

CFA/VISHNO 2016

**Transformation géométrique locale et méthode modale
pour la diffusion d'ondes par une surface rigide non plane**S. Félix^a, A. Maurel^b et J.-F. Mercier^c^aLAUM, Avenue Olivier Messiaen, 72085 Le Mans, France^bInstitut Langevin, CNRS, ESPCI ParisTech, 1 rue de Jussieu, 75005 Paris, France^cPoems, CNRS, ENSTA, INRIA, 828 boulevard des Maréchaux, 91762 Palaiseau,
France

simon.felix@univ-lemans.fr



LE MANS

On présente une méthode modale efficace pour la résolution de la diffusion d'une onde par une surface non plane (grating ou extrémité de guide). La méthode proposée repose sur l'utilisation d'une transformation géométrique par laquelle la surface irrégulière est ramenée à une surface rigide plane, de sorte que l'hypothèse de Rayleigh, généralement utilisée dans ces problèmes, n'est plus nécessaire. En outre, la transformation géométrique n'affecte qu'une zone localisée de l'espace et s'adapte parfaitement, par construction, à l'espace extérieur non transformé, ce qui permet d'écrire simplement les conditions de rayonnement et d'onde incidente. Enfin, cette zone transformée, où une résolution numérique est nécessaire, peut être limitée à l'épaisseur de la frontière non plane. La formulation proposée et sa résolution numérique sont efficaces dans le sens où la réciprocity et la conservation de l'énergie sont respectées, et la convergence rapide. Une analyse de la convergence avec la régularité de la surface non plane est réalisée.

1 Introduction

La présente communication reprend, en le résumant, un article publié par les auteurs dans le *Journal of the Optical Society of America A* [1]. Le lecteur pourra s'y référer pour plus de détails.

2 Transformation géométrique locale, formulation multimodale

On souhaite résoudre le problème de la diffusion d'une onde par une paroi rigide non plane. Cette paroi est décrite dans l'espace réel (X, Y) par une fonction périodique $Y = f(X)$, de période d (Fig. 1). L'onde incidente est une onde plane, de nombre d'onde k et le vecteur d'onde forme un angle θ avec l'axe Y . La dépendance harmonique en temps est $e^{-j\omega t}$, et elle sera omise dans la suite.

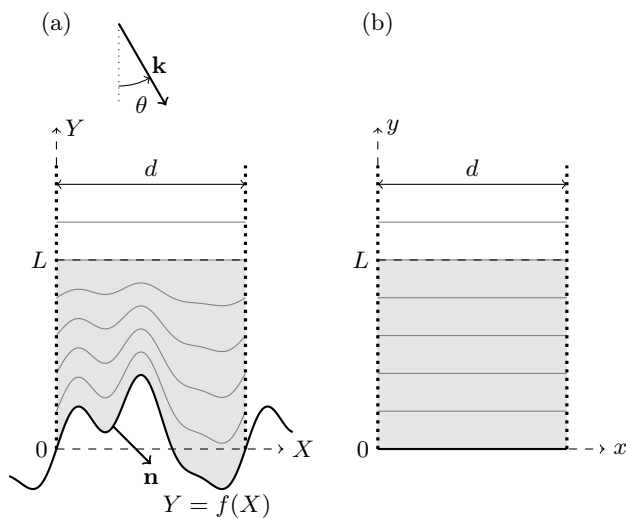


FIGURE 1 – (a) Paroi irrégulière dans l'espace réel (X, Y) . (b) Espace transformé.

2.1 Transformation géométrique

Le champ de pression dans le demi-espace $Y \geq f(X)$ est solution de l'équation d'onde

$$(\Delta + k^2)p = 0, \quad (1)$$

avec les conditions aux limites pseudo-périodiques

$$p(d, Y) = e^{j\beta d} p(0, Y), \quad (2a)$$

$$\partial_X p(d, Y) = e^{j\beta d} \partial_X p(0, Y), \quad (2b)$$

où $\beta \equiv k \sin \theta$, et la condition de Neumann

$$\mathbf{n} \cdot \nabla p = \partial_Y p - f' \partial_X p = 0 \quad (3)$$

sur la paroi $Y = f(X)$.

Remarquons qu'il serait également possible d'imposer sur la paroi une condition de Dirichlet, afin de résoudre, par exemple, la diffusion d'une onde électromagnétique polarisée TE par une paroi parfaitement conductrice [1]. De la même manière, les conditions pseudo-périodiques (2) en $X = 0, d$ pourraient être remplacées par des conditions de Neumann ou Dirichlet, afin de résoudre la réflexion d'une onde à l'extrémité fermée, non plane, d'un guide.

On définit alors un nouveau système de coordonnées, (x, y) , déduit des coordonnées (X, Y) de l'espace réel par les relations

$$\begin{aligned} x &\equiv X, \\ y &\equiv \begin{cases} \frac{Y - f(X)}{L - f(X)}, & f(X) \leq Y \leq L, \\ Y, & Y > L. \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

Cette transformation est locale, au sens où l'espace virtuel (transformé) et l'espace réel coïncident pour $Y > L$; cette propriété est importante pour la formulation de la condition de rayonnement, et également parce que la résolution numérique du problème se limitera à la région $y \in [0, L]$, le champ pouvant être calculé algébriquement dans la zone non transformée ($y > L$).

2.2 Équation d'onde modifiée et conditions aux limites

Par ce changement de variable, on se ramène donc, dans l'espace transformé (x, y) , à une paroi plane. La complexité géométrique apparaît désormais dans l'équation d'onde, qui devient

$$\nabla \cdot (\mathbf{H} \nabla p) + k^2 h p = 0, \quad (5)$$

où les facteurs matriciel et scalaire \mathbf{H} et h se déduisent aisément du Jacobien de la transformation $(X, Y) \rightarrow (x, y)$:

$$\mathbf{H} = \frac{^T \mathbf{J} \mathbf{J}}{\det \mathbf{J}} = \begin{pmatrix} b & -a \\ -a & (1 + a^2)/b \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$h = \frac{1}{\det \mathbf{J}} = \frac{1}{b}, \quad (7)$$

avec

$$a(x, y) \equiv f'(x) \frac{L - y}{L}, \quad b(x) \equiv \frac{L - f(x)}{L}. \quad (8)$$

Il vient ainsi

$$\partial_x (b\partial_x p - a\partial_y p) + \partial_y (-a\partial_x p + (1+a^2)/b\partial_y p) + k^2 b p = 0, \quad (9)$$

qu'on reformule en un système couplé d'équations d'évolution du premier ordre en introduisant la variable

$$q \equiv -a\partial_x p + \frac{(1+a^2)}{b}\partial_y p, \quad (10)$$

de sorte que

$$\begin{cases} \partial_y p = \frac{ab}{1+a^2}\partial_x p + \frac{b}{1+a^2}q, \\ \partial_y q = -bk^2 p - \partial_x \left(\frac{b}{1+a^2}\partial_x p \right) + \partial_x \left(\frac{ab}{1+a^2}q \right). \end{cases} \quad (11)$$

Les conditions aux limites (2-3) s'écrivent, dans le système (x, y) ,

$$p(d, y) = e^{i\beta d} p(0, y), \quad (12a)$$

$$\left[\partial_x p - \frac{a}{b}\partial_y p \right]_{x=d} = e^{i\beta d} \left[\partial_x p - \frac{a}{b}\partial_y p \right]_{x=0}, \quad (12b)$$

et

$$q(x, 0) = 0. \quad (13)$$

2.3 Formulation multimodale

Les champs $p(x, y)$ et $q(x, y)$ sont maintenant développés en séries infinies :

$$\begin{cases} p(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n(y)\varphi_n(x), \\ q(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q_n(y)\varphi_n(x), \end{cases} \quad (14)$$

où les fonctions

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{d}} e^{i(\beta+2n\pi/d)x} \quad (15)$$

sont les classiques modes de Floquet satisfaisant les conditions de pseudo-périodicité. Notons que le cas d'une onde se propageant dans un guide (cf. supra) peut se traiter de la même manière en prenant la base appropriée de modes φ_n , en l'occurrence, des cosinus (Neumann) ou sinus (Dirichlet) [2]. Les propriétés communes à ces différentes bases sont les relations d'orthogonalité

$$(\varphi_m, \varphi_n) = \delta_{mn} \quad \text{et} \quad (\varphi'_m, \varphi'_n) = \gamma_n^2 \delta_{mn}, \quad (16)$$

avec $(f, g) = \int_0^d dx \bar{f}g$ le produit scalaire et \bar{f} le complexe conjugué de f . Dans le cas périodique, $\gamma_n = \beta + 2n\pi/d$, $n \in \mathbb{Z}$.

Rappelons enfin qu'avec cette transformation, comme avec les transformations proposées dans [3, 4, 5], la surface rigide coïncide avec $y = 0$, donc la question de l'hypothèse de Rayleigh ne se pose pas ici.

La projection des équations (11) sur la base $\{\varphi_n\}$ donne un système d'équations couplées du premier ordre pour les composantes modales $\mathbf{p} \equiv (p_n)$ et $\mathbf{q} \equiv (q_n)$:

$$\frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}(y) & \mathbf{B}(y) \\ -k^2 \mathbf{B}(L) + \mathbf{C}(y) & -\mathbf{A}^*(y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

où

$$\mathbf{A}_{mn} = \int_0^d dx \frac{ab}{1+a^2} \overline{\varphi_m} \varphi'_n, \quad (18a)$$

$$\mathbf{B}_{mn} = \int_0^d dx \frac{b}{1+a^2} \overline{\varphi_m} \varphi_n, \quad (18b)$$

$$\mathbf{C}_{mn} = \int_0^d dx \frac{b}{1+a^2} \overline{\varphi'_m} \varphi'_n. \quad (18c)$$

En utilisant les modes de Floquet (15), \mathbf{C} s'écrit simplement $\mathbf{C} = -\Gamma \mathbf{B} \Gamma$, avec Γ la matrice diagonale donnée par $\Gamma_m = j\gamma_m$.

3 Résultats

La figure 2 montre quatre exemples de champs résultant de la réflexion par une surface irrégulière d'une onde plane en incidence normale ou oblique. Une condition de vitesse normale nulle (Neumann) ou de pression nulle (Dirichlet) est imposée sur cette paroi, et la fréquence de l'onde incidente est telle que la longueur d'onde est de l'ordre de grandeur des irrégularités (a-b), grande devant ces irrégularités (c) ou contraire petite (d). On peut voir notamment, sur la figure 2-b le pattern typique correspondant à l'anomalie de Wood ([6], Ch. 8).

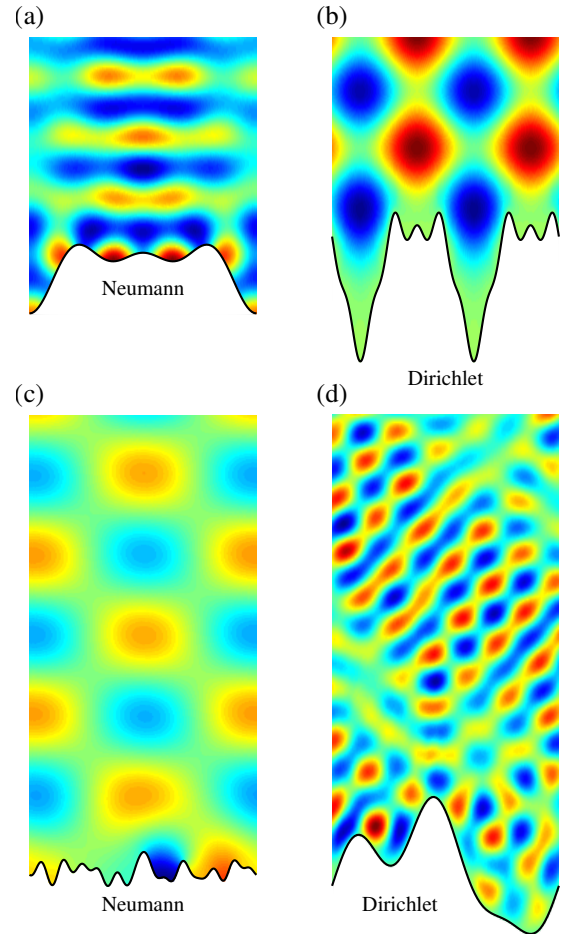


FIGURE 2 – Exemples de champs (partie réelle) résultant de la réflexion d'une onde plane en incidence normale (a-b) ou oblique (c-d) par une surface irrégulière.

Si la fonction $f(X)$ est infiniment dérivable, alors les coefficients dans l'équation (9) le sont aussi, donc les champs p et q également. Les fonctions transverses étant par ailleurs adaptées, pseudo-périodiques ainsi que toutes leurs dérivées, on prévoit donc - et on vérifie - que les coefficients modaux $|p_n|$ décroissent exponentiellement avec n . Le champ p converge donc lui-même exponentiellement avec le nombre de modes pris en compte. Si la fonction $f(X)$ a une de ses dérivées discontinue, la convergence exponentielle est bien sûr perdue et suit alors une loi de puissance en $N^{-\alpha}$, α étant lié à la régularité de f . La méthode proposée reste toutefois applicable (Fig. 3).

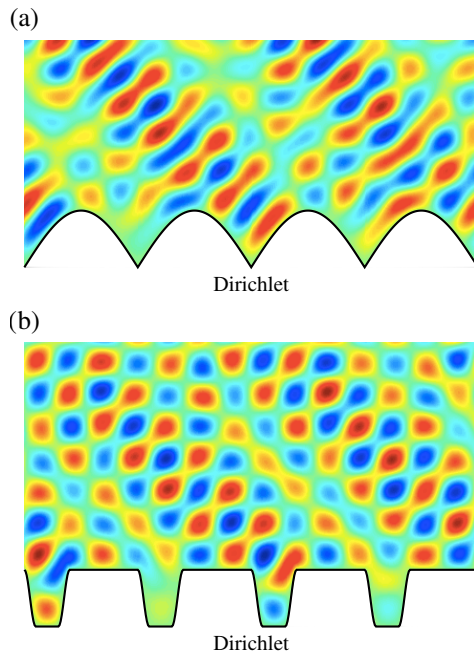


FIGURE 3 – Réflexion d'une onde plane en incidence oblique ($\pi/4$) sur une paroi donc le profil $f(X)$ a une dérivée première (a) ou deuxième (b) discontinue.

La figure 4, enfin, montre l'indépendance du champ calculé avec le paramètre arbitraire L (Fig. 1), qui peut donc être réduit à sa valeur minimale, $\max(f)$. Le champ extérieur ($Y > L$) peut être calculée algébriquement, sans transformation géométrique ni résolution itérative de l'équation d'évolution (17).

4 Conclusion

La méthode proposée, validée par comparaison avec des calculs par éléments finis [1], présente notamment les avantages suivants : (i) elle préserve les propriétés de conservation de l'énergie et de réciprocité, (ii) la région transformée, où une résolution numérique est nécessaire, peut être limitée à l'épaisseur de la frontière non plane, (iii) la convergence de la méthode est exponentielle, soit la convergence la plus rapide attendue. Par ailleurs, cette formulation présente l'avantage de permettre le développement de solutions analytiques approchées dans le cas de perturbations faibles [7]. Enfin, cette méthode est aisément transposable au cas d'un guide d'onde, 2D ou 3D, avec une extrémité fermée non plane.

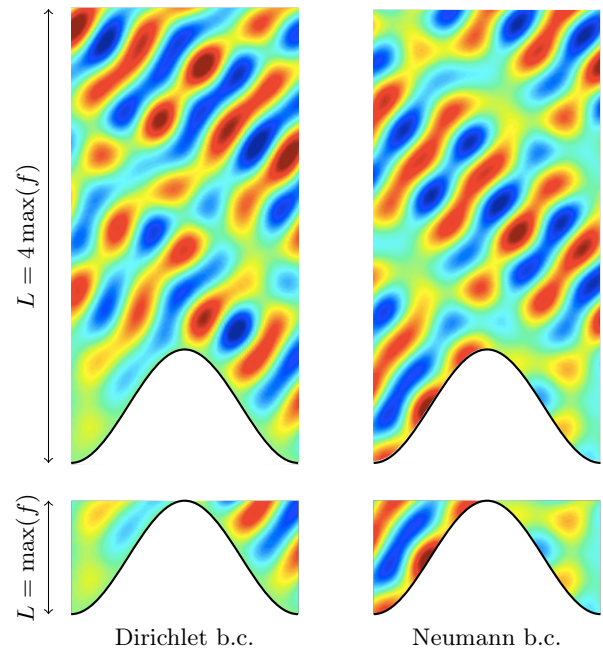


FIGURE 4 – Comparaison des champs calculés avec $L = 4 \max(f)$ (en haut) et $L = \max(f)$ (en bas).

Références

- [1] S. Félix, A. Maurel, et J.-F. Mercier, Local transformation leading to an efficient Fourier modal method for perfectly conducting gratings, *J. Opt. Soc. Am. A* **31**, 2249 (2014).
- [2] A. Maurel, J.-F. Mercier, et S. Félix, Wave propagation through penetrable scatterers in a waveguide and through a penetrable grating, *J. Acoust. Soc. Am.* **135**, 165 (2014).
- [3] J. Chandezon, G. Raoult, et D. Maistre, A new theoretical method for diffraction gratings and its numerical application, *J. Opt.* **72**, 235 (1980).
- [4] J. Chandezon, M. T. Dupuis, G. Cornet, et D. Maistre, Multi-coated gratings : a differential formalism applicable in the entire optical region, *J. Opt. Soc. Am.* **72**, 839 (1982).
- [5] A. A. Shcherbakov et A. V. Tischchenko, Efficient curvilinear coordinate method for grating diffraction simulation, *Opt. Express* **21**, 25236 (2013).
- [6] E. G. Loewen et E. Popov, *Diffraction Gratings and Applications*, CRC Press (1997).
- [7] A. Maurel, S. Félix, J.-M. Mercier, A. Ourir, et Z. E. Djeflal, Wood's anomalies for arrays of dielectric scatterers, *J. Eur. Opt. Soc.* **9**, 14001 (2014).