

CFA/VISHNO 2016

Propagation dans un guide d'ondes contenant des inclusions rigides circulairesS. Félix^a, A. Maurel^b et J.-F. Mercier^c^aLAUM, Avenue Olivier Messiaen, 72085 Le Mans, France^bInstitut Langevin, CNRS, ESPCI ParisTech, 1 rue de Jussieu, 75005 Paris, France^cPoems, CNRS, ENSTA, INRIA, 828 boulevard des Maréchaux, 91762 Palaiseau, France

simon.felix@univ-lemans.fr



LE MANS

On présente une méthode de résolution de la propagation dans un guide d'ondes contenant des inclusions rigides circulaires, cette géométrie pouvant être utilisée comme problème canonique dans plusieurs contextes : guide corrugué, cristaux phononiques, gaz de Lorentz... La méthode proposée repose dans un premier temps sur l'usage d'une transformation géométrique adaptée, par laquelle le guide, de géométrie complexe, est ramené à un guide droit dans l'espace transformé. La complexité géométrique du problème original se traduit alors par une équation d'onde modifiée. Dans un deuxième temps, une formulation multimodale améliorée (A. Maurel, J.-F. Mercier, S. Félix, *Proc. R. Soc. A* **470**, 20130743, 2014) est utilisée pour résoudre l'équation d'onde, qui améliore la précision et la convergence des méthodes multimodales usuelles. Plusieurs exemples de résultats sont enfin présentés, qui montrent notamment la possibilité de considérer des cas avec une forte densité de diffuseurs circulaires.

1 Introduction

La présente communication reprend, en le résumant, un article publié par les auteurs dans le *Journal of the Acoustical Society of America* [1]. Le lecteur pourra s'y référer pour plus de détails.

Dans une précédente publication [2], nous avons proposé une formulation multimodale de la propagation d'ondes dans un guide 2D de géométrie quelconque. Cette méthode repose sur l'usage d'une transformation géométrique adaptée, par laquelle le guide est ramené à un guide droit dans l'espace transformé. La complexité géométrique du problème original se traduit alors par une équation d'onde modifiée. Enfin, une formulation multimodale de ce problème modifié est établie, et l'utilisation de modes supplémentaires permet d'améliorer la précision et la convergence de la méthode par rapports aux formulations multimodales usuelles.

Nous nous intéressons ici à une classe particulière de guides d'ondes, présentant des inclusions rigides circulaires, comme problème canonique de plusieurs situations d'intérêt, tels des réseaux carrés ou hexagonaux de diffuseurs rigides (Fig. 1-a), des guides corrugués (Fig. 1-b), ou des guides ou gaz de Lorentz (Fig. 1-c).

La difficulté avec ce type de géométrie (Fig. 2) est que la transformation usuelle $Y \rightarrow y \equiv Y/a(X)$ dans un guide de section variable n'est plus applicable, puisque la géométrie n'est plus simplement décrite par une largeur locale $a(X)$. Même dans le cas limite d'une inclusion semi-circulaire, ou cette description reste possible, l'équation d'onde transformée fait apparaître des termes en a' , et a' est localement infinie. Cependant, le choix de la transformation géométrique n'est pas unique, notamment parce qu'il est possible de définir pour le guide un axe arbitraire, droit ou de courbure variable, pour le guide [2]. C'est ainsi qu'une transformation pour le guide avec inclusion circulaire peut-être définie, qui introduit une largeur locale $a(x)$ non multivaluée et dont la dérivée reste finie.

2 Transformation géométrique, formulation multimodale améliorée

Le problème général d'un guide uniforme avec une inclusion circulaire d'arc quelconque est représenté sur la figure 2. Dans le domaine fréquentiel (la dépendance temporelle en $\exp(-j\omega t)$ est implicite dans la suite), on souhaite résoudre l'équation de Helmholtz

$$(\Delta + k^2)p = 0, \quad (1)$$

avec la condition de Neumann

$$\mathbf{N} \cdot \nabla p = 0 \text{ sur } \mathbf{C}_{1,2}, \quad (2)$$

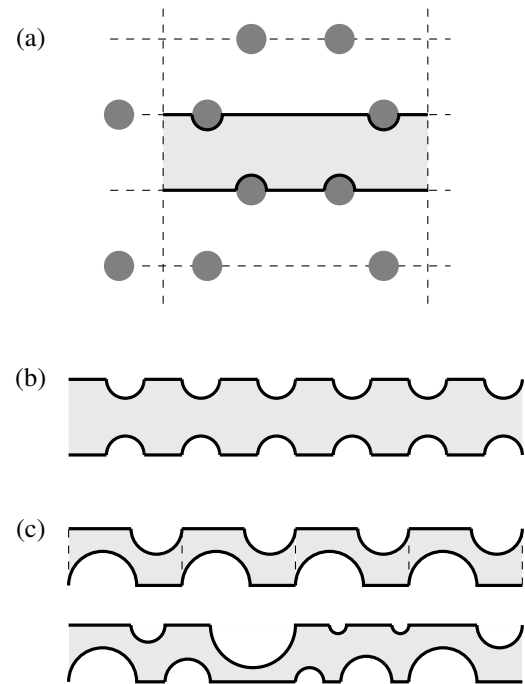


FIGURE 1 – Exemples de guides d'ondes avec des inclusions circulaires. (a) Compte tenu des symétries du problème, une cellule rectangulaire avec des frontières rigides et des inclusions semi-circulaires est utilisée pour modéliser la propagation dans un réseau hexagonal de diffuseurs (source : Perrot *et coll.* [3]). (b) Guide corrugué (source : Tonon *et coll.* [4]). (c) Guides de Lorentz périodique et désordonné (source : Dittrich *et coll.* [5]).

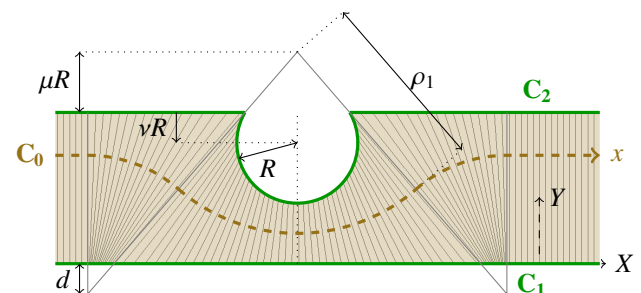


FIGURE 2 – Guide d'ondes uniforme contenant une inclusion circulaire rigide. Changement de coordonnées $(X, Y) \rightarrow (x, y)$ et notations.

où \mathbf{N} est la normale à la paroi et $k = \omega/c$ le nombre d'onde. La première étape dans la résolution de ce problème est le choix d'une transformation géométrique adaptée, par laquelle les parois $\mathbf{C}_{1,2}$ sont décrites simplement dans le nouveau système de coordonnées, typiquement, par une équation $y = \text{constante}$.

2.1 Transformation géométrique

Pour ce faire, on définit tout d'abord un axe pour ce guide d'onde. \mathbf{O} étant un point de référence, arbitraire, cette courbe, \mathbf{C}_0 , est décrite par la fonction $\mathbf{OS}_0(x)$, où x est l'abscisse curviligne mesurée le long de \mathbf{C}_0 depuis un point donné. Une fois défini l'axe du guide, les parois peuvent être paramétrées :

$$\mathbf{OS}_{1,2}(x) = \mathbf{OS}_0(x) + a_{1,2}(x)\mathbf{n}(x), \quad (3)$$

où \mathbf{n} est la vecteur normal du repère de Serret-Frenet (\mathbf{t}, \mathbf{n}) :

$$\frac{d\mathbf{OS}_0}{dx} = \mathbf{t}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{dx} = -\kappa(x)\mathbf{t}, \quad (4)$$

et $\kappa(x)$ la courbure locale de l'axe. \mathbf{M} étant un point du guide, on définit alors le changement de variables $(X, Y) \rightarrow (x, y)$:

$$\mathbf{OM} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} = \mathbf{OS}_0(x) + b(x, y)\mathbf{n}, \quad (5)$$

avec $b(x, y) = a_1(x) + ya(x)$, $a(x) = a_2(x) - a_1(x)$ la largeur locale du guide, et y la coordonnée transverse dans le guide, variant de 0 (paroi \mathbf{C}_1) à 1 (paroi \mathbf{C}_2). Par ce changement de variables, on se ramène donc, dans l'espace transformé (x, y) , à un guide cylindrique de largeur unité. La complexité géométrique apparaît désormais dans l'équation d'évolution et les conditions aux limites, qui s'écrivent

$$\nabla \cdot (\mathbf{H}\nabla p) + k^2 hp = 0, \quad (6)$$

$$\mathbf{H}\nabla p|_{y=0,1} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (7)$$

où les facteurs matriciel et scalaire \mathbf{H} et h se déduisent aisément du Jacobien \mathbf{J} de la transformation $(X, Y) \rightarrow (x, y)$:

$$\mathbf{H} = \frac{\tau \mathbf{J} \mathbf{J}}{\det \mathbf{J}} = \frac{1}{\tau} \begin{pmatrix} a & -b' \\ -b' & \tau^2 + b'^2 \\ & a \end{pmatrix}, \quad h = \frac{1}{\det \mathbf{J}} = \tau a, \quad (8)$$

où $\tau(x, y) = 1 - \kappa(x)b(x, y)$.

Nous introduisons maintenant une nouvelle variable $q = (\mathbf{H}\nabla p) \cdot \mathbf{t}$ et nous reformulons l'équation d'onde (6) comme une équation d'évolution du premier ordre le long de l'axe de propagation \mathbf{S}_0 :

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} b' \partial_y & \tau \\ -\tau(\Delta_{\perp} + k^2 a^2) & a' + b' \partial_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \quad (9)$$

où $\Delta_{\perp} = \tau^{-1} \partial_y (\tau \partial_y)$ est la partie transverse du Laplacien dans le système de coordonnées (x, y) .

2.2 Formulation multimodale

Le principe général est de discrétiser le problème transverse sur une base de fonctions connues, de façon à reformuler le problème initial, scalaire mais dépendant des deux directions de l'espace, en un problème matriciel dépendant seulement de la coordonnée axiale x , le long de la direction privilégiée de propagation. Ainsi, les variables p et q sont écrites

$$\begin{cases} p(x, y) = \sum_n p_n(x) \varphi_n(y), \\ q(x, y) = \sum_n q_n(x) \varphi_n(y). \end{cases} \quad (10)$$

Dans la formulation multimodale usuelle, les fonctions φ_n sont les solutions du problème propre $\partial_{yy}^2 \varphi_n = -\gamma_n^2 \varphi_n$, avec, aux parois ($y = 0, 1$), la condition $\partial_y \varphi_n = 0$. Pratiquement, ce sont les modes classiques $\varphi_n(y) = \sqrt{2 - \delta_{n0}} \cos n\pi y$, $n \in \mathbb{N}$. Ces modes forment une base complète pour les fonctions sur la section transverse du guide et vérifient les relations d'orthogonalité

$$\begin{cases} (\varphi_m, \varphi_n) = \delta_{mn}, \\ (\varphi'_m, \varphi'_n) = \gamma_m^2 \delta_{mn}, \end{cases} \quad (11)$$

où $(f, g) = \int_0^1 \bar{f} g dy$ est le produit scalaire.

La projection sur ces fonctions des équations couplées (9), en prenant en compte la condition aux limites (7), donne un nouveau système d'équations couplées régissant l'évolution selon x des vecteurs $\mathbf{p} \equiv (p_n)$ et $\mathbf{q} \equiv (q_n)$:

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 \\ \mathbf{M}_3 & \mathbf{M}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

avec

$$\mathbf{M}_1 = a^{-1} (a' \mathbf{F} + a'_1 \mathbf{G}), \quad (13)$$

$$\mathbf{M}_2 = a^{-1} ((1 - \kappa a_1) \mathbf{I} - \kappa a \mathbf{C}), \quad (14)$$

$$\mathbf{M}_3 = a^{-1} ((1 - \kappa a_1) \mathbf{Y}_c^2 + \kappa a [(ka)^2 \mathbf{C} - \mathbf{D}]), \quad (15)$$

$$\mathbf{M}_4 = a^{-1} (-{}^T(a' \bar{\mathbf{F}} + a'_1 \bar{\mathbf{G}})), \quad (16)$$

où \mathbf{I} est la matrice identité et

$$\mathbf{C}_{mn} = (y \varphi_m, \varphi_n), \quad (17)$$

$$\mathbf{D}_{mn} = (y \varphi'_m, \varphi'_n), \quad (18)$$

$$\mathbf{F}_{mn} = (y \varphi_m, \varphi'_n), \quad (19)$$

$$\mathbf{G}_{mn} = (\varphi_m, \varphi'_n), \quad (20)$$

$$\mathbf{Y}_{cmn} = j k_m a \delta_{mn}, \quad (21)$$

avec $k_m = \sqrt{k^2 - (\gamma_m/a)^2}$, $\text{Re}[k_m] \geq 0$ et $\text{Im}[k_m] \geq 0$.

Notons toutefois que la convergence des séries (10) est relativement lente, parce que la condition aux limites (7) n'est pas vérifiée par les fonctions transverses $\varphi_n(y)$. Une solution consiste à ajouter à cette base de fonctions des « modes » supplémentaires, censés restaurer la condition aux parois. Ces deux modes sont construits de manière à vérifier les relations d'orthogonalité (11) :

$$\varphi_{-i} = a_{-i} \left(\chi_i(y) - \sum_{n=0}^{N-1} \chi_{in} \varphi_n(y) \right), \quad i = 1, 2, \quad (22)$$

où

$$\begin{aligned} \chi_1(y) &\equiv \frac{1}{\sqrt{1 + 2/\pi}} [\cos(\pi y/2) + \sin(\pi y/2)], \\ \chi_2(y) &\equiv \frac{1}{\sqrt{1 - 2/\pi}} [\cos(\pi y/2) - \sin(\pi y/2)], \end{aligned} \quad (23)$$

et $\chi_{in} \equiv (\varphi_n, \chi_i)$. La projection de l'équation (9) sur la base de fonctions φ_n , $-2 \leq n \leq N-1$, conduit à la même équation matricielle (12) et la définition des matrices \mathbf{C} , \mathbf{D} , \mathbf{F} , \mathbf{G} , et \mathbf{Y}_c est inchangée [2]. Cette formulation améliorée a pour principale conséquence un accroissement significatif de la vitesse de convergence, de $1/N$ à $1/N^{3.5}$ pour le champ, et de $1/N$ à environ $1/N^5$ pour les coefficient de diffusion (réflexion et transmission).

3 Résultats

Les figures suivantes montrent des exemples de champs calculés avec la méthode proposée, dans le cas d'une unique inclusion circulaire ou semi-circulaire, ou dans le cas d'un arrangement dense d'inclusions semi-circulaires disposées régulièrement sur les deux parois du guide.

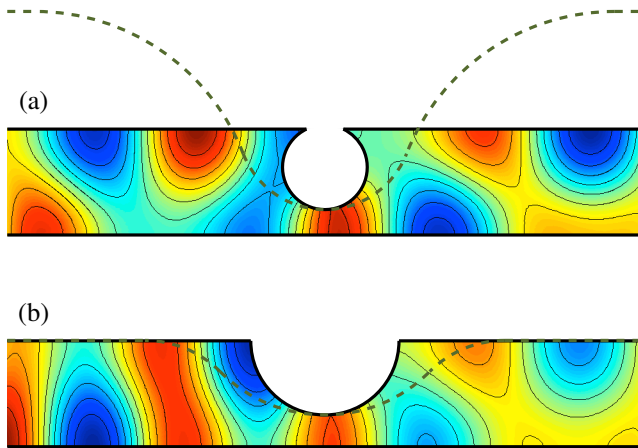


FIGURE 3 – Champs de pression (partie réelle, unités arbitraires). L'onde incidente est une onde plane venant de la gauche, avec une fréquence $kh = 4$, et le guide représenté est connecté à chaque extrémité à des guides droits semi-infinis. La ligne en tirets représente l'axe C_0 du guide (cf. Fig. 2).

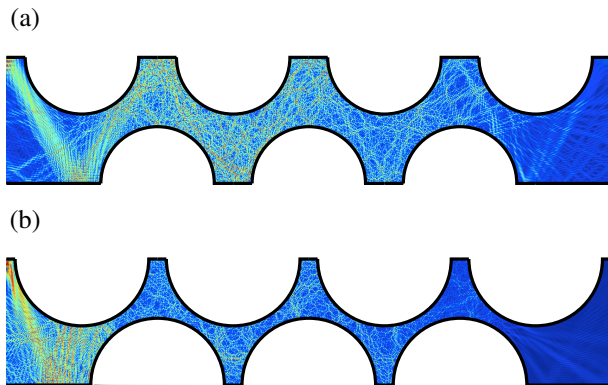


FIGURE 4 – Exemples de champs à haute fréquence dans des guides d'ondes avec une grande densité d'inclusions rigides semi-circulaires, régulièrement espacées. (a) Horizon infini : dans la limite géométrique, il existe des trajectoires sans collision avec les diffuseurs circulaires. (b) Horizon fini.

Références

- [1] S. Félix, A. Maurel, et J.-F. Mercier, Wave propagation in a waveguide containing restrictions with circular arc shape, *J. Acoust. Soc. Am.* **137**, 1274 (2015).
- [2] A. Maurel, J.-F. Mercier, et S. Félix, Propagation in waveguides with varying cross section and curvature : A new light on the role of supplementary modes in multimodal methods, *Proc. R. Soc. A* **470**, 20130743 (2014).
- [3] C. Perrot, F. Chevillotte, R. Panneton, J.-F. Allard et D. Lafarge, On the dynamic viscous permeability tensor symmetry, *J. Acoust. Soc. Am.* **124**, EL210 (2008).
- [4] D. Tonon, B. J. T. Landry, S. P. C. Belfroid, J. F. H. Willems, G. C. J. Hofmans et A. Hirschberg, Whistling of a pipe with multiple side branches : Comparison with corrugated pipes, *J. Sound Vib.* **329**, 1007 (2010).
- [5] T. Dittrich, B. Mehlig, H. Schanz, et U. Smilansky, Universal spectral properties of spatially periodic quantum systems with chaotic classical dynamics, *Chaos Solitons Fractals* **8**, 1205 (1997).