulsation propre de l'oscillateur, et β et Γ sont les coefficients non linéaires respectivement quadratique et cubique. L'équation (6) correspond au modèle le plus courant pour modéliser des phénomènes non linéaires issus de non-linéarités géométriques [9]. Le centre du gong est assimilé à une plaque circulaire ; en conséquence $\beta = 0$ [6]. Les paramètres ξ_0 et ω_0 sont identifiés par un algorithme RFP. Le coefficient Γ est déterminé de manière expérimentale en ajustant la courbe reliant la variation de fréquence et la variation d'amplitude maximale (en volts) du mode fondamental (aussi appelée *backbone curve*), obtenue à partir du signal du capteur en régime de fortes amplitudes, à une courbe obtenue de manière analytique par une méthode de perturbation [9]. Cependant, la calibration du capteur n'est pas connue ; aussi le coefficient Γ déterminé par cette méthode ne correspond

pas au Γ structurel du gong, et les résultats de simulation qui suivent sont qualitatifs. Pour indication, la valeur utilisée est : $\Gamma = -1.2 \cdot 10^7$ S.I.

Les réponses temporelles de l'oscillateur de Duffing sont calculées à partir d'un solveur Runge Kutta. En entrée, une excitation "porte" de largeur 10 ms est imposée. Les réponses de l'oscillateur avec et sans contrôle sont présentées sur la Figure 11. Les résultats de la simulation montrent un amortissement de la fréquence issue de la distorsion (ici du troisième ordre, à la fréquence triple de celle du mode fondamental), ainsi qu'une superposition puis séparation des courbes temporelles avec (en rouge) et sans contrôle (en noir) ; ces résultats sont donc qualitativement identiques à ceux obtenus expérimentalement (section 5.2.1). Une comparaison quantitative entre simulation et expérience requiert toutefois la connaissance de la calibration du capteur et des paramètres expérimentaux d'excitation (force et durée d'impact).

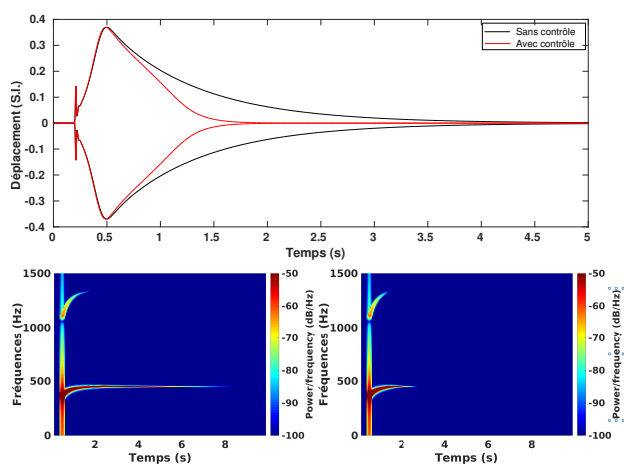


FIGURE 11 – Haut : Enveloppes des signaux de réponse filtrés de l'oscillateur de Duffing non contrôlé (en noir) et contrôlé avec un amortissement de +400% (en rouge). Bas : Spectrogrammes de la réponse de l'oscillateur non contrôlé (gauche) et contrôlé (droite).

6 Conclusion

Cette étude présente un protocole expérimental pour l'application d'un contrôle actif modal linéaire à un instrument de musique présentant des non-linéarités géométriques. Une analyse modale expérimentale de l'instrument permet la mise en oeuvre d'un contrôle modal expérimental en amortissement. Les résultats du contrôle en amortissement en régime de faibles amplitudes montrent un contrôle qualitativement efficace ; les résultats quantitatifs méritent toutefois d'être analysés par des approches complémentaires. Au total, cette étude présente la première application expérimentale d'un contrôle modal linéaire à un instrument de musique non linéaire. Elle démontre, par une étude expérimentale et une étude en simulation, la possibilité de contrôler des fréquences issues de phénomènes non linéaires (distorsion de modes linéaires, résonances internes de modes linéaires) et non contenues dans le modèle d'état du système contrôlé, à partir du contrôle des modes linéaires dont elles sont issues.

7 Remerciements

Nous remercions Alain Terrier pour la conception du système de frappe, Robert Piéchaud et François Beaulier pour le développement de la plateforme COALA, ainsi qu'Arnaud Recher pour l'assistance en électronique.

Références

- [1] S. Benacchio, B. Chomette, A. Mamou-Mani, and V. Finel, Mode tuning of a simplified string instrument using time-dimensionless state-derivative control, *Journal of Sound and Vibration*, **334**, 178–189 (2015)
- [2] N. H. Fletcher, Nonlinear frequency shifts in quasispherical-cap shells : Pitch glide in Chinese gongs, *The Journal of the Acoustical Society of America*, **78**, 6, 2069–2073 (1985)
- [3] N. H. Fletcher and T. D. Rossing, *The Physics of musical instruments*, Springer-Verlag (1998)
- [4] D. G. Luenberger, Observing the state of a linear system, *Military Electronics, IEEE Transactions on*, **8**, 2, 74–80 (1964)
- [5] T. Meurisse, A. Mamou-Mani, S. Benacchio, B. Chomette, V. Finel, D. B. Sharp, and R. Caussé, Experimental Demonstration of the Modification of the Resonances of a Simplified Self-Sustained Wind Instrument Through Modal Active Control, *Acta Acustica*, **101**, 3, 581-593(13) (2015)
- [6] A. H. Nayfeh, D. T. Mook, and D. W. Lobitz, Numerical-perturbation method for the nonlinear analysis of structural vibrations, *AIAA Journal*, **12**, 9, 1222–1228 (1974)
- [7] R. Piéchaud, A Lightweight C++ Framework for Real Time Active Control, *Real Time Linux Workshop* (2014)
- [8] M. H. Richardson, and D. L. Formenti, Parameter estimation from frequency response measurements using rational fraction polynomials, *Proceedings of the International Modal Analysis Conference*, 167–182 (1982)
- [9] O. Thomas, *Analyse et modélisation de vibrations non-linéaires de milieux minces élastiques-Application aux instruments de percussion*, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI ; Telecom ParisTech (2001)
- [10] O. Thomas, C. Touzé and A. Chaigne, Non-linear behaviour of gongs through the dynamics of simple rods systems, *Proc. Int. Symp. Mus. Acoust., Perugia* (2001)
- [11] G-C. Tsai, B-T. Wang, Y-S. Lee, and Z-W. Chang, Study of vibration and sound characteristics of a copper gong, *Journal of the Chinese Institute of Engineers*, **28**, 4, 713–719 (2005)