

CFA/VISHNO 2016

Méthode inverse à régularisation évanescente pour un problème de Cauchy associé à l'équation d'HelmholtzF. Delvare^a, L. Caillé^a, A. Cimetièrè^b, L. Marin^{c,d} et N. Michaux-Leblond^a^aUniversité de Caen Normandie, Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme, BP 5186, 14032 Caen, France^bISAE ENSMA, Institut Pprime, CNRS-ENSMA-Université de Poitiers, Boulevard Marie et Pierre Curie, 86962 Chasseneuil Futuroscope Cedex, France^cDépartement de Mathématiques, Faculté de Mathématiques et d'Informatique, Université de Bucarest, 14 Academiei, 010014 Bucarest, Roumanie^dInstitut de Mécanique des Solides, Académie Roumaine, 15 Constantin Mille, 010014 Bucarest, Roumanie

franck.delvare@unicaen.fr



LE MANS

Nous nous intéressons ici à la résolution d'un problème inverse associé à l'équation d'Helmholtz, connu sous le nom de problème de Cauchy. L'idée essentielle de la méthode inverse, que nous proposons, est de distinguer des quantités fiables et des quantités non fiables. Cette distinction est réalisée en faisant l'hypothèse que l'équation d'équilibre est vérifiée exactement et qu'elle représente bien le phénomène physique que l'on veut modéliser alors que les conditions aux limites auxquelles nous avons accès peuvent être entachées d'erreurs pouvant provenir de l'expérimentation et correspondre à un bruit de mesure. La méthode inverse proposée, qui n'est pas spécifique au problème de Helmholtz, repose donc sur l'idée de rechercher parmi toutes les solutions de l'équilibre celle qui s'approche au mieux des conditions aux limites accessibles à la mesure.

1 Introduction

Nous considérons le domaine Ω (Figure 1) de \mathbb{R}^2 et supposons que sa frontière Γ se décompose en deux parties Γ_d et Γ_i , où $\Gamma_d \cup \Gamma_i = \Gamma$ et $\Gamma_d \cap \Gamma_i = \emptyset$. L'indice d est associé aux quantités (données) sur Γ_d . L'équation d'équilibre est donnée par :

$$(\Delta + k^2)u = 0 \quad x \in \Omega \quad (1)$$

où Δ désigne l'opérateur de Laplace.

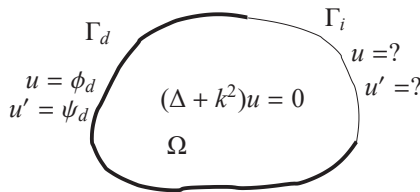


FIGURE 1 – Problème de Cauchy associé à l'équation de Helmholtz

Pour $x \in \Gamma$, nous notons $n(x)$ la normale unitaire extérieure et nous définissons la dérivée normale u' par :

$$u' = n \cdot \nabla u = \frac{\partial u}{\partial n}$$

Nous supposons que la fonction u et sa dérivée normale u' sont simultanément données (connues, imposées ou mesurées) sur la partie de la frontière Γ_d , mais qu'aucune condition aux limites n'est imposée, connue ou mesurable sur sa partie complémentaire Γ_i :

$$\begin{aligned} u(x) &= \phi_d & x \in \Gamma_d \\ u'(x) &= \psi_d & x \in \Gamma_d \end{aligned} \quad (2)$$

où ϕ_d et ψ_d sont des fonctions connues. L'équation d'équilibre (1) et les conditions aux limites (2) amènent à la formulation du problème de Cauchy associé à l'équation d'Helmholtz :

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)u = 0 & x \in \Omega \\ u = \phi_d & x \in \Gamma_d \\ u' = \psi_d & x \in \Gamma_d \end{cases} \quad (3)$$

Le problème (3) n'a pas de solution en général, sauf si les conditions aux limites (2) sont compatibles. Dans ce cas, la solution est unique mais ne dépend pas continûment des données. Le problème (3) est donc très sensible à de petites perturbations sur les conditions aux limites (2). Malheureusement, lorsque les données ϕ_d et ψ_d sont issues d'expérimentation, il est fortement probable, à cause des bruits de mesure, que les données ne soient pas compatibles. Afin de résoudre les problèmes de Cauchy, de nombreuses méthodes ont été introduites comme par exemple les méthodes de régularisation de type Tikhonov (classique ou itérative) [8] ou des méthodes itératives [1, 6] qui consistent

à résoudre une succession de problèmes bien posés.

Ces méthodes cherchent à résoudre un système de la forme :

$$A(u) = f \quad (4)$$

où l'on exprime les inconnues u en fonction de grandeurs connues f . La solution de (4) (si elle existe) n'est pas nécessairement unique ou stable vis à vis de faibles perturbations de la donnée f .

Les méthodes de régularisation de type Tikhonov utilisent un opérateur régularisant afin d'obtenir une solution approchée stable vis à vis de faibles perturbations. Ces méthodes présentent le désavantage de perturber l'opérateur du problème par l'ajout d'un terme régularisant dépendant d'un paramètre de régularisation. Les quasi-solutions obtenues sont alors dépendantes de ce paramètre. De plus, ces méthodes ainsi que les méthodes itératives utilisent les données f , ou du moins une partie de celles-ci, d'une manière exacte, c'est à dire qu'elles expriment les inconnues u du problème en fonction de ces données.

La méthode inverse, que nous avons déjà proposée pour les problèmes de Cauchy associés à l'équation de Laplace [2, 3] ou à l'élasticité linéaire [5], est différente par le fait que nous ne cherchons pas à exprimer directement les inconnues u en fonction des données f . L'idée essentielle est de distinguer les quantités fiables des quantités non fiables. Cette distinction est réalisée en faisant l'hypothèse que l'équation d'équilibre (1) est vérifiée exactement et qu'elle représente bien le phénomène physique que l'on veut modéliser alors que les conditions aux limites (2) auxquelles nous avons accès peuvent être entachées d'erreurs. La méthode inverse proposée, repose sur l'idée de rechercher parmi toutes les solutions de l'équilibre (dans ce cas l'opérateur n'est pas perturbé) celle qui s'approche au mieux des conditions aux limites accessibles à la mesure, c'est à dire de définir la solution du problème de Cauchy (3) en tant qu'élément proximal et permettre la relaxation, ainsi que le débruitage des données (2) (ou f).

Les formulations continue et en dimension finie de la méthode, ainsi que des simulations numériques sont donc présentées.

2 Méthode inverse à régularisation évanescence

2.1 Formulation continue

Soit $H(\Omega)$ l'espace des solutions de l'équation d'équilibre (1) :

$$H(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) ; (\Delta + k^2)v = 0 \text{ dans } \Omega\}$$

On note v' la dérivée normale de v sur Γ . Les traces $(v|_{\Gamma}, v'|_{\Gamma})$ des éléments v de $H(\Omega)$ engendrent l'espace $H(\Gamma)$ des paires compatibles qui caractérisent les solutions d'équilibre par leurs valeurs sur la frontière du domaine. Une formulation équivalente du problème (3) est :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{U} = (u, u') \in H(\Gamma) \text{ tel que :} \\ \mathbf{U} = \Phi_d \text{ sur } \Gamma_d \end{cases} \quad (5)$$

où $\Phi_d = (\phi_d, \psi_d)$. L'idée est de chercher parmi toutes les solutions de l'équilibre celle qui s'approche au mieux des conditions aux limites accessibles à la mesure et amène à la formulation du problème d'optimisation (6) :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{U} \in H(\Gamma) \text{ tel que :} \\ J(\mathbf{U}) \leq J(\mathbf{V}) \quad \forall \mathbf{V} \in H(\Gamma) \text{ avec} \\ J(\mathbf{V}) = \|\mathbf{V}|_{\Gamma_d} - \Phi_d\|_{\Gamma_d}^2 \end{cases} \quad (6)$$

c'est à dire de définir la solution du problème de Cauchy (3) en tant qu'élément proximal. Comme le problème (3), les problèmes (5) et (6) sont mal-posés. En effet, il est toujours possible de trouver une solution $\mathbf{U} \in H(\Gamma)$ dont la restriction à Γ_d est aussi proche que l'on veut de la donnée Φ_d entraînant ainsi une solution instable sur la partie complémentaire de la frontière. Il est donc nécessaire d'introduire un terme de contrôle (ou régularisation) dans la fonctionnelle J qui aura pour effet d'éviter cette instabilité. Le problème d'optimisation (6) est ainsi remplacé par :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{U} \in H(\Gamma) \text{ tel que :} \\ J_c(\mathbf{U}) \leq J_c(\mathbf{V}) \quad \forall \mathbf{V} \in H(\Gamma) \text{ avec} \\ J_c(\mathbf{V}) = \|\mathbf{V}|_{\Gamma_d} - \Phi_d\|_{\Gamma_d}^2 + c \|\mathbf{V} - \Phi\|_{\Gamma}^2 \end{cases} \quad (7)$$

où c est un coefficient réel strictement positif et Φ est un élément de $H(\Gamma)$. Le terme de contrôle $c \|\mathbf{V} - \Phi\|_{\Gamma}^2$ intervient sur toute la frontière Γ et pourrait être considéré comme un terme régularisant de type Tikhonov. Son introduction rend le problème (7) bien posé au sens d'Hadamard et en particulier sa solution dépend continûment de la donnée Φ_d mais aussi du coefficient c et du choix de Φ .

Tout en gérant des problèmes bien posés, un moyen de s'affranchir de cette dépendance par rapport à c et à Φ est de faire apparaître la solution du problème de Cauchy (3), ou encore la solution du problème d'optimisation (6), comme la limite d'une suite. Comme dans [2, 3], une stratégie itérative est introduite. Elle fait de la solution de (5) le point fixe d'un opérateur de $H(\Gamma)$ dans $H(\Gamma)$, où chaque itéré est la solution d'un problème d'optimisation bien posé :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{U}^{k+1} \in H(\Gamma) \text{ tel que :} \\ J_c^k(\mathbf{U}^{k+1}) \leq J_c^k(\mathbf{V}) \quad \forall \mathbf{V} \in H(\Gamma) \text{ avec} \\ J_c^k(\mathbf{V}) = \|\mathbf{V}|_{\Gamma_d} - \Phi_d\|_{\Gamma_d}^2 + c \|\mathbf{V} - \mathbf{U}^k\|_{\Gamma}^2 \end{cases} \quad (8)$$

Dans ce processus itératif, l'équation d'équilibre (1) est bien prise en compte de manière exacte puisque, à chaque itération, la recherche de l'élément optimal est réalisée dans l'espace $H(\Gamma)$. La fonctionnelle est composée de deux termes qui jouent des rôles différents. Le premier terme, que l'on appellera par la suite terme de relaxation, agit uniquement sur Γ_d et représente l'écart entre l'élément optimal et les conditions aux limites surabondantes. Il permet donc de relâcher (ou relaxer) ces données qui peuvent être éventuellement bruitées. Le second terme, que l'on appellera par la suite terme de régularisation, agit sur

toute la frontière Γ et non pas seulement sur la frontière Γ_i où les conditions aux limites doivent être complétées. Ce terme contrôle la distance entre le nouvel élément optimal et l'élément optimal obtenu à l'itération précédente. La norme du terme de régularisation diminue et tend vers zéro au fur et à mesure des itérations, d'où le nom de régularisation évanescence. Donc, à chaque itération, l'élément optimal vérifie exactement l'équation d'équilibre (1) et s'accorde au mieux aux données surabondantes $\Phi_d = (\phi_d, \psi_d)$ tout en ne s'éloignant pas trop de l'élément optimal obtenu à l'itération précédente.

L'algorithme proposé permet donc simultanément la complétion de données sur la partie de la frontière où aucune donnée n'est disponible et le "débruitage" des conditions aux limites surabondantes.

2.2 Formulation discrète de la méthode

Après discrétisation de la formulation continue (8), $\mathbf{U}^k = (U_1^k, \dots, U_N^k, U_1^k, \dots, U_M^k)$, le k^{ieme} terme de la suite $\{\mathbf{U}^k\}_{k>0}$, est composé des N valeurs discrètes de la fonction u sur toute la frontière Γ ainsi que des M valeurs discrètes de la dérivée normale u' .

Soient $c > 0$, et \mathbf{U}^0 , le terme \mathbf{U}^{k+1} de la suite est défini par :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{U}^{k+1} \in H_N(\Gamma) \text{ tel que :} \\ J_c^k(\mathbf{U}^{k+1}) \leq J_c^k(\mathbf{V}) \quad \forall \mathbf{V} \in H_N(\Gamma) \text{ avec} \\ J_c^k(\mathbf{V}) = \|\mathbf{V}|_{\Gamma_d} - \mathbf{U}^d\|_{\Gamma_d}^2 + c \|\mathbf{V} - \mathbf{U}^k\|_{\Gamma}^2 \end{cases} \quad (9)$$

où $\mathbf{U}^d = (U_1^d, \dots, U_p^d, U_1^d, \dots, U_{p'}^d)$ est le vecteur à $p + p'$ composantes correspondant aux valeurs discrètes des données surabondantes sur Γ_d et où $H_N(\Gamma)$ est l'espace qui caractérise de manière discrète les solutions d'équilibre. De manière similaire à ce qui a été fait pour l'équation de Laplace [2, 3] ou le système de Lamé-Navier pour l'élasticité [5, 7], la caractérisation en dimension finie des solutions d'équilibre peut être obtenue en utilisant différentes méthodes numériques (méthode des éléments finis [3, 5], méthode des éléments de frontière [4] ou méthode des solutions fondamentales [7]).

2.3 Exemples de reconstruction

Différents exemples sont considérés pour lesquels une solution analytique est connue. La fonction à reconstruire est :

$$u^{an}(x_1, x_2) = \cos(x_1 + \sqrt{3}x_2) \quad (10)$$

Pour les différentes situations envisagées, les données ϕ_d et

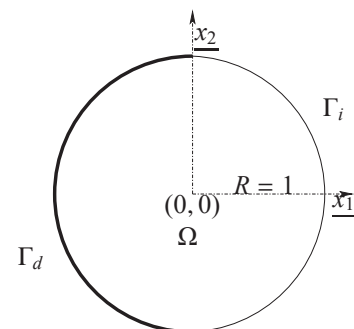


FIGURE 2 – Exemple 1 : cas du disque

ψ_d sont générées à partir de la solution analytique (10) et sont bruitées. La donnée ϕ_d est définie par :

$$\phi_d = \phi_d^{an} + \delta \eta \phi_d^{max} \tag{11}$$

où $-1 \leq \eta \leq 1$ est une variable aléatoire, δ le niveau de bruit et ϕ_d^{max} le maximum de la valeur absolue de ϕ_d^{an} sur Γ_d . De manière similaire, la donnée ψ_d est définie par :

$$\psi_d = \psi_d^{an} + \delta \eta \psi_d^{max} \tag{12}$$

Les reconstructions sont réalisées en utilisant la méthode

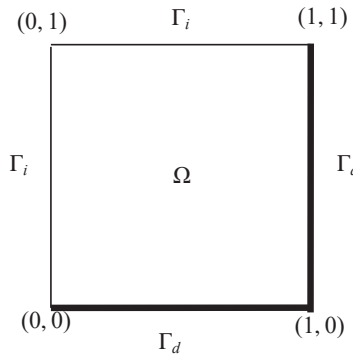


FIGURE 5 – Exemple 2 : cas du carré

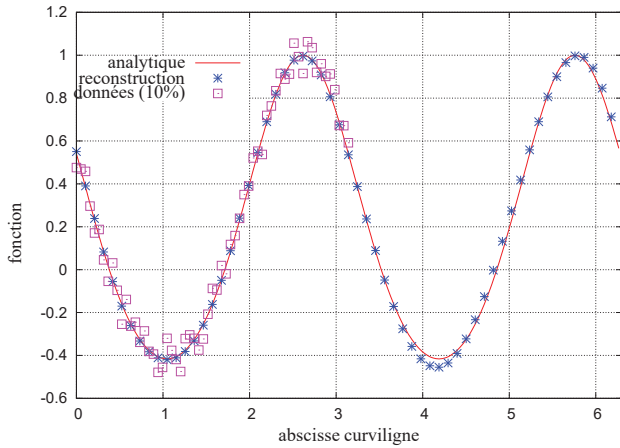


FIGURE 3 – Reconstruction de u (domaine disque)

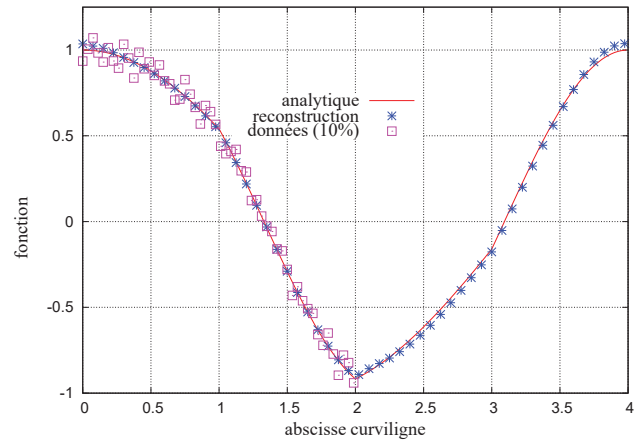


FIGURE 6 – Reconstruction de u (domaine carré)

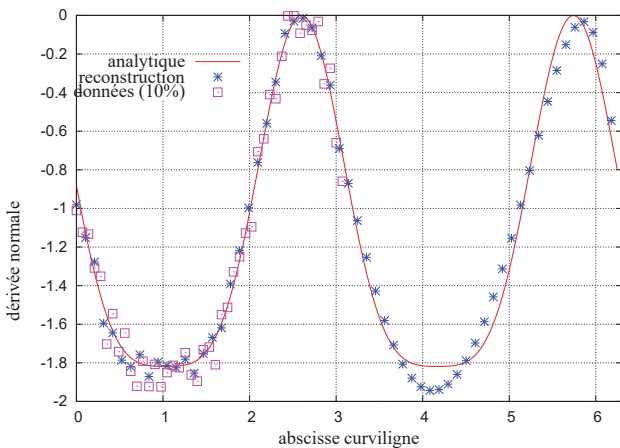


FIGURE 4 – Reconstruction de u' (domaine disque)

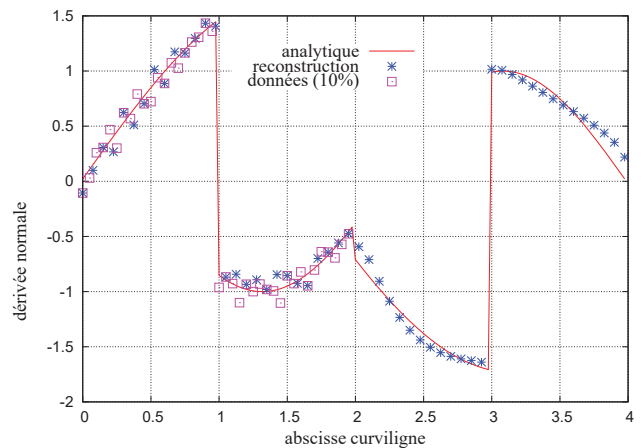


FIGURE 7 – Reconstruction de u' (domaine carré)

des éléments finis (FEM) pour caractériser de manière discrète les solutions de l'équation d'équilibre.

Pour le premier exemple considéré (Figure 2) le domaine Ω est le disque de rayon 1 centré en $(0, 0)$. La partie de la frontière Γ_d , support des données, correspond à la moitié de la frontière Γ . Elle est discrétisée par 180 segments. La partie de la frontière Γ_i est approximée par 180 segments. Les données ϕ_d et ψ_d sont bruitées avec un bruit de 10%. La Figure 3 présente la donnée ϕ_d sur Γ_d , la reconstruction de u sur toute la frontière Γ ainsi que la solution analytique. On peut noter la précision de la reconstruction sur la partie Γ_i ainsi que la capacité de la méthode à "débruiter" les données ϕ_d sur Γ_d . La Figure 4 présente la donnée ψ_d sur Γ_d , la reconstruction de la dérivée normale u' sur toute la frontière Γ ainsi que la solution de référence.

Pour le deuxième exemple, le domaine considéré (Figure 5) est le carré de côté unité. Le support Γ_d des données correspond à la moitié de la frontière et est composé des côtés $x_2 = 0$ et $x_1 = 1$. Il est discrétisé par 160 segments. La partie de la frontière Γ_i est composée des côtés $x_2 = 1$ et $x_1 = 0$. Elle est approximée par 160 segments. Les données ϕ_d et ψ_d sont bruitées avec un bruit de 10%.

La Figure 6 présente la donnée ϕ_d sur Γ_d , la reconstruction de u sur toute la frontière Γ ainsi que la solution analytique. On peut noter la précision de la reconstruction sur la partie Γ_i ainsi que la capacité de la méthode à "débruiter" les données ϕ_d sur Γ_d . La Figure 7 présente la donnée ψ_d sur Γ_d , la reconstruction de la dérivée normale u' sur toute la frontière Γ ainsi que la solution de référence.

3 Conclusion

La méthode de régularisation évanescence, présentée ici pour résoudre le problème de Cauchy associé à l'équation de Helmholtz reconstruit la fonction et sa dérivée normale avec une précision acceptable, tout en débruitant les données. La méthode accepte aussi des situations (non présentées) où l'extension de Γ_d est inférieure à celle de Γ_i ou lorsque le nombre d'inconnues est supérieur au nombre de données. La méthode de régularisation proposée est programmable avec différentes méthodes numériques (méthode des éléments finis, équations intégrales de frontière ou méthode des solutions fondamentales) et fonctionne pour d'autres problèmes de complétion de données (Equation de Laplace [2, 4], Elasticité linéaire [5],...).

Références

- [1] S. Andrieux, T. N. Baranger, A. Ben Abda, Solving Cauchy problems by minimizing an energy-like functional, *Inverse Problems*, **22**, 115-133, (2006).
- [2] A. Cimetière, F. Delvare, F. Pons, Une méthode inverse avec régularisation évanescence, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris, Tome IIb*, **328**, 639-644, (2000).
- [3] A. Cimetière, F. Delvare, M. Jaoua, F. Pons, Solution of the Cauchy problem using iterated Tikhonov regularisation, *Inverse Problems*, **17**, 553-570, (2001).
- [4] F. Delvare, A. Cimetière, F. Pons, An iterative boundary element method for Cauchy inverse problems. *Computational Mechanics*, **28**, 291-302, (2002).
- [5] F. Delvare, A. Cimetière, J. L. Hanus, P. Bailly, An iterative method for the Cauchy problem in linear elasticity with fading regularization effect, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **199**, 3336-3344, (2010).
- [6] V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya, A. V. Fomin, An iterative method for solving the Cauchy problem for elliptic equations, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **31**, 45-52, (1992).
- [7] L. Marin, F. Delvare, A. Cimetière, Fading regularization MFS algorithm for inverse boundary value problems in two-dimensional linear elasticity, *International Journal of Solids and Structures*, **78-79**, 9-20, (2016).
- [8] A. N. Tikhonov and V. Y. Arsenin, *Solution of ill-posed problems*. John Wiley & Sons, New York, (1977).