CFA/VISHNO 2016

Structures composites complexes intégrant des transducteurs piézoélectriques : Problématique de la caractérisation du composite

Y. Meyer^a, S. Salmon^b, R. Lachat^a et X. Chen^a
^aIRTES-M3M, UTBM, Site de Sévenans, 90010 Belfort, France
^bOptimization Command & Control Systems, 4J chemin de Palente, 25000 Besançon,
France
yann.meyer@utbm.fr



11-15 avril 2016, Le Mans CFA 2016 / VISHNO

Dans diffèrents domaines industriels comme les transports ou l'aéronautique, la réduction des masses structurelles est un sujet largement ouvert. Une des solutions les plus prometteuses est l'utilisation de structures composites en raison de leur grande rigidité, de leur faible densité massique et de leur facteur d'amortissement favorable. Dans le même temps, il existe une intensification de l'environnement dynamique opérationnel et une augmentation des exigences de durabilité. Ces différentes contraintes semblent être contradictoires. Une solution pour gérer ces points est de développer des structures composites adaptatives intégrant un réseau distribué de transducteurs piézoélectriques. Ces structures sont alors capables de modifier leurs propriétés mécaniques en fonction de leur environnement, d'interagir avec d'autres structures ou avec des êtres humains. Pour répondre aux exigences techniques nécessaires au fonctionnement de ces structures, en particulier celles possédant des géométries complexes, il est nécessaire de maîtriser le processus de fabrication et donc les paramètres matériaux du composite fabriqué. En effet, au cours de la phase de conception préliminaire, ces paramètres doivent être connus pour permettre de faire des choix d'architecture de solutions et d'appréhender le comportement final de la structure. Dans cet article, deux méthodes d'identification du composite sont appliquées à des plaques de test dédiées intégrant des élèments exogènes. La technique Resonalyser est une méthode adéquate pour extraire des paramètres matériaux globaux. Son inconvénient majeur est l'utilisation de dispositifs de mesures sans contact. La technique du temps de vol (ToF method) est basée sur la durée de propagation d'ondes guidées dans la matière. Le dispositif expérimental est alors très simple. Des transducteurs piézoélectriques intégrés dans les structures sous test sont utilisés à cet effet. Les résultats obtenus sont des valeurs locales le long du trajet de propagation des ondes. L'exploitation des résultats nécessite alors une bonne connaissance des phénomènes de propagation d'ondes guidées dans des matériaux composites. Ces mesures sont alors exploitées pour extraire les diffèrents paramètres matériaux. Dans cette étude, des résultats préliminaires sont discutés et appliqués à la prédiction de la réponse modale d'une calotte sphérique.

1 Introduction

Classiquement, pour fonctionnaliser une pièce mécanique en composite, les transducteurs piézoélectriques sont collés sur la surface de la structure et l'électronique de puissance et de pilotage est déportée. Notre démarche est sensiblement différente. Nous souhaitons intégrer au coeur du composite un large réseau distribué de piézocéramiques. L'idée est de protéger les éléments de transduction et leur connectique et de concevoir des produits finis industrialisables en mode "plug and play". Par ailleurs, l'intégration d'un large réseau d'éléments de transduction au coeur de la matière constitue la première étape pour développer, via l'intégration de micro et de nano structures, de la matière "programmable" ou "pilotable".

Pour placer ces nouvelles fonctionnalités au coeur des structures, il est nécessaire d'intégrer les transducteurs pendant le processus de fabrication des matériaux composites. Pour répondre à cette exigence, des méthodes de fabrication spécifiques ont été mises au point au sein du laboratoire IRTES-M3M de l'Université de Technologie de Belfort-Montbéliard (UTBM).

En parallèle, une démarche de conception préliminaire est également développée. L'idée est d'être capable de prédire en première approche le comportement final de la structure. Pour cela, les outils d'ingénierie-système sont exploités [1]. Tout d'abord, l'arborescence du produit (Product Breakdown Structure) est construite. L'idée est de décomposer le produit en sous-systèmes et en composants. Une fois l'arborescence descendante obtenue, il est nécessaire d'établir l'architecture du système. Les élèments de l'arborescence du produit sont réorganisés en fonction de leur interaction. Il s'agit de définir les interfaces entre composants et d'être en mesure de les concevoir. Il est absolument nécessaire de bien connaître le comportement électromécanique de ces transducteurs inclus dans la matière afin notamment de concevoir correctement le contrôleur du système. L'approche classique utilisant un processus d'identification appliquée aux structures finales n'est a priori

pas pertinente pour de grands réseaux de transducteurs distribués ou pour de la production de masse.

Notre approche est basée sur une démarche expérimentale amont permettant de déterminer les paramètres de conception du produit [2]. L'architecture du système nous permet d'établir nos besoins en caractérisation expérimentale. Il est nécessaire d'avoir :

- une caractérisation des céramiques piézoélectriques. Elle correspond à un contrôle d'entrée des piézocéramiques [3].
- une caractérisation du composite fabriqué. Une fois le procédé de fabrication stabilisé, le composite produit doit être entièrement caractérisé via une série d'essais nous permettant d'avoir accès aux paramètres matériaux nominaux et à leur incertitude en fonction du procédé de fabrication sélectionné.
- une caractérisation des céramiques piézoélectriques "intégrées". L'idée est d'être capable de produire un modèle de comportement permettant à partir des données du contrôle d'entrée d'évaluer la dérive des coefficients de couplage électro-mécanique.
- une caractérisation des interfaces électriques. Le procédé de connection électrique notamment entre les transducteurs et le réseau électrique nécessite d'évaluer l'influence des paramètres de fabrication sur la qualité des contacts obtenus. En effet, la technologie de connection électrique par soudure n'est pas utilisée dans notre processus de fabrication [4].
- une caractérisation des couples inter-éléments. Il est nécessaire d'évaluer les couplages mécanique et électrique entre les transducteurs en fonction de la distance et de la technologie de connections employée afin d'établir des régles de conception dédiées.

Dans cet article, nous nous intéressons à la manière de caractériser le composite fabriqué. Deux méthodes (*Méthode*

Resonalyser et Méthode du temps de vol) sont employées sur des objets de test calibrés afin d'extraire les paramètres du matériau composite. Les résultats préliminaires obtenus sont discutés. Ces données sont utilisées pour définir numériquement la réponse modale d'une calotte sphérique. Ces résultats sont ensuite comparés à ceux issus d'une analyse vibratoire expérimentale. Une conclusion générale et des perspectives terminent ce papier.

2 Méthodes de caractérisation du matériau composite

Deux méthodes de caractérisation des paramètres matériaux (*Méthode Resonalyser et Méthode du temps de vol*) sont exploitées sur des objets de test calibrés et élaborés selon un processus de fabrication bien établi.

2.1 Caractéristiques des objets testés

Pour les besoins de la caractérisation, cinq plaques instrumentées de quatres piézocéramiques ont été produites. Les disques de céramiques sont positionnés à chaque coin des plaques comme le montre la figure 1. Les caractéristiques de ces transducteurs sont données dans [3]. Afin de pouvoir exploiter la méthode Resonalyser, les dimensions doivent permettre de produire des plaques de Poisson [5] afin notamment de déterminer de manière précise le coefficient de Poisson. Le matériau produit peut être considéré isotrope transverse. Par conséquent, les plaques doivent être carrées. Ces structures font 298 mm de côté et 2 mm d'épaisseur dont 0.2 mm de Gelcoat, comme l'illustre la figure 1. Les plaques sont réalisées au laboratoire IRTES-M3M de l'UTBM. Il s'agit d'un composite stratifié constitué de 6 couches de mat de fibres de verre et d'une matrice en résine polyester. La technique d'infusion est employée comme procédé de mise en oeuvre. Le taux de fibres est de l'ordre de 35 à 40 %. A titre de finition, une couche de gel coat est présente sur l'une des surfaces extérieures des plaques. Les élements piézoélectriques sont placés entre la première et la deuxième couche. La couche de gel coat est prise comme référence initiale de la numérotation des couches.

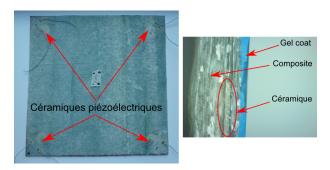


Figure 1 – Plaques de Poisson testées

2.2 Méthode Resonalyser

La méthode Resonalyser exploite la mesure des fréquences de résonance de structures rectangulaires possédant des proportions dimensionnelles particulières (Plaque de Poisson). Dans le cas général, elle permet d'extraire les paramètres du matériau orthotropique constitutif des plaques. Pour cela, une modélisation numérique de la plaque est développée et la réponse modale du modèle calculée. Une boucle d'optimisation est ensuite utilisée pour mettre à jour les paramétres matériaux du modèle et minimiser l'écart entre les réponses modales numériques et mesurées sur un nombre de modes propres de référence au nombre de paramètres matériaux à identifier. La méthode Resonalyser a été complètement détaillée et discutée dans la thèse de T. Lauwagie [6].

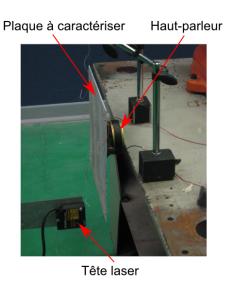


Figure 2 – Mise en oeuvre de la méthode Resonalyser

Dans la figure 2, le banc de caractérisation utilisé est présenté. Il nécessite l'utilisation d'un haut-parleur, d'un dispositif de mesure sans contact et d'une chaine d'excitation et de mesure. Les sollicitations sont de type sinusoïdal sur la gamme de fréquences 15 Hz - 100 Hz. Pour cela, un générateur de fonctions est employé (Keithley, 3390). Nous exploitons un capteur laser de déplacement (Keyence, LC-2450). Nous cherchons à mesurer les valeurs des fréquences propres de la structure. Pour cela, une recherche manuelle classique est employée pour mesurer les premières fréquences propres à l'aide d'un oscilloscope numérique (Pico Technology, PS 4424).

2.3 Méthode du temps de vol

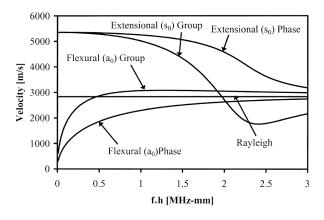


Figure 3 – Courbes de dispersion (vitesses de groupe et de phase en fonction du produit fréquence.épaisseur (fh) [7]

Cette méthode de caractérisation de matériaux exploite

11-15 avril 2016, Le Mans CFA 2016 / VISHNO

les propriétés de propagation d'ondes ultrasonores, en particulier, les ondes de Lamb [8]. Ce type d'ondes ont la particularité de se propager sur des longues distances dans le composite [9]. Pour générer et capter les trains d'ondes, nous utilisons les transducteurs intégrés dans le composite. Les transducteurs possèdent une fréquence de résonance pour le mode radial mesuré dans l'air de l'ordre de 100 kHz [3]. Une fois intégrés dans le composite par effet backing, la fréquence centrale du mode radial est alors de 80 kHz. Le produit fréquence.épaisseur (fh) est donc de 0.15 MHz.mm. La vitesse de phase et la vitesse de groupe du mode symétrique So sont alors équivalentes. Il est donc possible par une mesure de temps de vol (temps nécessaire à la première onde pour se propager de l'excitateur au capteur) de calculer la vitesse de groupe de S_0 et d'exploiter les formules d'extraction de paramètres matériaux développés pour la vitesse de phase [8].

La figure 4 présente le banc d'essai mise en place pour mesurer les trains d'ondes. un générateur de fonctions est employé (Keithley, 3390) pour générer les signaux d'excitation via un amplificateur de tension miniature (PiezoDrive, PDM200B). Les signaux sont ensuite capter via un oscilloscope numérique (Pico Technology, PS 4424).

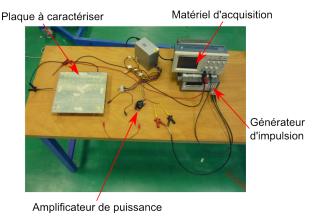


Figure 4 – Mise en oeuvre de la méthode du temps de vol

3 Résultats expérimentaux

3.1 Hypothèses de modélisation

Dans cette phase préliminaire, nous souhaitons tester la pertinence des méthodes employées par rapport à notre besoin en caractérisation et à notre finalité concernant la conception préliminaire de structures composites adaptatives. Pour cela, nous allons formuler plusieurs hypothèses simplificatrices. Tout d'abord, au vu des caractéristiques du composite fabriqué, nous pouvons considérer un matériau homogénéisé de type isotrope transverse dont l'axe de symétrique correspond à l'axe hors plan. Au vu des dimensions des structures de test, les hypothèses de la théorie des plaques de Kirchhoff-Love [10] peuvent être formulées. Par ailleurs, le matériau est supposé en état de contrainte plane ($\sigma_3 = \tau_{23} = \tau_{13} = 0$). La loi de comportement peut alors s'exprimer sous la forme réduite présentée dans l'équation (1).

$$\left\{ \begin{array}{c} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{array} \right\} \tag{1}$$

avec E le module d'Young homogénéisé $(N.m^{-2})$ et ν $(=\nu_{12})$ le coefficient de Poisson homogénéisé.

De plus, nous souhaitons tester uniquement la démarche sur la détermination du module d'Young E. Nous allons donc formuler l'hypothèse que, les fibres de verre étant réparties aléatoirement dans le plan des plis, la valeur du coefficient de Poisson homégénéisé se situe entre le coefficient de Poisson des fibres de verre (ν =0.2) et celui de la résine (ν =0.4). En première approche, la loi des mélanges nous donne une valeur proche de 0.32. Il est également à noter que la masse volumique du matériau composite est de $1630~Kg.m^{-3}$ et celle de la couche de gel coat $1100~Kg.m^{-3}$

3.2 Méthode Resonalyser

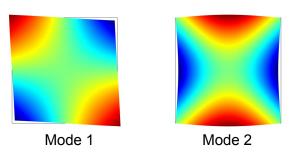


Figure 5 – Déformées modales suivant l'axe hors plan des deux premiers modes de plaque

Pour la modélisation numérique, nous utilisons le logiciel Comsol Multiphysique. Le recalage du module d'Young s'effectue sur les deux premiers modes propres des plaques de test de manière à minimiser l'écart entre les valeurs des fréquences propres numériques et expérimentales. Sur la figure 5, les déformées des deux premiers modes exploitées sont présentées. Le tableau 1 donnent les résultats obtenus suite au recalage. Nous obtenons un module d'Young *E* de l'ordre de 11 GPa.

Tableau 1 – Méthode résonalyser : Comparaison des valeurs de fréquences propres expérimentales et numériques après la phase de recalage

Fréquence (Hz)	Expér.	Numér.	Ecart (%)
Mode 1	32.9	34.5	4.8
Mode 2	55.9	50.3	10.0

3.3 Méthode du temps de vol

Afin d'éviter les problèmatiques liées à la détermination du centre du train d'onde de lamb symétrique S_0 , l'excitation est de type impulsionnel et la durée du temps de vol est déterminée entre les fronts montants de l'impulsion et du signal reçu. Seuls les trajets suivant les diagonales des plaques sont exploités dans cette étude. La vitesse de groupe, et donc de phase, obtenue est de l'ordre de 3380 m/s. Par exploitation de l'équation (2) [8], il est possible de déterminer un module d'Young E = 16.7 GPa.

$$c_{ph}^{S_0} = \sqrt{\frac{E}{1 - v^2}} \tag{2}$$

3.4 Comparaison des données et discussion

Les valeurs de module d'Young obtenues avec les deux méthodes de caractérisation sont relativement différentes. Une première explication à cet état de fait est la différence d'échelle des deux caractérisations. La méthode Resonalyser est une approche basée sur les réponses modales des structures. Les valeurs obtenues sont donc globales. La méthode du temps de vol est basée sur la propagation d'ondes guidées suivant un trajet particulier. Les valeurs résultantes sont alors locales et plus sujettes aux variabilités des propriétés du matériau. Par ailleurs, le recalage de modèle permettant d'identifier la valeur du module d'Young dans la méthode Resonalyser s'effectue sur les deux premiers modes propres. Il est donc possible que l'hypothèse d'isotropie transverse soit mise en défaut. Il serait alors nécessaire d'effectuer un recalage également sur le module de cisaillement.

4 Application à la modélisation d'une calotte sphérique

Pour tester la validité des valeurs de module d'Young obtenues, nous allons effectuer l'exercice de prédire le comportement vibratoire d'une calotte sphérique constituée de matériau composite comme lors d'une phase de conception préliminaire. Les résultats obtenus seront alors comparés avec des mesures effectuées sur un prototype.

4.1 Caractéristiques de la calotte sphérique

La calotte sphérique possède un rayon extérieur de 624 mm et une base carrée de 580 mm de côté. Le moule utilisé est un moule en composite, usiné et rectifié. Les dimensions sont donc parfaitement maitrisées. La structure est constituée du même matériau que les plaques de Poisson utilisées lors de la caractérisation par la méthode Resonalyser. Le procédé d'obtention est également une infusion. Il est cependant à noter les couches de fibres ont été découpées pour se conformer au mieux à la forme biconcave voulue. Les dimensions étant relativement grandes, des filets drainants sont utilisés pour faciliter la diffusion de la résine lors de la phase d'injection.

4.2 Analyse expérimentale

Une fois la structure fabriquée, il est possible d'effectuer la caractérisation vibratoire de la structure en conditions libre-libre. Pour cela, un montage dédié a été créé pour permettre la suspension de la calotte sphérique et son maintien en position, comme le montre la figure 6. L'excitation de la structure s'effectue grâce à un excitateur électrodynamique. La gamme de fréquences d'excitation est de quelques Herz à 100 Hz pour un signal de type chirp. Pour la mesure de la réponse vibratoire, un vibromètre laser à balayage 3D est utilisée (Polytec, PSV-500-3D). Pour les besoins de cette analyse expérimentale, les moyens humains



Ressorts de suspension

Excitateur électrodynamique

Fils de maintien

Figure 6 – Montage expérimentale employé pour l'analyse modale de la calotte sphérique

et matériels du département de Mécanique Appliquée de l'institut Femto ST ont été utilisés.

En figure 7, nous présentons les deux premières déformées modales mesurées sur la calotte sphérique suivant l'axe hors plan. Les fréquences propres mesurées sont 18.75 Hz pour le premier mode et 25.9 Hz pour le deuxième mode.

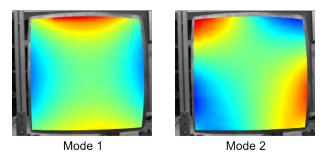


Figure 7 – Deux premières déformées modales mesurées sur la calotte sphérique suivant l'axe hors plan. (Fréquence_{Mode1} = 18.75 Hz, Fréquence_{Mode2} = 25.9 Hz)

4.3 Modélisation numérique

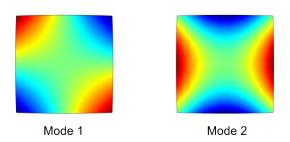


Figure 8 – Deux premières déformées modales calculées de la calotte sphérique suivant l'axe hors plan.

Le modéle numérique de la calotte sphérique est développé sous le logicel Comsol Multiphysics. Une géométrie de type coque est utilisée. Le maillage employé est un maillage triangulaire non structuré possédant 154 éléments. La figure 9 présente le maillage employée. Ce niveau de discrétisation est suffisant pour obtenir avec une bonne précision les valeurs de fréquences des deux premiers modes propres. Les deux modules de Young mesurés sont

11-15 avril 2016, Le Mans CFA 2016 / VISHNO

implementés dans deux modèles différents. Les résultats sont présentés dans le tableau 2.

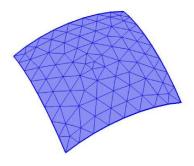


Figure 9 – Maillage de la calotte sphérique

Tableau 2 – Comparaison des valeurs de fréquences propres expérimentales, numériques liées à la méthode résonalyser (Numér. resonal.) et numériques liées à la méthode du temps de vol (Numér. TdV)

Fréquence	Expér.	Numér.	Ecart	Numér.	Ecart
(Hz)		resonal.	(%)	TdV	(%)
Mode 1	18.75	21.9	16.8	27	44
Mode 2	25.9	14.3	44.8	16.5	36.3

4.4 Comparaisons des résultats et discusion

Les résultats numériques obtenus semblent assez éloignés des mesures. Par ailleurs, nous constatons une inversion des modes identifiés par rapport à ceux des modéles numériques. Cette inversion peut s'expliquer par la présence d'une différence d'épaisseur localisée le long des lignes nodales du mode 2 numérique, comme le montre la figure 10. L'utilisation de filets drainants au cours du processus de fabrication explique cette amincissement sur les diagonales. Cela engendre sans doute un assouplissement de la structure pour ce mode propre de vibration. Il est donc clair que la mise en oeuvre du processus de fabrication a un impact important sur les réponses de la structure. Par ailleurs, l'épaisseur de la structure est loin d'être uniforme sur l'ensemble de la structure et crée donc des modifications importantes de raideur. Le corollaire est la modification locale du taux de fibres et, par conséquent, des propriétés du matériau. Cela explique sans doute la différence entre les modules d'Young identifiés par la méthode Resonalyser et par la méthode du temps de vol. Au regard de l'impact de la mise en oeuvre du procédé de fabrication, il apparait clairement qu'en phase préliminaire de conception, les écarts constatés et présentés dans le tableau 2 semblent suffisants pour prédire le comportement de la structure et l'exploiter à des fins de choix d'architectures de structures contrôlées (positionnement transducteurs, implantation des conducteurs électriques et de l'électronique, choix des matériaux, choix du contrôleur....). Par ailleurs, d'après cette première étude, le choix de la méthode de caractérisation ne peut se réduire à

l'écart entre les résultats numériques et expérimentaux mais également à la facilité de mise en oeuvre du procédé. Par exemple, la méthode du temps de vol peut être implantée de manière très simple et légère avec notamment l'exploitation de cartes électroniques de type Arduino.

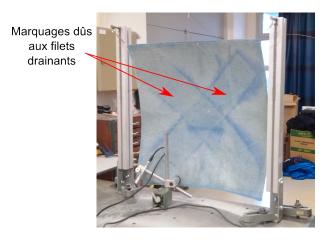


Figure 10 – Visualisation de la face arrière de la calotte sphérique

5 Conclusion

Dans cet article, nous présentons deux méthodes d'identification des paramètres de matériau composite : la méthode Resonalyser et la méthode du temps de vol. Ces données sont recherchées pour alimenter en paramètres fiables la conception préliminaire de structures composites adaptatives. Des plaques de Poisson tests sont fabriquées et caractérisées via ces deux méthodes. En première approche, une série d'hypothèses de modélisation du comportement du matériau est formulée afin de simplifier l'approche à l'identification d'un seul paramètre représentatif tout en démontrant les difficultés et l'intérêt de la démarche. Les modules d'Young identifiés sont ensuite implémentés numériquement pour prédire le comportement vibratoire d'une structure complexe : une calotte sphérique. Les écarts constatés sur les fréquences propres sont relativement importants mais sont expliqués par la manière de mettre en oeuvre la fabrication de la structure. L'impact des variabilités de paramètres dûes au procédé de fabrication est très important sur la réponse finale de la structure. Mais cet impact est difficilement quantifiable en phase de conception préliminaire puisque les difficultés de mise en oeuvre et les solutions pour produire une pièce correcte ne sont pas connue. Une question se pose alors : est-il nécessaire de rechercher des précisions importantes sur l'identification des paramètres matériaux sachant l'impact des solutions de fabrication? Finalement, un modèle permettant de décrire des tendances de comportement est sans doute suffisant pour cette phase de conception. Il est bien entendu qu'en phase de conception détaillée la problèmatique est tout autre.

Les perspectives de ce travail spécifique sur l'identification des paramètres matériaux résident dans la détermination de la variabilité des valeurs identifiées et dans la complexification du modèle de comportement notamment pour l'identification des matériaux composites orthotropes.

Remerciements

Ce travail a bénéficié d'une aide de l'Etat gérée par l'ANR au titre du PIA portant la référence ANR-11-LABX-0001-01 : Labex ACTION. Par ailleurs, les auteurs tiennent à remercier Jean-Louis Raynaud et Romain Viala du département de Mécanique Appliquée de l'institut Femto ST pour leur aide précieuse dans l'analyse modale expérimentale effectuée sur la calotte sphérique.

Références

- [1] S. Fiorèse and J.P. Meinadier. Découvrir et comprendre l'ingénierie système. *CEPADUES Editions*, *ISBN*, 978(36493.005):6, 2012.
- [2] T. Dessolier, R. Lachat, and Y. Meyer. Fibers-based composite structures with integrated piezo-ceramics. design approach of smart devices. In *International Conference on Dynamics of Composite Structures* (Dyncomp'2015), Arles, France, 2015.
- [3] Y. Meyer and R. Lachat. Vibration characterization procedure of piezoelectric ceramic parameters. In *Proc. 4eme Colloque francophone d'Analyse Vibratoire Expérimentale (AVE 14)*, Blois, France, (2014).
- [4] R. Lachat and Y. Meyer. Structures composites adaptatives conception et fabrication d'un aileron automobile instrumenté. In *Congrés Français de Mécanique (CFM 2015)*, *Lyon, France*, 2015.
- [5] T. Lauwagie, H. Sol, W. Heylen, and G. Roebben. Determination of the in-plane elastic properties of the different layers of laminated plates by means of vibration testing and model updating. *Journal of Sound and Vibration*, 274(3):529–546, (2004).
- [6] T. Lauwagie. Vibration-based methods for the identification of the elastic properties of layered materials. PhD thesis, Katholieke Universiteit Leuven, 2005.
- [7] B. J. Tucker, D. A. Bender, D. G. Pollock, and M. P. Wolcott. Ultrasonic plate wave evaluation of natural fiber composite panels. *Wood and fiber science*, 35(2):266–281, 2003.
- [8] B. J. Tucker. Ultrasonic plate waves in wood-based composite panels. PhD thesis, Washington State University, 2001.
- [9] T. Monnier. Ondes de Lamb dans les milieux stratifiés : application à la surveillance in situ et en temps réel de l'endommagement de structures composites. PhD thesis, INSA de Lyon, 2001.
- [10] A. E. H. Love. A treatise on the mathematical theory of elasticity, volume 1. Cambridge University Press, 1944.