

CFA/VISHNO 2016

Effet de la raideur périodique d'engrènement sur le comportement vibratoire d'une chaîne cinématique soumise à des fluctuations de couple

P. Garambois, E. Rigaud et J. Perret-Liaudet

LTDS, UMR CNRS 5513, 36 avenue Guy de Collongue, 69134 Ecully Cedex, France
pierre.garambois@ec-lyon.fr



LE MANS

Les systèmes mécaniques qui présentent des transmissions par engrenages sont le siège d'excitations internes qui peuvent déboucher sur un comportement vibro-acoustique gênant pour ses utilisateurs.

Ces excitations peuvent être couplées à des excitations externes associées à des variations de couple des organes amont (moteur) ou aval (récepteur). On cherche à prendre en compte les couplages multi-physiques entre les sources internes et les sources d'excitation externes. Ce type de couplage est la cause d'un enrichissement du contenu de la réponse fréquentielle.

Le but de ce papier est de présenter une méthode d'analyse dynamique de ces couplages. Les phénomènes sont illustrés à travers l'analyse du comportement d'une pompe à vide soumise à une excitation fluidique.

1 Introduction / Contexte industriel

Les systèmes mécaniques qui présentent des transmissions par engrenages sont le siège d'excitations internes qui peuvent déboucher sur un comportement vibro-acoustique gênant pour ses utilisateurs. On retient généralement comme source d'excitation l'*Erreur Statique de Transmission (EST)* $\delta(t)$ qui correspond à une erreur de positionnement de la roue menée par rapport sa position théorique [4]. Cette excitation est due aux déformations élastiques des dents sous l'effet du couple de charge et aux écarts micro-géométriques de l'engrenage (volontaires dans le cas des corrections de dentures et involontaires dans le cas des défauts).

L'EST est à l'origine d'une fluctuation de la raideur d'engrènement $k(t)$ qui constitue une source d'excitation paramétrique. En régime stationnaire, les excitations sont périodiques (fréquence fondamentale = fréquence d'engrènement $f_e = Zf_r$, avec Z le nombre de dents). Elles est à l'origine de surcharges dynamiques sur les dentures qui se transmettent à toutes les composantes de la chaîne cinématique et au carter : l'état vibratoire de ce dernier est à l'origine du bruit de sirènement.

Ces excitations "internes" peuvent être couplées à des excitations externes associées à des variations de couple des organes amont (moteur) ou aval (récepteur). Ces vibrations sont responsables d'un bruit de type solidien : les vibrations de la chaîne cinématique sont transmises au carter, qui rayonne.

Le but de ce papier est de présenter une méthode d'analyse dynamique de ces couplages à travers l'étude de la réponse vibro-acoustique d'une pompe à vide soumise à une excitation fluidique.

La pompe à vide étudiée est composé de deux arbres entraînés par un moteur associé à un engrenage inverseur qui assure un mouvement contra-rotatif (cf. figure 1). Le mécanisme de pompage est assuré par 5 étages de lobes montés sur les deux arbres. La fréquence fondamentale des sources dites "externes" à la transmission par engrenage correspond à la fréquence de rotation f_r). On distingue deux sources :

- les fluctuations de couples "fluidiques" liées au pompage du fluide à chaque étage de piston : $C(t)$,
- les fluctuations éventuelles du couple du moteur : $C_m(t)$.

Dans ce cadre, une méthode dite "spectrale itérative" a été développée [5, 6] pour résoudre efficacement un système d'équations paramétriques. Cette méthode permet de traiter des systèmes à grand nombre de degrés de liberté pour lesquels les excitations présentent un spectre large. Cette méthode a été utilisée pour analyser le comportement

dynamique en sirènement de transmissions par engrenages à axes parallèles mono [4, 2, 1] ou multi-engrènements [3]. Cette méthode a par ailleurs été implémentée dans le cas d'une excitation extérieure aléatoire en présence de termes gyroscopiques [7]. L'objectif est d'utiliser cette méthode en prenant en compte un spectre d'excitations extérieures à l'engrènement (ici les excitations "fluidique" liées au pompage) qui vient se coupler aux excitations paramétriques de l'engrenage.

Dans un premier temps, nous présentons la caractérisation des excitations dues à l'engrenage. Par la suite nous mettons en place les équations d'équilibre dynamique de modèle éléments-finis, dans la base physique puis dans la base modale. Le passage dans le domaine spectral est ensuite explicité, pour enfin présenter le principe de la méthode de résolution et ses atouts.

2 Caractérisation des excitations dues à l'engrenage

Le calcul de l'Erreur Statique de Transmission (EST) d'un engrenage sous une charge F , correspondant à l'effort total s'exerçant sur l'ensemble des couples de dents en prise, est relativement bien maîtrisé [4]. Il s'appuie sur la résolution des équations qui décrivent le contact statique entre les dentures. La figure 2 schématise les excitations liées à l'engrenage.

Pour chaque position angulaire θ de la roue menante, une analyse cinématique du fonctionnement de l'engrenage permet de déterminer les lignes théoriques de contact (lieu des contacts potentiels sur les surfaces des dents en prise dans le plan d'action). Celles-ci sont discrétisées, afin d'introduire une matrice de souplesse \mathbf{H} qui relie les déformations aux efforts appliqués au niveau des points discrets. La matrice \mathbf{H} est calculée à partir d'un calcul préalable des matrices de souplesse des roues dentées par une méthode éléments-finis. Tous les phénomènes physiques qui contribuent à la déformation en flexion des dents chargées doivent être pris en compte. L'influence de l'élasticité du corps de roue et les interactions entre les différents couples de dents présents simultanément dans la zone de contact sont notamment d'autant plus grandes que les corps de roue sont minces [8]. On intègre également les déformations locales de type Hertz dans la matrice \mathbf{H} . Les corrections de denture et les défauts de géométrie sont introduits par l'intermédiaire d'un vecteur \mathbf{e} qui décrit les écarts initiaux séparant les dents. Ce vecteur \mathbf{e} tient également compte des erreurs de parallélisme des roues dentées qui résultent des déformations élasto-statiques de l'ensemble de la transmission. La résolution des équations de contact permet alors d'accéder au rapprochement de corps

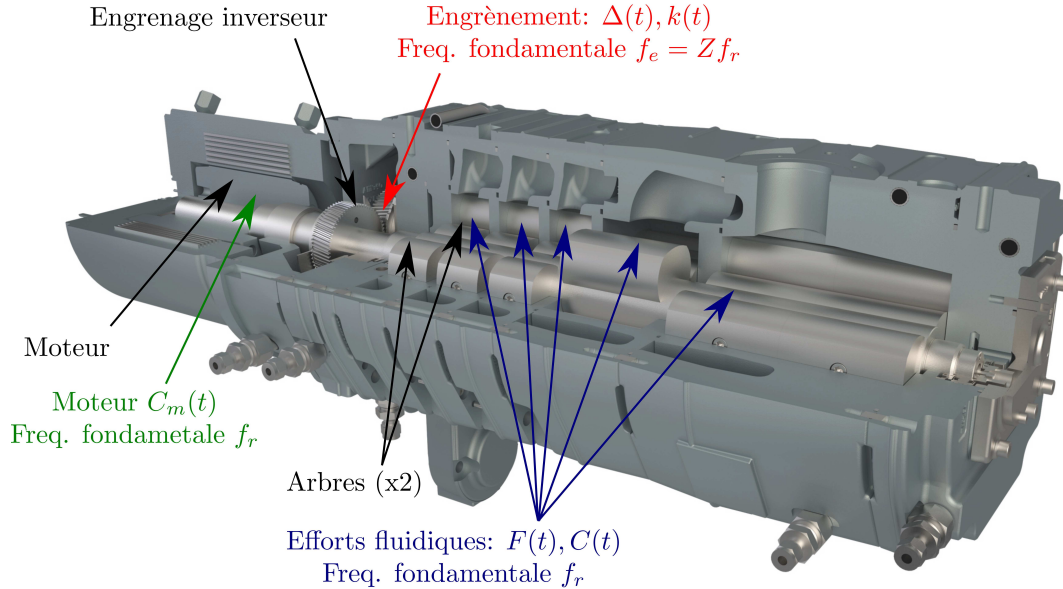


FIGURE 1 – Vue en coupe de la pompe : composants (flèches noires) et excitations (flèche colorées)

rigides global des dents et aux charges réparties \mathbf{P} , pour chacune des positions successives θ . Le système d'équations sous contraintes qui gère les déformations élasto-statiques de l'engrenage et permet de retrouver l'EST $\delta(\theta)$ s'écrit alors :

$$\begin{cases} \mathbf{H.P} = \delta(\theta).\mathbf{1} - \mathbf{e} \\ \mathbf{1}^T.\mathbf{P} = F \end{cases} \quad (1)$$

avec les contraintes :

$$\begin{cases} \mathbf{H.P} + \delta(\theta).\mathbf{1} \geq \mathbf{e} \\ P_i \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

avec $\delta(\theta)$ l'erreur de positionnement de la roue à l'angle θ (rapprochement des corps rigides), \mathbf{H} la matrice de souplesse de la dent, \mathbf{P} la charge répartie sur les lignes de contact des dents en prise et \mathbf{e} les corrections de denture et les défauts de géométrie.

La caractérisation de l'EST permet d'évaluer la raideur d'engrènement et ses fluctuations périodiques qui constituent la seconde source d'excitation paramétrique de la transmission, à partir du calcul de la dérivée par rapport à la force F transmise :

$$k(\theta) = \frac{\partial F}{\partial \delta(\theta)} \quad (3)$$

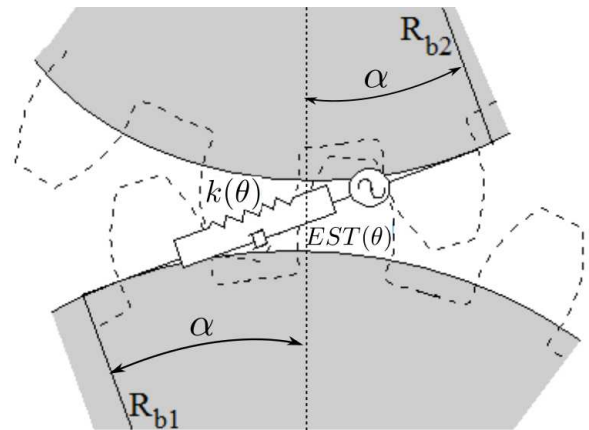
3 Modèle éléments-finis de la pompe et équations dynamiques

3.1 Linéarisation des efforts de denture

L'équation différentielle du mouvement régissant le vecteur de coordonnées généralisées x peut s'acrire :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{f}_{NL}(x, t) = \mathbf{F}_S \quad (4)$$

avec \mathbf{M} la matrice de masse, \mathbf{C} la matrice d'amortissement. Le terme non-linéaire $\mathbf{f}_{NL}(x, t)$ (vectoriel ici) représente l'effort de denture qui dépend des fluctuations de l'EST et



$k(\theta)$: Excitation par la raideur d'engrènement
 $EST(\theta)$: Erreur Statique de Transmission (déplacement)

FIGURE 2 – Engrenage

de la raideur d'engrènement. \mathbf{F}_S constitue l'effort statique transmis par l'engrenage.

La raideur d'engrènement $k(t)$ est définie comme étant :

$$k(t) = \left(\frac{\partial f_{NL}}{\partial x} \right)_{(x_s, t)} \quad (5)$$

L'effort linéarisé $F_L(x, t)$ peut s'écrire en utilisant le développement limité au premier ordre de $f_{NL}(x, t)$ autour de la position d'équilibre x_s :

$$F_L(x, t) \approx f_{NL}(x_s) + \frac{\partial f_{NL}}{\partial x}(x_s, t)(x_L(t) - x_s(t)) = F_S + k(t)(x - x_s(t)) \quad (6)$$

$f_{NL}(x, t)$ étant périodique, $F_L(x, t)$ l'est aussi. En introduisant l'effort linéarisé 6 dans l'équation 4, on peut écrire l'équation différentielle à coefficients paramétriques suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + k(t)\mathbf{x}(t) = k(t)\mathbf{x}_s(t) \quad (7)$$

3.2 Equations matricielles du mouvement dans la base physique

La chaîne cinématique de la pompe (2 arbres) et sa transmission (engrenage inverseur) sont discrétisés par éléments-finis en N degrés de libertés. L'équation matricielle du mouvement gouvernant le vecteur \mathbf{x} des coordonnées généralisées s'écrit formellement :

$$\mathbf{M}_{EF}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_{EF}\mathbf{x} + k(t)\mathbf{R}\mathbf{R}^T\mathbf{x} = k(t)\mathbf{R}\mathbf{R}^T\mathbf{x}_s(t) + \mathbf{F}(t) \quad (8)$$

avec \mathbf{M}_{EF} et \mathbf{K}_{EF} les matrices de masse et de raideur élément-finis et \mathbf{C} la matrice d'amortissement prise en compte a posteriori avec l'hypothèse de Basile. \mathbf{R} un vecteur "structure géométrique" qui permet le passage de l'effort local de denture (1D) reliant les deux arbres aux efforts en pied de pignon et de roue (3D, 12 degrés de libertés dans le cas de noeuds avec 3 déplacements et 3 rotations). On parle aussi de vecteur de couplage, qui lie les degrés de libertés de la roue à ceux du pignon. $k(t)$ est la raideur périodique d'engrènement et $\mathbf{F}(t)$ représentent les efforts extérieurs dépendant du temps (périodiques aussi dans le cas de la pompe). $\mathbf{x}_s(t)$ est un vecteur qui correspond à la réponse statique aux efforts extérieurs statiques. On remarque ici que l'EST s'écrit :

$$\Delta^{(s)}(t) = \mathbf{R}^T\mathbf{x}_s(t) \quad (9)$$

On note également que l'Erreur Dynamique de Transmission (EDT) est représentée par la fonction scalaire suivante :

$$\Delta(t) = \mathbf{R}^T\mathbf{x}(t) \quad (10)$$

On pose :

$$k(t) = \bar{k} + g(t) \quad (11)$$

avec \bar{k} la raideur moyenne d'engrènement et $g(t)$ la fluctuation centrée de la raideur de l'engrènement. On peut ainsi introduire une matrice \mathbf{K}_{AV} qui correspond à la matrice de raideur totale moyennée en temps :

$$\mathbf{K}_{AV} = \mathbf{K}_{EF} + \bar{k}\mathbf{R}\mathbf{R}^T \quad (12)$$

On peut ainsi retenir l'équation matricielle sous la forme suivante :

$$\mathbf{M}_{EF}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_{AV}\mathbf{x} + g(t)\mathbf{R}\mathbf{R}^T\mathbf{x} = k(t)\mathbf{R}\Delta^{(s)}(t) + \mathbf{F}\gamma(t) \quad (13)$$

avec \mathbf{F} le vecteur position de l'excitation extérieure $\mathbf{F}(t)$ et $\gamma(t)$ sa partie temporelle.

3.3 Equations dans la base modale

Il s'agit ici d'étendre la solution sur la base modale déterminée à partir des caractéristiques moyennes du système. Cette base modale ne permet cependant pas de découpler les excitations paramétriques. Le calcul modal est réalisé à partir des matrices éléments-finis \mathbf{M}_{EF} et \mathbf{K}_{AV} . Il conduit aux pulsations propres ω_k et aux vecteurs propres \mathbf{V}_k associés choisis normés par rapport à la masse :

$$\mathbf{B} = [\mathbf{V}_k], \omega_k \quad (14)$$

tels que :

$$\mathbf{B}^{(-1)}\mathbf{M}_{EF}\mathbf{B} = \mathbf{I} \quad (15)$$

On peut ainsi poser :

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{q} \quad (16)$$

avec \mathbf{q} le vecteur de coordonnées modales.

L'équation 13 peut ainsi s'écrire :

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{M}_{EF}\mathbf{B}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{K}_{AV}\mathbf{B}\mathbf{q} + g(t)\mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{R}^T\mathbf{B}\mathbf{q} = k(t)\mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}\Delta^{(s)}(t) + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{F}\gamma(t) \quad (17)$$

Les propriétés de symétrisation des modes propres nous permettent ainsi de dire :

$$\text{diag}[1]\ddot{\mathbf{q}} + \text{diag}[2\zeta_k\omega_k]\dot{\mathbf{q}} + \text{diag}[\omega_k^2]\mathbf{q} + g(t)\mathbf{r}\mathbf{r}^T\mathbf{q} = k(t)\mathbf{r}\Delta^{(s)}(t) + \boldsymbol{\phi}\gamma(t) \quad (18)$$

avec $\mathbf{r} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}$ le vecteur structure géométrique projeté dans la base modale, et $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{F}$ la projection dans la base modale du vecteur position des efforts extérieurs fluctuants. Les équations du système couplées (par les excitations paramétriques) du système 18 s'écrivent sous la forme indicelle suivante :

$$\ddot{q}_k + 2\zeta_k\omega_k\dot{q}_k + \omega_k^2q_k + g(t)r_k \sum_{l=1}^N r_l q_l = k(t)r_k\Delta^{(s)}(t) + \phi_k\gamma(t) \quad (19)$$

4 Equations dans le domaine spectral

Le premier principe de méthode spectrale itérative est de résoudre les équations couplées 19 dans le domaine spectral, en ne retenant que les équations stationnaires (réponse forcée) du système. En effet, la réponse libre est soit une exponentielle décroissante (stabilité asymptotique) soit une exponentielle croissante en cas d'instabilités paramétriques. On suppose que l'amortissement est suffisant pour se situer hors de ces régions d'instabilités paramétriques. La transformée de Fourier des équations couplées sous forme indicelle 19 donne :

$$H_k^{-1}(\omega)Q_k(\omega) + G(\omega)r_k \otimes \sum_{l=1}^N r_l Q_l(\omega) = K(\omega) \otimes r_k E^{(s)}(\omega) + \phi_k\Gamma(\omega) \quad (20)$$

ou bien :

$$Q_k(\omega) + H_k(\omega)G(\omega)r_k \otimes \sum_{l=1}^N r_l Q_l(\omega) = H_k(\omega)K(\omega) \otimes r_k E^{(s)}(\omega) + H_k(\omega)\phi_k\Gamma(\omega) \quad (21)$$

avec

$$H_k(\omega) = \frac{1}{\omega_k^2 - \omega^2 + 2i\zeta_k\omega_k\omega} \quad (22)$$

et $Q(\omega)$, $G(\omega)$, $K(\omega)$ et $E^{(s)}(\omega)$ respectivement les transformées de Fourier de $q_k(t)$, $g(t)$, $k(t)$ et $\Delta^{(s)}(t)$, et enfin \otimes le produit de convolution.

Le second principe de cette méthode est de condenser les N équations couplées selon la ligne d'action de l'engrènement, pour expliciter l'erreur dynamique de transmission $E(\omega)$. Le système d'équations couplées 21 est

ainsi ramené à une seule équation :

$$\sum_{k=1}^N r_k Q_k(\omega) + \sum_{k=1}^N r_k H_k(\omega) G(\omega) r_k \otimes \sum_{l=1}^N r_l Q_l(\omega) = \sum_{k=1}^N r_k H_k(\omega) K(\omega) \otimes r_k E^{(s)}(\omega) + \sum_{k=1}^N r_k H_k(\omega) \phi_k \Gamma(\omega) \quad (23)$$

On définit l'erreur dynamique dans le domaine spectral :

$$E(\omega) = \sum_{l=1}^N r_l Q_l(\omega) \quad (24)$$

On obtient ainsi :

$$E(\omega) + \sum_{k=1}^N r_k H_k(\omega) G(\omega) r_k \otimes E(\omega) = \sum_{k=1}^N r_k H_k(\omega) K(\omega) \otimes r_k E^{(s)}(\omega) + \sum_{k=1}^N r_k H_k(\omega) \phi_k \Gamma(\omega) \quad (25)$$

Par souci de simplification, on pose :

$$S(\omega) = \sum_{k=1}^N r_k^2 H_k(\omega) K(\omega) \otimes E^{(s)}(\omega) \quad (26)$$

$$W(\omega) = \sum_{k=1}^N r_k H_k(\omega) \phi_k \Gamma(\omega) \quad (27)$$

On introduit la fonction scalaire suivante :

$$T(\omega) = \sum_{k=1}^N r_k^2 H_k(\omega) \quad (28)$$

Ainsi, on peut réécrire :

$$S(\omega) = T(\omega) K(\omega) \otimes E^{(s)}(\omega) \quad (29)$$

On obtient finalement l'équation scalaire suivante :

$$E(\omega) + T(\omega) [G \otimes E](\omega) = S(\omega) + W(\omega) \quad (30)$$

5 Principe de résolution

Le troisième principe de la méthode spectrale itérative consiste à itérer selon le schéma suivant à l'étape $n + 1$:

$$E^{(n+1)}(\omega) = S(\omega) + W(\omega) - T(\omega) [G \otimes E^{(n)}](\omega) \quad (31)$$

avec la condition initiale suivant :

$$E^{(1)}(\omega) = S(\omega) + W(\omega) \quad (32)$$

Le critère d'arrêt est basé sur l'écart relatif entre deux itérations qui est comparé à un réel très petit $\epsilon \ll 1$ (par exemple $\epsilon = 10^{-6}$) :

$$\frac{E^{(n+1)}(\omega) - E^{(n)}(\omega)}{E^{(n+1)}(\omega)} < \epsilon \quad (33)$$

On impose également un autre critère d'arrêt. Lorsqu'un nombre maximum retenu d'itérations N_{MAX} a été réalisé, la non-convergence du calcul itératif est décrétée. Par expérience, cette dernière situation résulte d'une instabilité paramétrique associée à la réponse libre du système et n'est pas imputable au schéma itératif. Il convient alors d'augmenter l'amortissement visqueux équivalent des modes incriminés.

6 Erreur dynamique de transmission, surcharge de denture et réponse dynamique des différents degrés de liberté

L'équation 30 ainsi que les schéma itératif des équations 31 et 32 fournissent de manière direct l'erreur dynamique de transmission sur l'engrènement. La surcharge dynamique de denture associée $f_D(t)$ s'écrivent :

$$f_D(t) = k(t) \mathbf{R}^T \mathbf{x}(t) - k(t) \mathbf{R}^T \mathbf{x}_s(t) \quad (34)$$

Soit dans le domaine fréquentiel :

$$F_D(\omega) = [K \otimes E](\omega) - [K \otimes E^{(s)}](\omega) \quad (35)$$

Pour restituer la réponse d'un degré de liberté $X_i(\omega)$ du système, il faut revenir à la base physique par la matrice \mathbf{B}^{-1} composée des vecteurs propres V_i du système (cf. équation 16), et utiliser l'équation 21, ce qui donne :

$$Q_k(\omega) = H_k(\omega) \left[r_k [K \otimes E^{(s)} - G \otimes E](\omega) + \phi_k \Gamma(\omega) \right] \quad (36)$$

On peut ainsi passer dans la base physique en écrivant le déplacement du degré de liberté i de la façon suivante :

$$X_i(\omega) = \sum_{k=1}^N V_{ik} H_k(\omega) \left[r_k [K \otimes E^{(s)} - G \otimes E](\omega) + \phi_k \Gamma(\omega) \right] \quad (37)$$

7 Conclusion

Cet article présente la mise en équation d'un problème de vibro-acoustique couplant une excitation interne d'origine paramétrique à des excitations externes variables dans le temps. On se place dans le cas particulier de l'étude d'une pompe à vide (ici dues au pompage du fluide). La méthode de résolution présentée est une méthode spectrale itérative caractérisée par :

- un passage dans la base modale du système déterminée à partir des caractéristiques moyennes du système dans le temps
- un passage dans le domaine spectral et une résolution dans le domaine stationnaire (dents en contact permanent)
- une projection des équations par le vecteur structure géométrique de l'engrenage dans la base modale qui permet de passer d'un système de N équations à une seule équation
- un schéma itératif simple

Cette méthode permet ainsi une résolution rapide dans le domaine fréquentiel et permet d'analyser les couplages entre les excitations hautes fréquences dues à la transmission par engrenage et les excitations basses fréquences générées par les efforts fluidiques au niveau des différents étages de la pompe.

Remerciements

Les auteurs, membres du LabCom LADAGE (Laboratoire de Dynamique des engrenAGES) et du

Labex CeLyA (Centre Acoustique Lyonnais), remercie PFEIFFER VACUUM, VIBRATEC et INOPRO pour leur soutien dans le cadre du projet ARPE (Acoustique et vibration des Pompes à vide, FUI AAP 19).

Références

- [1] A. Carbonelli, E. Rigaud, J. Perret-Liaudet, Vibro-Acoustic Analysis of Geared Systems—Predicting and Controlling the Whining Noise, *Automotive NVH Technology*, Editors Fuchs A., Nijman E., Pribsch H-H., 429-434 (2016).
- [2] J. Perret-Liaudet, A. Carbonelli, E. Rigaud, B. Nelain, P. Bouvet, J.Vialonga, Modeling of Gearbox Whining Noise, *SAE Technical Paper*, 2014-01-2090 (2014).
- [3] A. Carbonelli, Caractérisation vibroacoustique d'une cascade de distribution poids lourd, *Thèse de doctorat de l'Ecole Centrale de Lyon*, 2012-34, Mécanique, (2012).
- [4] E. Rigaud, Interactions dynamiques entre denture, lignes d'arbres, roulements et carter dans les transmissions par engrenages, *Thèse de doctorat de l'Ecole Centrale de Lyon*, 28/04/1998, N.98-18, (1998).
- [5] J. Perret-Liaudet, Etude des mécanismes de transfert entre l'erreur de transmission et la réponse dynamique des boîtes de vitesses d'automobile Thèse de doctorat de l'Ecole Centrale de Lyon (1992).
- [6] J. Perret-Liaudet, An original method for computing the response of a parametrically excited forced system, *Journal of Sound and Vibration* **192(2)**, 165-177 (1996).
- [7] L. Bachelet, N. Driot, J. Perret-Liaudet, A Spectral Method for Describing the Response of a Parametrically Excited System Under External Random Excitation, *J. Comput. Nonlinear Dynam* **3(1)**, 011008 (Nov 26, 2007) (2007).
- [8] E. Rigaud, D. Barday, Modelling and analysis of static transmission error. Effect of wheel body deformation and interactions between adjacent loaded teeth, *4th World Congress on Gearing and Power Transmission, Paris, 16/03-18/03/1999* **Vol.3**, 1961-1972, 16/03-18/03/1999 (1999).